

تم تحميل وعرض المادة من منصة

حقيبتك

www.haqibati.net



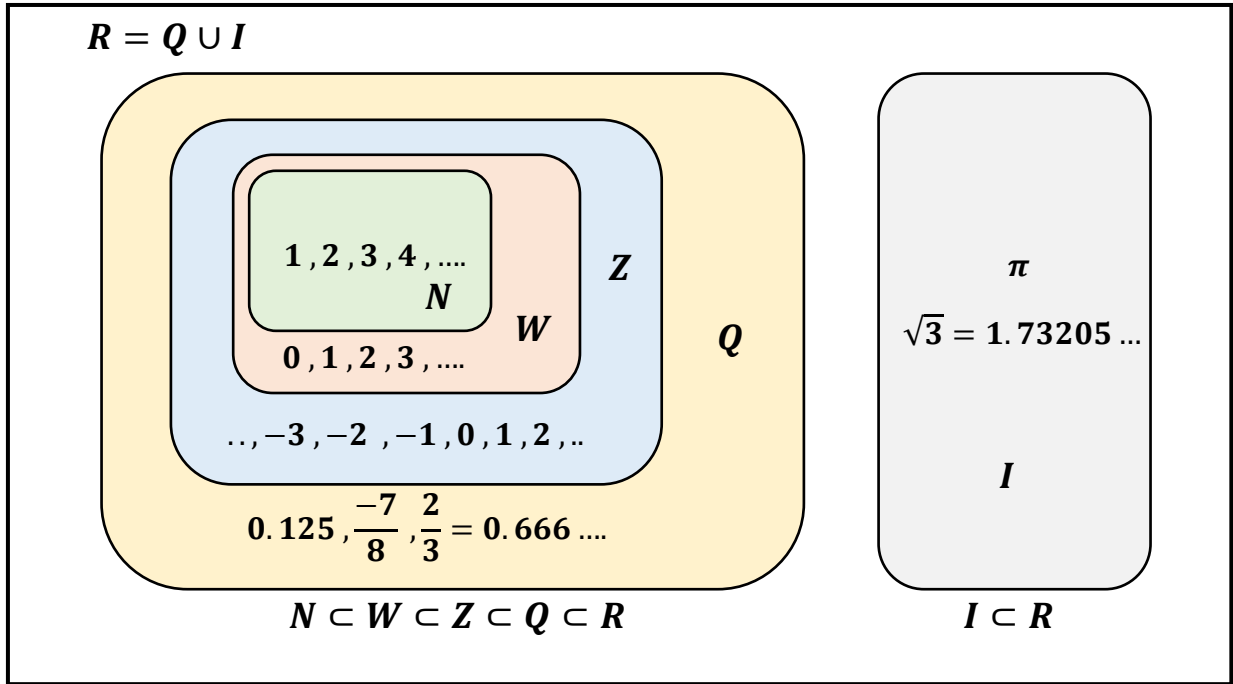
منصة حقيبتك التعليمية

منصة حقيبتك هو موقع تعليمي يعمل على تسهيل العملية التعليمية بطريقة بسيطة وسهلة وتوفير كل ما يحتاجه المعلم والطالب لكافة الصفوف الدراسية كما يحتوي الموقع على حلول جميع المواد مع الشروح المتنوعة للمعلمين.

تحليل الدوال

الفصل الأول

<u>الدوال</u>	(1-1)
<u>تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات</u>	(1-2)
<u>الإتصال والنهايات</u>	(1-3)
<u>القيم القصوى ومتوسط معدل التغير</u>	(1-4)
<u>الدوال الرئيسية الأم والتحويلات الهندسية</u>	(1-5)
<u>العمليات على الدوال وتركيب دالتين</u>	(1-6)
<u>العلاقات والدوال العكسية</u>	(1-7)

مجموعة الأعداد الحقيقية R 

الصفة المميزة للمجموعة

$$\{x \mid -2 < x < 5, x \in R\}$$

الأعداد x
حيث ...

x لها هذه
الخصائص ..

x ينتمي إلى
مجموعة الأعداد

اكتب المجموعة التالية باستعمال الصفة المميزة للمجموعة :

$$x \leq -3$$

الحل :

$$\{x \mid x \leq -3, x \in R\}$$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الحقيقية التي تقل أو تساوي -3

مثال

رموز الفترات

تستعمل لوصف المجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية

فيستعمل الرمزان " [" أو "] " للدلالة على **انتماء** طرف الفترة إليها

بينما يستعمل الرمزان " (" أو ") " للدلالة على **عدم انتماء** طرف الفترة إليها .

أما الرمزان " $-\infty$ " أو " ∞ " فيستعملان للدلالة على أن الفترة **غير محدودة** .

فترات غير محدودة	
رمز الفترة	المتباينة
$[a, \infty)$	$x \geq a$
$(-\infty, a]$	$x \leq a$
(a, ∞)	$x > a$
$(-\infty, a)$	$x < a$
$(-\infty, \infty)$	$-\infty < x < \infty$

فترات محدودة	
رمز الفترة	المتباينة
$[a, b]$	$a \leq x \leq b$
(a, b)	$a < x < b$
$[a, b)$	$a \leq x < b$
$(a, b]$	$a < x \leq b$

رمز الاتحاد: ويعني جميع العناصر المنتمية إلى كلا المجموعتين .

U

الرمزان

رمز التقاطع: ويعني جميع العناصر المشتركة بين المجموعتين .

∩

اكتب المجموعة التالية باستعمال رمز الفترة :

$$x < -2 \text{ أو } x > 9$$

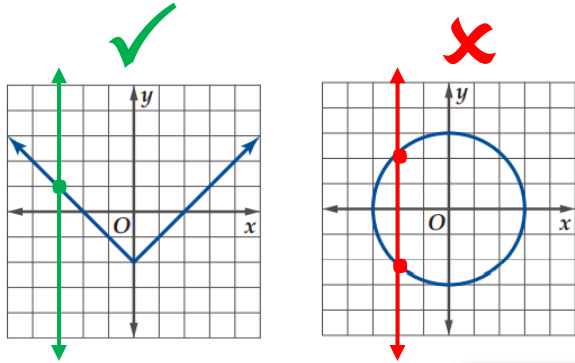
الحل :

$$(-\infty, -2) \cup (9, \infty)$$

مثال

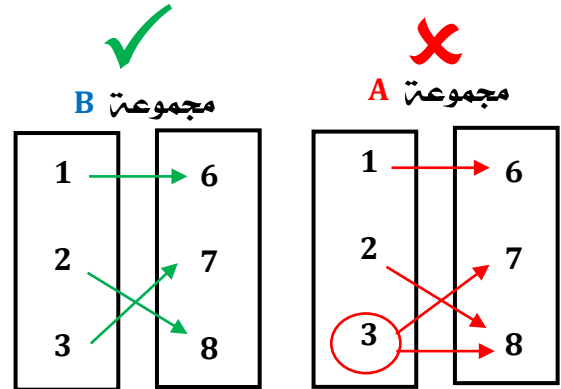
بيانياً اختبار الخط الرأسي

تمثل مجموعة من النقاط في المستوى الإحداثي دالة إذا لم يقطع أي خط رأسي تمثيلها البياني في أكثر من نقطة.



المخطط السهمي عددياً

علاقة تربط كل عنصر x من المجموعة A بعنصر واحد فقط y من المجموعة B .



تمييز الدالة

متى تكون

العلاقة دالة؟؟

المعادلات جبرياً

$$y^2 - 2x = 5 \quad \text{X}$$

$$3y + 6x = 18 \quad \text{✓}$$

تكون y دالة في x

نحل المعادلة بالنسبة لـ y

وعندما لا ترتبط أي قيمة لـ x بقيمتين من y تكون دالة.

الجدول عددياً

تكون دالة عندما ترتبط كل قيمة من x

بقيمة واحدة لـ y

x	y
-2	3
0	5
1	2

x	y
-2	3
-2	5
1	2

رمز الدالة

يستعمل $f(x)$ رمزاً للدالة ويعني قيمة الدالة f عند x وبما أن $f(x)$ تمثل قيمة y التي ترتبط بقيمة x فإننا نكتب $y = f(x)$

المعادلة: $y = -6x$ الدالة المرتبطة بالمعادلة: $f(x) = -6x$

المتغير التابع
ويمثل قيم المدى

y

المتغير المستقل
ويمثل قيم المجال

x

إيجاد قيم الدالة

نوجد قيمة الدالة $f(x)$ عند قيمة محددة معطاة لـ x .

مثال: $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ عند $x = 2$

$$f(2) = 2(2)^2 + 3(2) + 1$$

$$f(2) = 15$$

إيجاد قيم الدالة المتعددة التعريف

الدالة متعددة التعريف: هي التي تعرف بقاعدتين أو أكثر على فترات مختلفة.

نوجد قيمة الدالة $f(x)$ عند قيمة محددة معطاة لـ x

وذلك بتحديد الفترة المناسبة لقيمة x .

مثال: أوجد $f(10)$

ثم نعوض فيها عن قيمة x

$$f(10) = 3(10)^2 + 1$$

$$f(10) = 301$$

$$f(x) = \begin{cases} -4x + 3, & x < 3 \\ -x^3, & 3 \leq x \leq 8 \\ 3x^2 + 1, & x > 8 \end{cases}$$

أولاً: نحدد الفترة المناسبة لـ $x = 10$

هي الفترة الثالثة

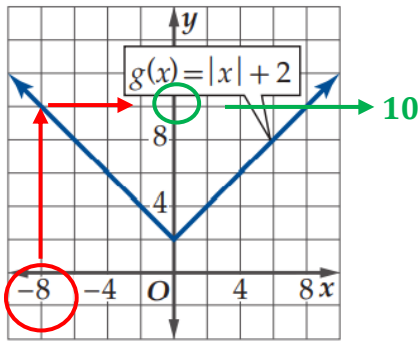
إيجاد مجال الدالة جبرياً

أمثلة	المجال	الدالة
$f(x) = x + 3$ المجال = R	المجال : R	كثيرة حدود
$f(x) = \frac{2+x}{x^2-7x}$ $x^2 - 7x \neq 0$ $x(x-7) \neq 0$ $x \neq 0$ $x-7 \neq 0 \rightarrow x \neq 7$ المجال : $\{x x \neq 0, x \neq 7, x \in R\}$	كثيرة حدود كثيرة حدود $0 \neq$ المقام نوجد قيم x ونستبعدهم من المقام المجال = أصفار المقام - R المجال : $\{x x \neq$ أصفار المقام $, x \in R\}$	كسرية
$f(x) = \sqrt{x-5}$ $x-5 \geq 0$ $x \geq 5$ المجال : $\{x x \geq 5, x \in R\}$	ما تحت الجذر ≥ 0 ما تحت الجذر ونحلها وتكون الصفة المميزة المجال : $\{x \in R, \text{الصفة المميزة} x\}$	جذرية تربيعية
$f(x) = \frac{8x}{\sqrt{2x+6}}$ $2x+6 > 0$ $2x > -6$ $x > -3$ المجال : $\{x x > -3, x \in R\}$	كثيرة حدود ما تحت الجذر > 0 ما تحت الجذر ونحلها وتكون الصفة المميزة المجال : $\{x \in R, \text{الصفة المميزة} x\}$	كسرية البسط كثيرة حدود والمقام جذر تربيعي
$f(x) = \frac{\sqrt{2x-3}}{x-5}$ نوجد البسط: $2x-3 \geq 0$ $x \geq \frac{3}{2}$: المجال نوجد أصفار المقام $x-5 \neq 0$ $x \neq 5$ المجال : $x \neq 5$ المجال : $\{x x \geq \frac{3}{2}, x \neq 5, x \in R\}$	ما تحت الجذر كثيرة حدود لإيجاد المجال : نستخدم طريقة الجذر للبسط وطريقة الكسرية للمقام	كسرية البسط جذر تربيعي والمقام كثيرة حدود

تقدير قيم الدوال

يستعمل التمثيل البياني للدالة في كثير من الأحيان لتقدير قيم الدالة .

بيانياً :



في المثال : استعمل التمثيل البياني لتقدير $g(-8)$

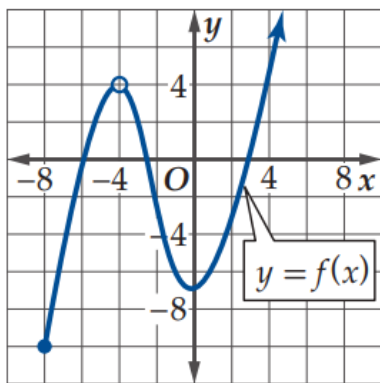
ثم تحقق جبرياً وقرب الناتج إلى أقرب جزء من مئة

$$g(-8) = |-8| + 2 \quad \text{جبرياً :}$$

$$g(-8) = 8 + 2$$

$$g(-8) = 10$$

إيجاد المجال والمدى من خلال التمثيل البياني



المجال

يحدد بيانياً من محور x

يبدأ المجال من $x = -8$

$x = -4$ ليست في المجال

السهم يدل على استمرارية المجال في الجهة الأخرى .

$$\text{المجال} = [-8, -4) \cup (-4, \infty)$$

المدى

يحدد بيانياً من محور y

يبدأ المدى من $y = -10$

وتزداد قيمة الدالة بلا حدود كما يدل السهم الممتد لأعلى .

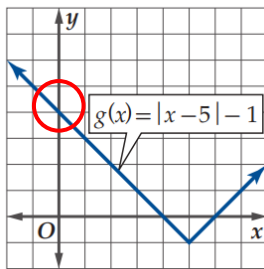
$$\text{المدى} = [-10, \infty)$$

إيجاد المقطع y

النقطة التي يتقاطع عندها المنحنى مع المحور y تسمى المقطع من ذلك المحور. ويمكن الحصول على المقطع y بالتعويض عن $x = 0$ في معادلة الدالة.

استعمل التمثيل البياني للدالة لإيجاد قيمة تقريبية للمقطع y ثم أوجدته جبرياً :

مثال



بيانياً : المنحنى يقطع محور y عند النقطة $(0, 4)$

إذن المقطع y هو 4 .

جبرياً : نعوض عن x بـ صفر

$$g(0) = |0 - 5| - 1$$

$$g(0) = 4$$

إيجاد الأصفار

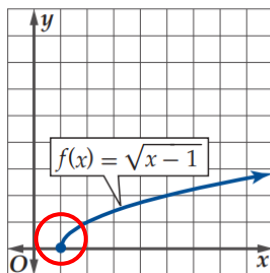
تسمى المقاطع x لمنحنى الدالة **أصفار الدالة** وتسمى حلول المعادلات

المرافقة للدالة جذور المعادلات ولإيجاد أصفار دالة f

فإننا نحل المعادلات $f(x) = 0$ بالنسبة للمتغير المستقل .

استعمل التمثيل البياني للدالة لإيجاد قيمة تقريبية لأصفارها ثم أوجدتها جبرياً :

مثال



بيانياً : المنحنى يقطع محور x عند النقطة $(1, 0)$

إذن المقطع x هو 1 .

جبرياً : نعوض عن y بـ صفر

$$0 = \sqrt{x - 1}$$

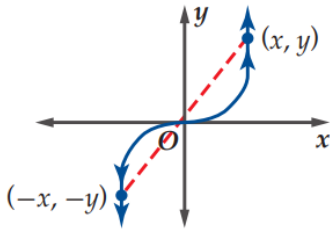
بالتربيع للطرفين

$$x = 1 \leftarrow 0 = x - 1$$

اختبارات التماثل

التماثل حول محور نقطة الأصل

بيانياً:

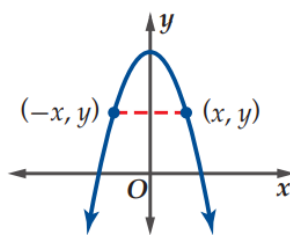


جبرياً:

نعوض عن x بـ $-x$
ونعوض عن y بـ $-y$
فيعطي معادلة مكافئة.

التماثل حول محور y

بيانياً:

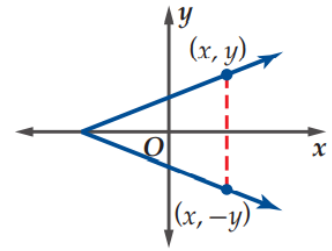


جبرياً:

نعوض عن x بـ $-x$
فيعطي معادلة مكافئة.

التماثل حول محور x

بيانياً:



جبرياً:

نعوض عن y بـ $-y$
فيعطي معادلة مكافئة.

الدوال الزوجية والفردية

فردية

متماثلة حول
نقطة الأصل

جبرياً:

لكل x في مجال f
 $f(-x) = -f(x)$

زوجية

متماثلة حول
محور y

جبرياً:

لكل x في مجال f
 $f(-x) = f(x)$

مثال

$$f(x) = x^3 - 2x$$

$$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x)$$

$$f(-x) = -x^3 + 2x$$

$$f(-x) = -(x^3 - 2x)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

ليست زوجية
وليست فردية

$$f(x) = 4\sqrt{x}$$

$$f(-x) = 4\sqrt{-x}$$

$$f(-x) \neq f(x)$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

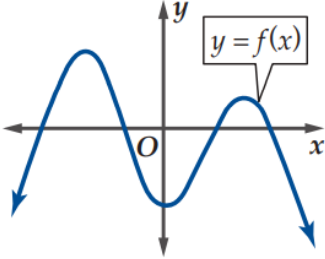
$$f(x) = x^4 + 2$$

$$f(-x) = (-x)^4 + 2$$

$$f(-x) = x^4 + 2$$

$$f(-x) = f(x)$$

الدالة المتصلة



تكون الدالة **متصلة** إذا لم يكن في تمثيلها البياني أي انقطاع أو قفزة. وعليه يمكنك تتبع مسار المنحنى دون أن ترفع القلم عنه .

نهاية الدالة

اقترب قيم الدالة من قيمة واحدة دون الحاجة إلى الوصول إلى تلك القيمة . وهي أحد شروط اتصال دالة مثل $f(x)$ عند $x = c$ بأن تقترب من قيمة واحدة عندما تقترب x من c من جهتي اليمين واليسار .

النهايات

إذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L

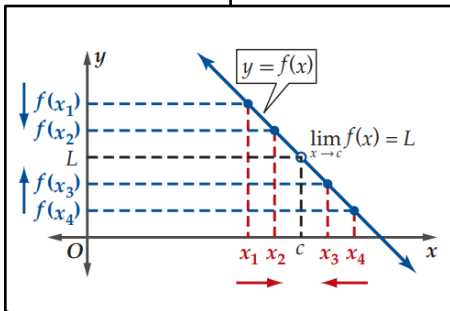
عندما تقترب x من c من الجهتين ،

فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L .

ويرمز لها بالرمز :

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

أي : نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L

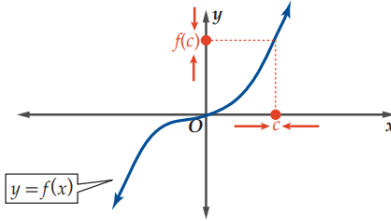


اختبار الاتصال

يقال أن الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا حققت الشروط التالية :

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

3



$f(x)$ معرفة عند c
أي أن $f(c)$ موجودة.

1

$f(x)$ تقترب من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين

أي أن $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجودة.

2

حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = x^3$ متصلة عند $x = 0$

مثال

الحل :

نتحقق من الشروط الثلاثة .

هل $f(0)$ موجودة ؟

1

$f(0) = 0$ ، الدالة معرفة عند $x = 0$

هل $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ موجودة ؟

2

نكون جدول يبين قيم $f(x)$ عندما تقترب x من 0 من اليسار واليمين .

x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-0.001	-1×10^{-6}	-1×10^{-9}		1×10^{-9}	1×10^{-6}	0.001

الجدول يبين أنه عندما تقترب قيم x من 0 من اليمين واليسار ، فإن قيمة $f(x)$ تقترب من 0

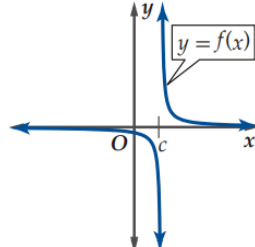
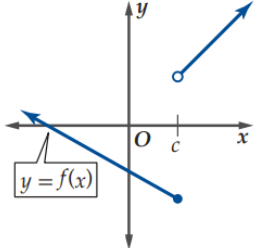
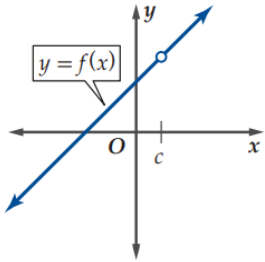
أي أن : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

هل $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ ؟

3

بما أن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ، $f(0) = 0$ ، فإن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ ، إذن الدالة متصلة عند $x = 0$

أنواع عدم الاتصال

شروطها	نوع عدم الاتصال	التمثيل البياني
<p>تكون كسرية وعند التعويض بقيمة x الناتج يكون :</p> $\frac{\text{عدد}}{0}$ <p>أي غير معرف .</p>	<p>عدم اتصال لانتهائى</p> <p>عدم اتصال غير قابل للإزالة</p>	 <p>إذا تزايدت قيم الدالة أو تناقصت بلا حدود عندما تقترب x من c من اليمين أو اليسار.</p>
<p>تكون الدالة متعددة التعريف</p> $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x > c \\ f_2(x), & x \leq c \end{cases}$ <p>عند إيجاد النهايات للطرفين من اليمين واليسار تكون غير متساوية</p> $\lim_{x \rightarrow c^+} f_1(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^-} f_2(x)$	<p>عدم اتصال قفزي</p> <p>عدم اتصال غير قابل للإزالة</p>	 <p>إذا كانت نهايتا الدالة عندما تقترب x من c من اليمين ومن اليسار موجودتين ولكنهما غير متساويتين.</p>
<p>تكون الدالة كسرية وعند التعويض بقيمة x الناتج يكون :</p> $\frac{0}{0}$ <p>أي غير معرف .</p> <p>فنعمل على تحليلها لتعيد تعريفها من جديد لتصبح متصلة .</p>	<p>عدم اتصال</p> <p>قابل للإزالة</p>	 <p>إذا كانت نهاية الدالة عندما تقترب x من c موجودة ولا تساوي قيمة الدالة عند $x = c$ ويشار إليها بدائرة صغيرة غير مظللة لتعبر عن عدم اتصال عند هذه النقطة.</p>

أمثلة على أنواع
عدم الاتصال

1

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

عند $x = 0$

$$f(0) = \frac{1}{0}$$

غير معرف

غير متصل نوعه لانهايتي

2

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 4, & x > 2 \\ 2 - x, & x \leq 2 \end{cases}$$

عند $x = 2$

$$f(2) = 2 - x \\ = 2 - 2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} 2 - x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} 5x + 4 = 14 \neq 0$$

النهايات غير متساوية

غير متصل نوعه قفزي

3

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$$

عند $x = 4$

$$f(4) = \frac{(4)^2 - 16}{4 - 4} = \frac{0}{0}$$

غير معرف

نعيد تعريفها:

$$\frac{x^2 - 16}{x - 4} \\ = \frac{(x - 4)(x + 4)}{x - 4}$$

$$f(x) = x + 4$$

$$f(4) = 4 + 4 = 8$$

$$f(x) \\ = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4}, & x \neq 4 \\ 8, & x = 4 \end{cases}$$

نظرية القيمة المتوسطة

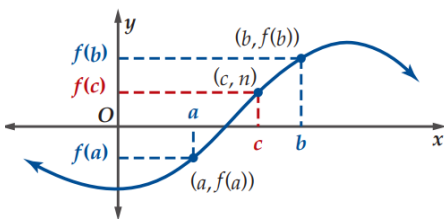
إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a, b]$ وكانت $a < b$ ووجدت قيمة n

بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد c بين a و b ، بحيث $f(c) = n$

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة وكان $f(a)$ و $f(b)$ مختلفين

في الإشارة، فإنه يوجد عدد واحد على الأقل c بين a و b

بحيث $f(c) = 0$ أي يوجد صفر للدالة بين a و b .



تقريب الأصفار عند تغيير الإشارة

حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة:

$$f(x) = x^3 - 4x + 2 \text{ في الفترة } [-4, 4]$$

الحل:

مثال

أولاً: نوجد قيم الدالة في الفترة المحددة

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-46	-13	2	5	2	-1	2	17	50

ثانياً: نوجد الأعداد الصحيحة التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة

وهي بين قيم الدالة التي فيها تغيير بالإشارات بين العددين -3 و -2

وبين العددين 0 و 1 وبين العددين 1 و 2.

تقريب الأصفار دون تغيير الإشارة

حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة:

$$f(x) = x^2 + x + 0.16 \text{ في الفترة } [-3, 3]$$

الحل:

مثال

أولاً: نوجد قيم الدالة في الفترة المحددة

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.16	2.16	0.16	0.16	2.16	6.16	12.16

ثانياً: نوجد الأعداد الصحيحة التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة

وهنا قيم الدالة لا تتغير إشاراتها عند قيم x المعطاة ولكن $f(x)$ تتناقص عندما

تقترب قيم x من العدد -1 من اليسار، وتبدأ $f(x)$ بالتزايد عن يمين $x = 0$

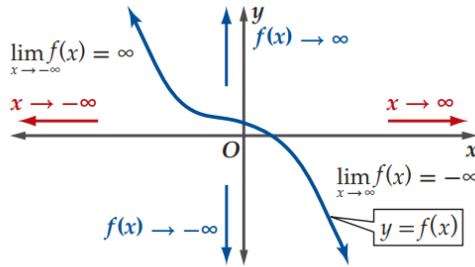
من المحتمل وجود صفر حقيقي للدالة بين العددين المتتاليين -1 و 0.

سلوك طرفي التمثيل البياني

يصف شكل الدالة عند طرفي منحناها ، أي يصف قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x
 أو تنقص بلا حدود ، أي عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$
 ولوصف سلوك طرفي التمثيل البياني نستعمل مفهوم النهاية .

دراسة سلوك طرفي التمثيل البياني

من اليسار
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$



من اليمين
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

كثيرة حدود

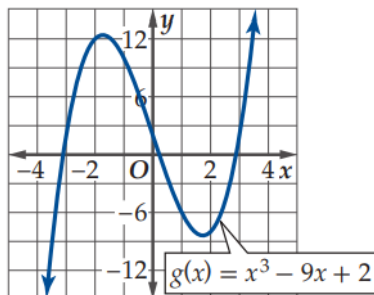
من الرسم نحدد السلوك

إذا كان :

اتجاه السهم إلى أعلى ∞

اتجاه السهم إلى أسفل $-\infty$

استعمل التمثيل البياني للدالة لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني :



الحل :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

مثال

كسرية

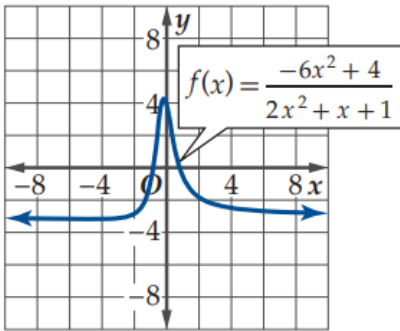
درجة البسط = درجة المقام

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) =$$

معامل الحد الرئيس

معامل الحد الرئيس

مثال :



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =$$

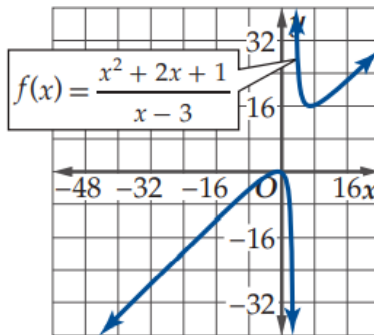
$$= \frac{-6}{2} = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$$

درجة البسط < درجة المقام

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

مثال :



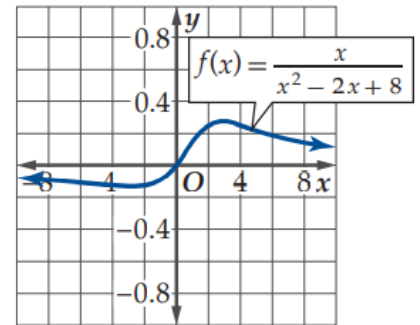
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

درجة البسط > درجة المقام

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

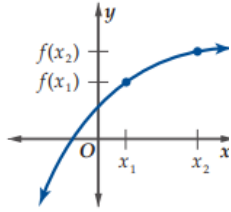
مثال :



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

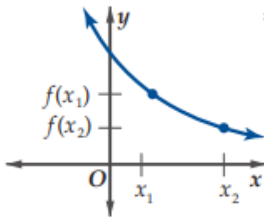
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

خصائص الدالة (متزايدة - متناقصة - ثابتة) :



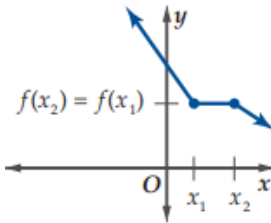
تكون الدالة f متزايدة على فترة ما إذا وفقط إذا زادت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة .
 لكل x_1 و x_2 في الفترة ، فإن : $f(x_1) < f(x_2)$ عندما $x_1 < x_2$

متزايدة



تكون الدالة f متناقصة على فترة ما إذا وفقط إذا تناقصت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة .
 لكل x_1 و x_2 في الفترة ، فإن : $f(x_1) > f(x_2)$ عندما $x_1 < x_2$

متناقصة



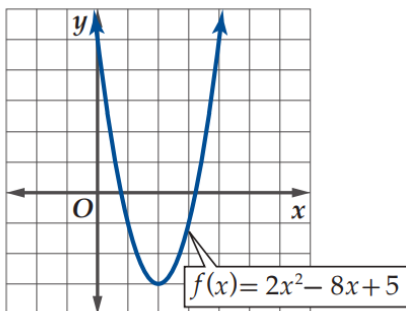
تكون الدالة f ثابتة على فترة ما إذا وفقط إذا لم تتغير قيم $f(x)$ لأي قيم x في الفترة .
 لكل x_1 و x_2 في الفترة ، فإن : $f(x_1) = f(x_2)$ عندما $x_1 < x_2$

ثابتة

استعمل التمثيل البياني لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة

متزايدة أو متناقصة أو ثابتة :

الحل :

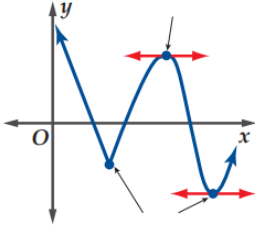


الدالة متناقصة في الفترة $(-\infty, 2)$

الدالة متزايدة في الفترة $(2, \infty)$

مثال

النقاط الحرجة



هي النقاط التي تغير الدالة عندها سلوك تزايدها أو تناقصها فتكون قمة أو قاعاً في منحنى الدالة .

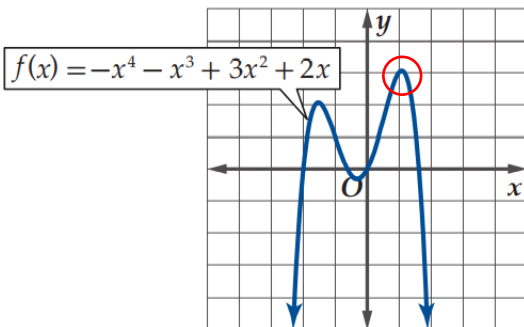
يكون المماس المرسوم للمنحنى عندها إما أفقياً (ميله صفر) أو عمودياً (ميله غير معرف) أو أنه لا يوجد عندها مماس ويدل ذلك على وجود قيمة عظمى أو صغرى للدالة .

القيم القصوى المطلقة

الصغرى	العظمى
<p>لابد أن يكون اتجاه الأسهم للأعلى والأكثر نزولاً هي القيمة الصغرى المطلقة . وهي القيمة الأصغر من جميع القيم في مجالها . يوجد قيمة صغرى مطلقة عند $x = b$</p>	<p>لابد أن يكون اتجاه الأسهم للأسفل والأكثر علواً هي القيمة العظمى المطلقة . وهي القيمة الأكبر من جميع القيم في مجالها . يوجد قيمة عظمى مطلقة عند $x = b$</p>

استعمل التمثيل البياني لتقدير قيم x التي عندها قيمة قصوى مطلقة

ثم أوجد قيمة الدالة عندها:



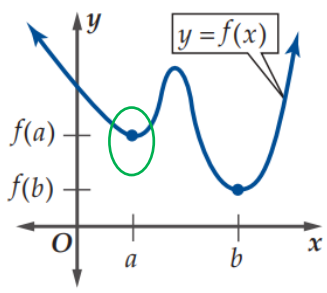
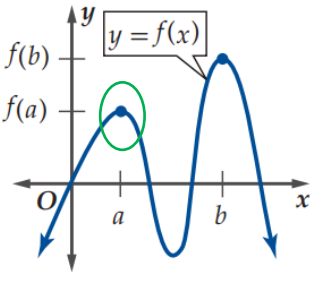
الحل :

توجد قيمة عظمى مطلقة عند $x = 1$

مقدارها = 3

مثال

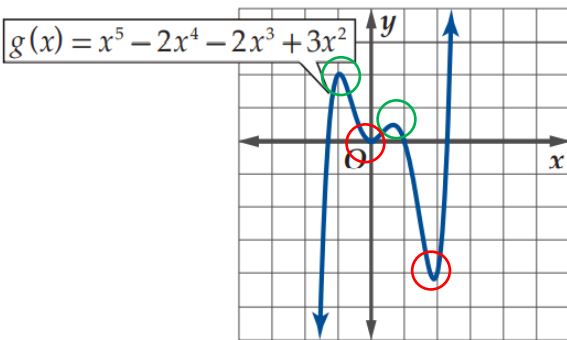
القيم القصوى المحلية

الصغرى	العظمى
 <p>لا يشترط أن تكون الأسهم في نفس الاتجاه . الأقل نزولاً هي قيمة صغرى محلية . وهي القيمة الأصغر من جميع القيم في فترة من المجال . توجد قيمة صغرى محلية عند $x = a$</p>	 <p>لا يشترط أن تكون الأسهم في نفس الاتجاه . الأقل ارتفاعاً هي قيمة عظمى محلية . وهي القيمة الأكبر من جميع القيم في فترة من المجال . توجد قيمة عظمى محلية عند $x = a$</p>

استعمل التمثيل البياني لتقدير قيم x التي عندها قيمة قصوى محلية مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة ، ثم أوجد قيمة الدالة عندها:

مثال

الحل :



توجد قيمة عظمى محلية عند $x = -1$
 مقدارها $= 2$

توجد قيمة عظمى محلية عند $x = 0.5$
 مقدارها $= 0.5$

توجد قيمة صغرى محلية عند $x = 0$
 مقدارها $= 0$

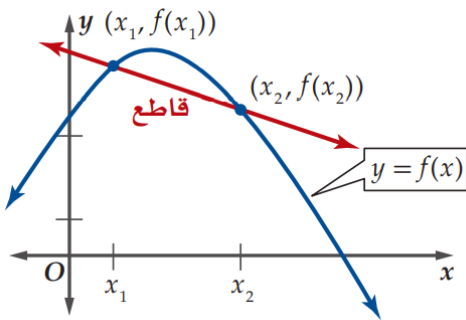
توجد قيمة صغرى محلية عند $x = 2$
 مقدارها $= -4$

متوسط معدل التغير

متوسط معدل التغير بين أي نقطتين على منحنى الدالة f هو ميل المستقيم المار بهاتين النقطتين .

متوسط معدل تغير الدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1, x_2]$ هو :

$$m_{sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



القاطع : هو المستقيم المار بنقطتين على منحنى الدالة .

مثال

أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2$

في الفترة $[2, 3]$

الحل :

$$m_{sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$x_1 = 2, x_2 = 3$$

$$m_{sec} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2}$$

$$= \frac{2 - (-4)}{3 - 2}$$

$$= 6$$

$$f(3) = (3)^3 - 2(3)^2 - 3(3) + 2$$

$$f(3) = 2$$

$$f(2) = (2)^3 - 2(2)^2 - 3(2) + 2$$

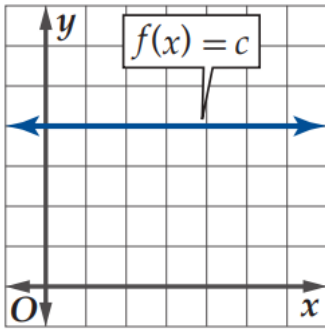
$$f(2) = -4$$

متوسط معدل التغير = السرعة المتوسطة

خصائص الدوال الرئيسية (الأمر)

$f(x) = c$ الدالة الثابتة

1

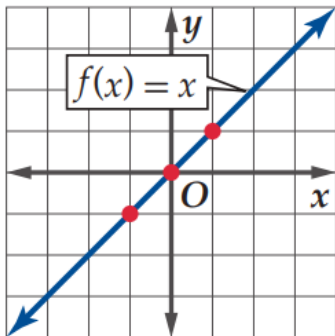


c عدد حقيقي

$R (-\infty, \infty)$	المجال
$\{C\}$	المدى
تقطع y عند النقطة $(0, c)$	المقطع
متماثلة حول محور y	التماثل
زوجية	نوع الدالة
متصلة	الاتصال
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$	سلوك طرفي التمثيل
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$	
ثابتة في الفترة $(-\infty, \infty)$	فترات التزايد والتناقص

$f(x) = x$ الدالة المحايدة

2



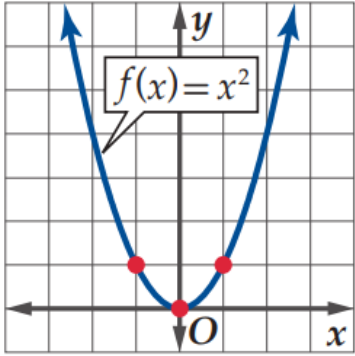
جميع النقاط الذي تمر بها الدالة
إحداثياتها (a, a)

$R (-\infty, \infty)$	المجال
$R (-\infty, \infty)$	المدى
تقطع محور x و y في $(0, 0)$	المقطع
متماثلة حول نقطة الأصل	التماثل
فردية	نوع الدالة
متصلة	الاتصال
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$	سلوك طرفي التمثيل
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$	
متزايدة في الفترة $(-\infty, \infty)$	فترات التزايد والتناقص

خصائص الدوال الرئيسية (الأمر)

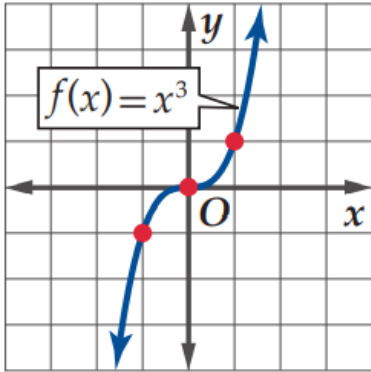
$f(x) = x^2$ الدالة التربيعية

3

	$R \quad (-\infty, \infty)$	المجال
	$R^+ \quad [0, \infty)$	المدى
	تقطع محور x و y في $(0, 0)$	المقطع
	متماثلة حول محور y	التماثل
	زوجية	نوع الدالة
	متصلة	الاتصال
	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$	سلوك طرفي التمثيل
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$	
متناقصة في الفترة $(-\infty, 0)$ متزايدة في الفترة $(0, \infty)$	فترات التزايد والتناقص	

$f(x) = x^3$ الدالة التكعيبية

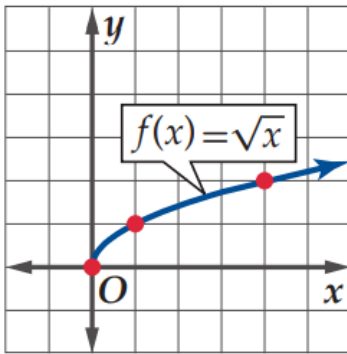
4

	$R \quad (-\infty, \infty)$	المجال
	$R \quad (-\infty, \infty)$	المدى
	تقطع محور x و y في $(0, 0)$	المقطع
	متماثلة حول نقطة الأصل	التماثل
	فردية	نوع الدالة
	متصلة	الاتصال
	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$	سلوك طرفي التمثيل
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$	
متزايدة في الفترة $(-\infty, \infty)$	فترات التزايد والتناقص	

خصائص الدوال الرئيسية (الأم)

$f(x) = \sqrt{x}$ دالة الجذر التربيعي

5

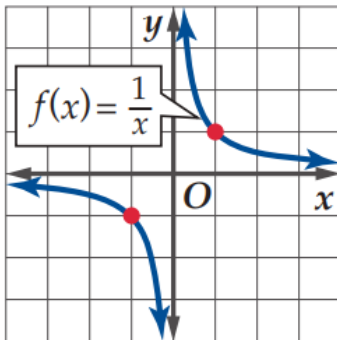


$x \geq 0$

$R^+ [0, \infty)$	المجال
$R^+ [0, \infty)$	المدى
تقطع محور x و y في $(0, 0)$	المقطع
غير متماثلة	التماثل
ليست زوجية وليست فردية	نوع الدالة
متصلة	الاتصال
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$	سلوك طرفي التمثيل
ثابتة في الفترة $(-\infty, \infty)$	فترات التزايد والتناقص

$f(x) = \frac{1}{x}$ دالة المقلوب

6



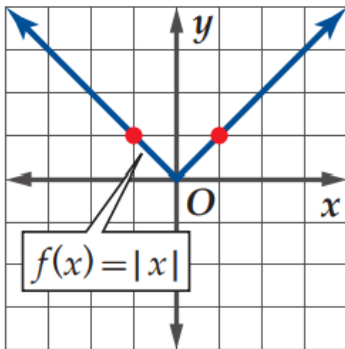
$x \neq 0$

$R - \{0\}$	المجال
$R - \{0\}$	المدى
لا يوجد	المقطع
متماثلة حول نقطة الأصل	التماثل
فردية	نوع الدالة
غير متصلة (لا نهائي)	الاتصال
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$	سلوك طرفي التمثيل
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$	
متناقصة في الفترة $(-\infty, 0), (0, \infty)$	فترات التزايد والتناقص

خصائص الدوال الرئيسية (الأمر)

دالة القيمة المطلقة $f(x) = |x|$

7

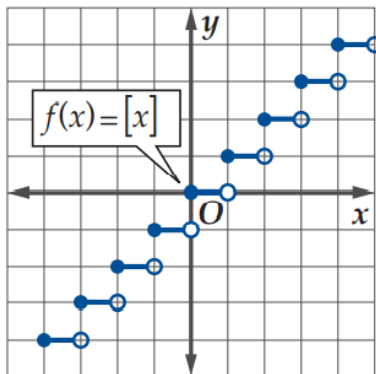


$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$R (-\infty, \infty)$	المجال
$R^+ [0, \infty)$	المدى
تقطع محور x و y في $(0, 0)$	المقطع
متماثلة حول محور y	التماثل
زوجية	نوع الدالة
متصلة	الاتصال
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$	سلوك طرفي التمثيل
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$	
متناقصة في الفترة $(-\infty, 0)$ متزايدة في الفترة $(0, \infty)$	فترات التزايد والتناقص

دالة أكبر عدد صحيح $f(x) = [x]$

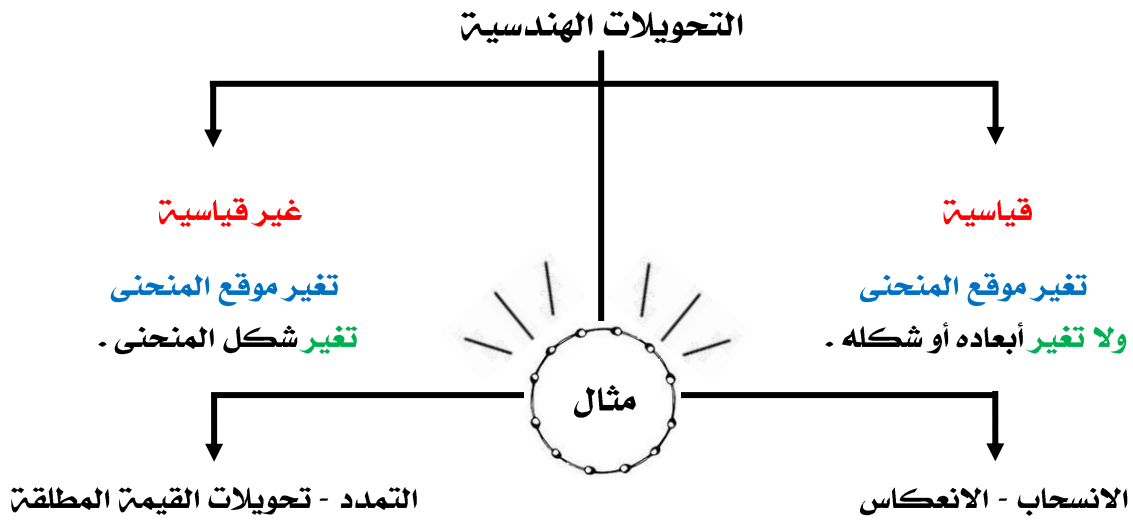
8



أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x

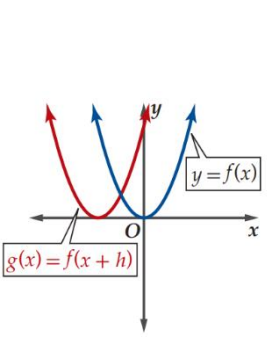
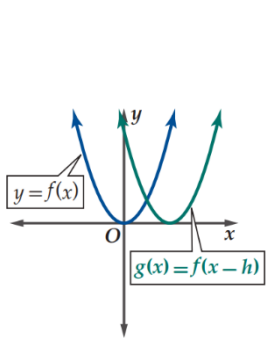
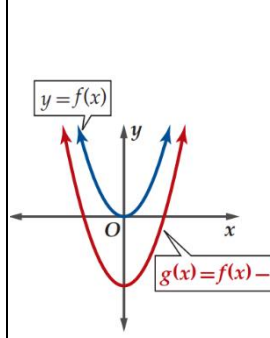
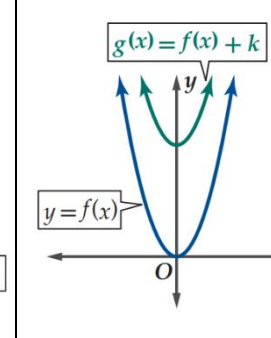
$R (-\infty, \infty)$	المجال
Z	المدى
تقطع محور x و y في $(0, 0)$	المقطع
غير متماثلة	التماثل
ليست زوجية وليست فردية	نوع الدالة
غير متصلة (قفزي)	الاتصال
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$	سلوك طرفي التمثيل
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$	
ثابتة عندما $x \notin Z$ متزايدة عندما $x \in Z$	فترات التزايد والتناقص

دالة أكبر عدد صحيح هي أحد الأمثلة المشهورة على الدالة الدرجية.



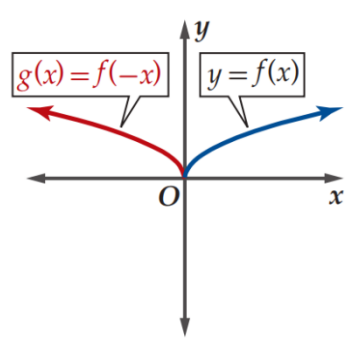
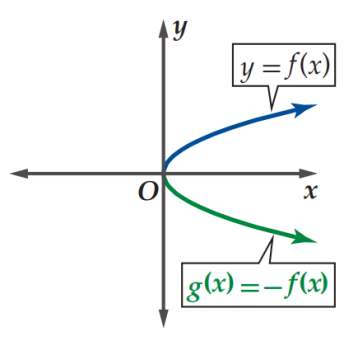
الانسحاب

تحويل ينقل منحنى الدالة فالانسحاب الرأسي ينقل منحنى الدالة إلى أعلى أو أسفل ، بينما ينقل الانسحاب الأفقي منحنى الدالة إلى اليمين أو اليسار .

الانسحاب			
أفقي		رأسي	
$g(x) = f(x - h)$		$g(x) = f(x) + k$	
داخل h		خارج k	
(+) يسار	(-) يمين	(-) أسفل	(+) أعلى
$g(x) = f(x + h)$	$g(x) = f(x - h)$	$g(x) = f(x) - k$	$g(x) = f(x) + k$
			

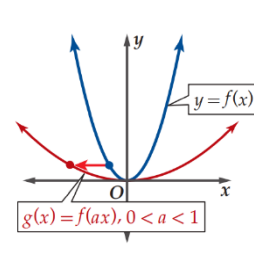
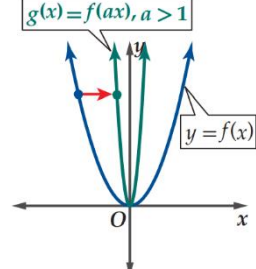
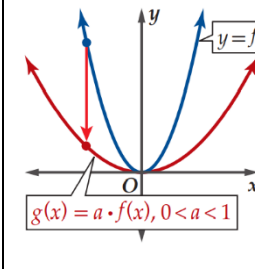
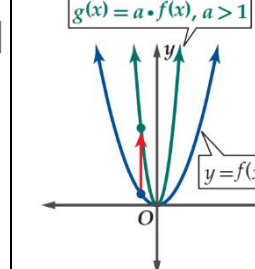
الانعكاس

تحويل يكون لمنحنى الدالة صورة **مرآة** بالنسبة لمستقيم محدد .

الانعكاس	
الانعكاس حول محور y	الانعكاس حول محور x
(-) داخل	(-) خارج
$g(x) = f(-x)$	$g(x) = -f(x)$
	

التمدد

تحويل يؤدي إلى **تضييق** (ضغط) أو **توسع** (مط) منحنى الدالة .

التمدد			
أفقي		رأسي	
(a داخل الدالة)		(a خارج الدالة)	
$g(x) = f(a \cdot x)$		$g(x) = a \cdot f(x)$	
تضييق	توسع	تضييق	توسع
$a > 1$	$0 < a < 1$	$0 < a < 1$	$a > 1$
اتجاه الحركة			
$\rightarrow \leftarrow$	$\leftarrow \rightarrow$	$\downarrow \uparrow$	$\uparrow \downarrow$
			

التوسع الرأسي \approx التضييق الأفقي ، التضييق الرأسي \approx التوسع الأفقي

تمثيل الدوال متعددة التعريف بيانياً

يمكنك تمثيل الدالة المتعددة التعريف بيانياً باستعمال التحويلات الهندسية.

مثل الدالة بيانياً :

$$g(x) = \begin{cases} x - 5 & , \quad x \leq 0 \\ x^3 & , \quad 0 < x \leq 2 \\ \frac{2}{x} & , \quad x > 2 \end{cases}$$

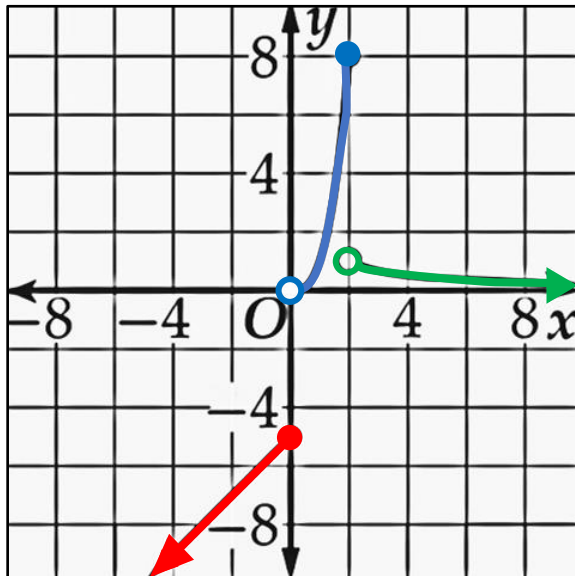
مثال

الحل :

في الفترة $(-\infty, 0]$ ، أمثل الدالة $y = x - 5$

في الفترة $(0, 2]$ ، أمثل الدالة $y = x^3$

في الفترة $(2, \infty)$ ، أمثل الدالة $y = \frac{2}{x}$



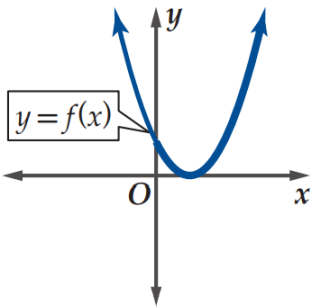
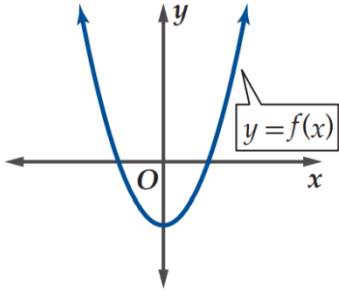
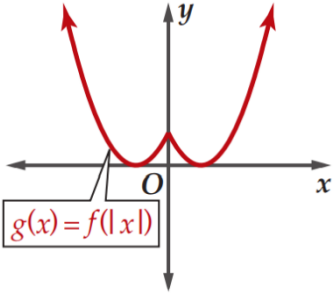
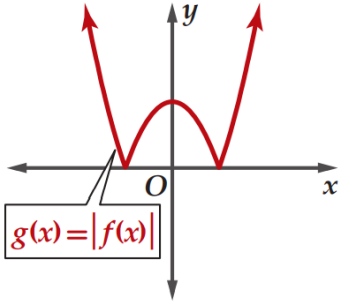
ضع دائرة مفتوحة عند

النقطة $(0, 0)$ والنقطة $(2, 1)$

ضع دائرة مغلقة عند

النقطة $(0, -5)$ والنقطة $(2, 8)$

التحويلات الهندسية لدوال القيمة المطلقة

القيمة المطلقة	
داخل	خارج
$g(x) = f(x)$	$g(x) = f(x) $
الرسم قبل التحويل	
	
الرسم بعد التحويل	
	
طريقة الرسم	
نزيل الجزء الموجود يسار محور y ثم نعكس المتبقي فقط حول محور y .	نعكس كل جزء موجود تحت محور x ونجعله فوق محور x ثم نزيل السابق.

العمليات على الدوال

إذا كانت f, g دالتين يتقاطع مجالاهما ، فإننا نعرف عمليات **الجمع** ، **الطرح** ، و**الضرب** و**القسمة** لجميع قيم x الموجودة في تقاطع المجالين على النحو الآتي:

الجمع: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ **الضرب:** $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

الطرح: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ **القسمة:** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

إيجاد المجال

مجال $(f + g)(x) =$ مجال $f(x) \cap$ مجال $g(x)$

مجال $(f - g)(x) =$ مجال $f(x) \cap$ مجال $g(x)$

مجال $(f \cdot g)(x) =$ مجال $f(x) \cap$ مجال $g(x)$

مجال $\left(\frac{f}{g}\right)(x) =$ مجال $f(x) \cap$ مجال $g(x) -$ أصفار المقام

$f(x) = x^2 - 6x - 8$ ، $g(x) = \sqrt{x}$

أوجد كلا من الدوال الآتية ، ثم حدد مجالها :

مثال

الحل:

مجال $f(x)$ هو $R (-\infty, \infty)$ و مجال $g(x)$ هو $[0, \infty)$

$(f + g)(x) = x^2 - 6x - 8 + \sqrt{x}$

المجال: $[0, \infty)$

$(f \cdot g)(x) = x^2\sqrt{x} - 6x\sqrt{x} - 8\sqrt{x}$

المجال: $[0, \infty)$

$(f - g)(x) = x^2 - 6x - 8 - \sqrt{x}$

المجال: $[0, \infty)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 - 6x - 8}{\sqrt{x}}$

المجال: $(0, \infty)$

تركيب الدوال

تركيب الدوال يعني **دمج** دالتين ، وهذا الدمج **لا ينتج** من جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة وهو يعني إيجاد قيمة دالة عند دالة أخرى .

تركيب الدالتين

يعرف **تركيب الدالتين** f و g على النحو الآتي:

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

تقرأ الدالة $f \circ g$ على النحو f تركيب g أو f بعد g

حيث تطبق الدالة g أولاً ثم الدالة f

مثال

إذا كانت $f(x) = x^2 + 1$ ، $g(x) = x - 4$ فأوجد :

الحل :

$$\begin{aligned} 1 \quad & [f \circ g](x) \\ & [f \circ g](x) = f[g(x)] \\ & = f(x - 4) \\ & = (x - 4)^2 + 1 \\ & = x^2 - 8x + 16 + 1 \\ & = x^2 - 8x + 17 \end{aligned}$$

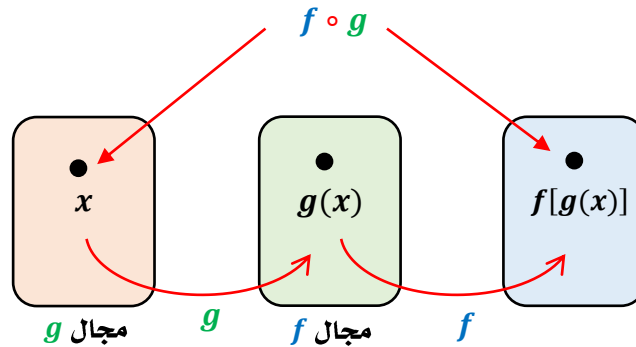
3

$$\begin{aligned} & [f \circ g](2) = \\ & [f \circ g](x) = x^2 - 8x + 17 \\ & = (2)^2 - 8(2) + 17 \\ & = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad & [g \circ f](x) \\ & [g \circ f](x) = g[f(x)] \\ & = g(x^2 + 1) \\ & = (x^2 + 1) - 4 \\ & = x^2 - 3 \end{aligned}$$

مجال دالة التركيب

يتكون مجال الدالة $f \circ g$ من جميع قيم x في مجال الدالة g على أن تكون $g(x)$ في مجال f
 نوجد مجالي الدالتين f و g قبل تركيبهما وعند وجود قيود على مجال f أو مجال g فإن مجال $f \circ g$ يكون مقيداً بكل قيم x في مجال g التي تكون صورها $g(x)$ موجودة في مجال f



$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

$R =$ ← مجال $f \circ g$ يساوي R

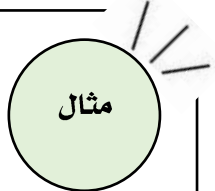
نوجد مجال كلًا من الدالتين f, g

← مجال $f \circ g$ قبل التبسيط ← مجال $f \neq R$ أو مجال $g \neq R$

ابجاد مجال
دالة التركيب

حدد مجال الدالة $f \circ g$ متضمنًا القيود الضرورية ثم أوجد $f \circ g$ فيما يلي :

$$f(x) = \frac{5}{x} , \quad g(x) = x^2 + x$$



الحل :

نوجد مجال $f \circ g$

الدالة كسرية إذن : المقام $\neq 0$

$$x^2 + x \neq 0$$

$$x(x + 1) \neq 0$$

$$x \neq 0$$

$$x + 1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1$$

المجال $\{x | x \neq 0, x \neq -1, x \in R\}$

مجال $f(x)$ هو $R - \{0\}$

مجال $g(x)$ هو R

نوجد التركيب

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

$$= f[x^2 + x]$$

$$= \frac{5}{x^2 + x}$$

كتابة الدالة كتركيب دالتين

إحدى المهارات المهمة عند دراسة التفاضل والتكامل هي إعادة تفكيك الدالة إلى دالتين أبسط منها .

أي أنه لتفكيك دالة مثل h ، فإنك تجد دالتين f, g ، مثلًا بحيث يكون تركيبهما هو h .

$$h(x) = [f \circ g](x)$$

أوجد دالتين f, g بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$ ، وعلى ألا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$ فيما يلي :

مثال

$$h(x) = x^2 - 2x + 1$$

الحل :

بالتحليل إلى العوامل نكتب الدالة بالشكل :

$$h(x) = (x - 1)(x - 1)$$

$$h(x) = (x - 1)^2$$

أي أنه يمكننا كتابة $h(x)$ كتركيب للدالتين :

$$g(x) = x - 1 , f(x) = x^2$$

وعندئذ :

$$h(x) = (x - 1)^2$$

$$\boxed{g(x) = x - 1} \quad \boxed{f(x) = x^2}$$

$$h(x) = [g(x)]^2 = f[g(x)] = [f \circ g](x)$$

العلاقات والعلاقات العكسية

يقال أن العلاقة A علاقة **عكسية** للعلاقة B إذا وفقط إذا كان الزوج المرتب (a, b) موجوداً في أحد العلاقتين ، فإن الزوج المرتب (b, a) موجود في العلاقة الأخرى .

مثال :

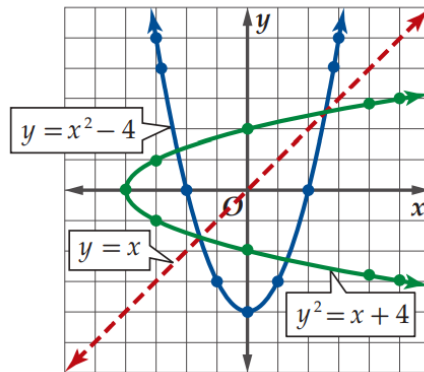
العلاقة $A = \{(1, 5), (2, 10)\}$ هي علاقة **عكسية** للعلاقة $B = \{(5, 1), (10, 2)\}$

وإذا مثلت العلاقة **بمعادلتها** فيمكن إيجاد علاقتها **العكسية** بتبديل المتغير المستقل بالمتغير التابع .

العلاقة العكسية

$$x = y^2 - 4$$

x	y
5	-3
0	-2
-3	-1
-4	0
-3	1
0	2
5	3



العلاقة

$$y = x^2 - 4$$

x	y
-3	5
-2	0
-1	-3
0	-4
1	-3
2	0
3	5

كل علاقة من هاتين العلاقتين **المتعاكستين**

هي **انعكاس** للأخرى حول **المستقيم $y = x$**

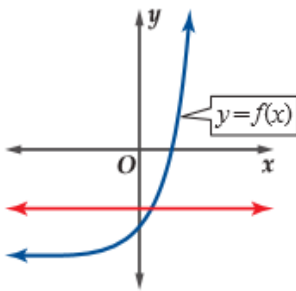
ملاحظة

الدالة العكسية

هي العلاقة **العكسية** لدالة f والتي تمثل دالة ، يرمز لها بالرمز f^{-1} .

اختبار الخط الأفقي

يوجد لأي دالة f دالة **عكسية** f^{-1} إذا وفقط إذا كان كل **خط أفقي** يتقاطع مع منحنى الدالة عند **نقطة واحدة** على الأكثر .



مثال :

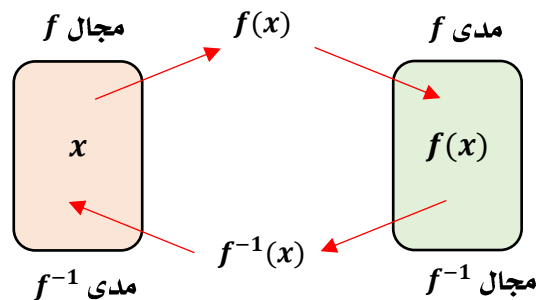
بما أنه **لا يوجد خط أفقي** يقطع منحنى الدالة f بأكثر من نقطة فإن الدالة **العكسية** f^{-1} موجودة .

الدالة المتباينة

هي الدالة التي تحقق اختبار **الخط الأفقي** .

لأن كل قيمة لـ x ترتبط بقيمة **واحدة فقط** لـ y ، ولا توجد قيمة لـ y ترتبط بأكثر من قيمة لـ x .

إذا كانت الدالة **متباينة** فإن لها دالة **عكسية** .



إيجاد الدالة العكسية

- الخطوة 1

التحقق من وجود دالة عكسية للدالة المعطاة بالتحقق من أنها متباينة بالاعتماد على اختبار الخط الأفقي .
- الخطوة 2

ضع y مكان $f(x)$
- الخطوة 3

بدل موقعي x, y
- الخطوة 4

حل المعادلة بالنسبة للمتغير y
- الخطوة 5

ضع $f^{-1}(x)$ مكان y

أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن .

$$f(x) = -16 + x^3$$

مثال

الحل :

الدالة متباينة باختبار الخط الأفقي

إذن يوجد دالة عكسية

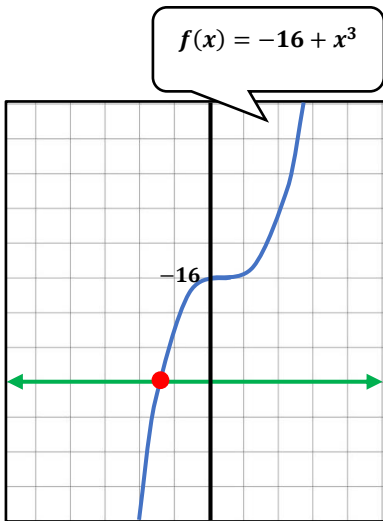
$$y = -16 + x^3$$

$$x = -16 + y^3$$

$$y^3 = x + 16$$

$$y = \sqrt[3]{x + 16}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 16}$$



تركيب الدالة ودالتها العكسية

تكون كل من الدالتين f و f^{-1} دالة عكسية للأخرى ، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان :

$$f[f^{-1}(x)] = x \quad \text{1} \quad \text{لجميع قيم } x \text{ في مجال } f^{-1}(x)$$

$$f^{-1}[f(x)] = x \quad \text{2} \quad \text{لجميع قيم } x \text{ في مجال } f(x)$$

أثبت جبرياً أن كلا من الدالتين f, g تمثل دالة عكسية للأخرى :

$$f(x) = 18 - 3x, \quad g(x) = 6 - \frac{x}{3}$$

مثال

الحل :

$$\begin{aligned} [g \circ f](x) &= g[f(x)] \\ &= g[18 - 3x] \\ &= 6 - \frac{18 - 3x}{3} \\ &= \frac{18 - 18 + 3x}{3} \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [f \circ g](x) &= f[g(x)] \\ &= f\left[6 - \frac{x}{3}\right] \\ &= 18 - 3\left(6 - \frac{x}{3}\right) \\ &= 18 - 18 + \frac{3x}{3} \\ &= x \end{aligned}$$

بما أن $f[g(x)] = g[f(x)] = x$ فإن كلا الدالتين $f(x), g(x)$ دالة عكسية للأخرى.

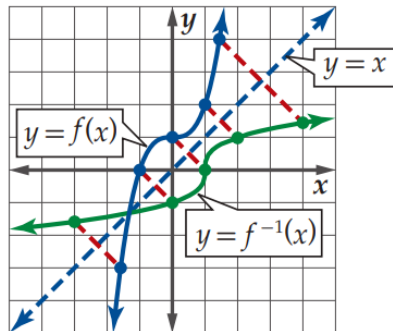
إيجاد الدالة العكسية بيانياً

إذا كان للدالة قيم
عظمى أو صغرى محلية
فإن الدالة تفضل في
اختبار الخط الأفقي ومن
ثم لا تكون دالة
متباينة .

يمكننا تمثيل منحنى الدالة العكسية

بانعكاس الدالة الأصلية

حول المستقيم $y = x$



كما في المثال :

العلاقات والدوال الأسية
واللوغاريتمية

الفصل الثاني

<u>الدوال الأسية</u>	<u>(2-1)</u>
<u>حل المعادلات والمتباينات الأسية</u>	<u>(2-2)</u>
<u>اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية</u>	<u>(2-3)</u>
<u>خصائص اللوغاريتمات</u>	<u>(2-4)</u>
<u>حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية</u>	<u>(2-5)</u>
<u>اللوغاريتمات العشرية</u>	<u>(2-6)</u>

الدالة الأسية

دالة يمكن وصفها بمعادلتها على الصورة: $y = ab^x$

$$a \neq 0, b > 0, b \neq 1$$

$$y = 2(3)^x$$

$$y = 4^x$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

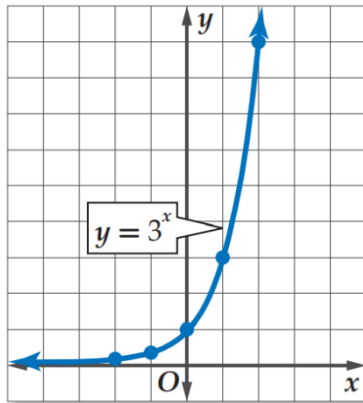
أمثلة

تمثيل الدالة الأسية

عندما $b > 1$, $a > 0$

1

تمثيل الدالة الأسية $y = 3^x$



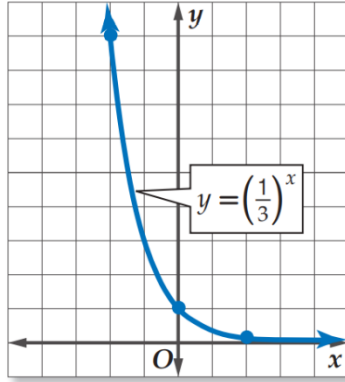
x	$(3)^x$	y
-2	$(3)^{-2}$	$\frac{1}{9}$
-1	$(3)^{-1}$	$\frac{1}{3}$
0	$(3)^0$	1
1	$(3)^1$	3
2	$(3)^2$	9

تزايدية	نوعها
R	المجال
R^+	المدى
$a = 1$	المقطع y
(خط أفقي) محور x	خط التقارب

تمثيل الدالة الأسية

عندما $0 < b < 1$, $a > 0$

2

تمثيل الدالة الأسية $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 

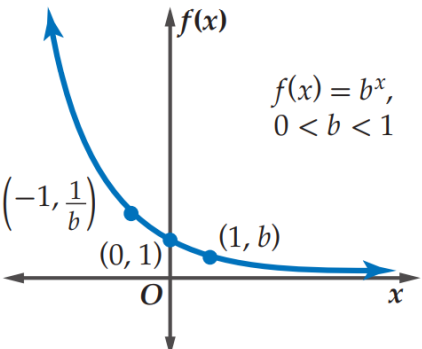
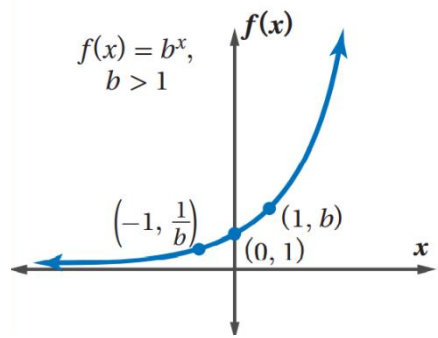
x	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	y
-2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$	9
0	$\left(\frac{1}{3}\right)^0$	1
2	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\frac{1}{9}$

تناقصية	نوعها
R	المجال
R^+	المدى
$a = 1$	المقطع y
محور x (خط أفقي)	خط التقارب

ملاحظات

- إذا كانت $b < 0$ فإن $y = ab^2$ تكون غير معرفة عند بعض القيم ، فمثلاً تكون غير معرفة عند $x = \frac{1}{2}$
- إذا كانت $b = 1$ فإن الدالة تصبح على الصورة $y = a$ وهذه هي الدالة الثابتة .
- إذا كانت $a < 0$ أي قيمة a سالبة ، فإن منحنى الدالة ينعكس حول المحور x

الدوال الرئيسية " الأهم " للدوال الأسية

الدوال الرئيسية " الأهم " لدوال الاضمحلال الأسي	الدوال الرئيسية " الأهم " لدوال النمو الأسي
صورتها	
$f(x) = b^x$, $0 < b < 1$	$f(x) = b^x$, $b > 1$
تمثيلها البياني	
 <p style="text-align: center;">$f(x) = b^x$, $0 < b < 1$</p>	 <p style="text-align: center;">$f(x) = b^x$, $b > 1$</p>
خصائص منحى الدالت	
متصل - متباين - متناقص	متصل - متباين - متزايد
المجال	
مجموعة الأعداد الحقيقية R	مجموعة الأعداد الحقيقية R
المدى	
مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+	مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+
خط التقارب	
المحور x	المحور x
مقطع المحور y	
1	1

النمو الأسي

$$A(t) = a(1 + r)^t$$

t الفترة الزمنية، a القيمة الابتدائية، r النسبة المئوية للنمو

الأساس $(1 + r)$ يسمى عامل النمو.

تستعمل عادة لتمثيل النمو السكاني.

مثال

بلغ المعدل السنوي للنمو السكاني في المملكة خلال الفترة

1431 - 1425 2% تقريباً .

إذا كان عدد سكان المملكة 22678262 نسمة عام 1425هـ.

أوجد معادلة أسية تمثل النمو السكاني للمملكة خلال هذه الفترة .

الحل :

$$y = a(1 + r)^t$$

$$y = 22678262(1 + 0.02)^t$$

الاضمحلال الأسي

$$A(t) = a(1 - r)^t$$

t الفترة الزمنية، a القيمة الابتدائية، r النسبة المئوية للاضمحلال

الأساس $(1 - r)$ يسمى عامل الاضمحلال .

وتستعمل عادة في التطبيقات المالية .

مثال

سيارة كان سعرها 80000 ريال ، ثم بدأ يتناقص بمعدل 15% كل سنة

أوجد دالة أسية تمثل سعر السيارة بعد t سنة من شرائها .

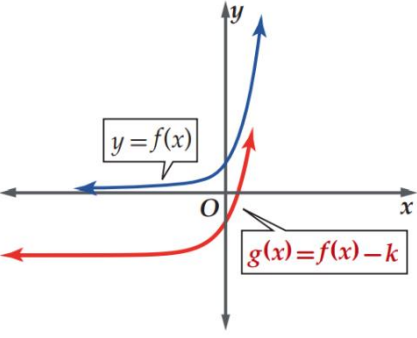
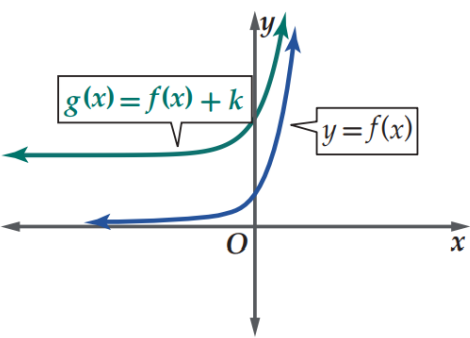
الحل :

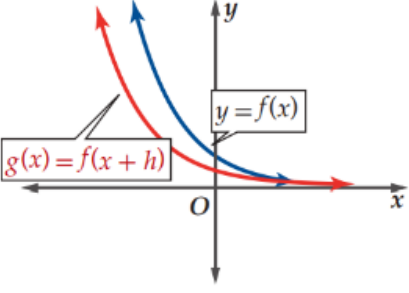
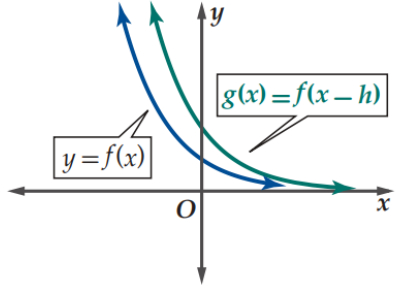
$$y = a(1 - r)^t$$

$$y = 80000(1 - 0.15)^t$$

التحويلات الهندسية للدوال الرئيسية (الأهم)

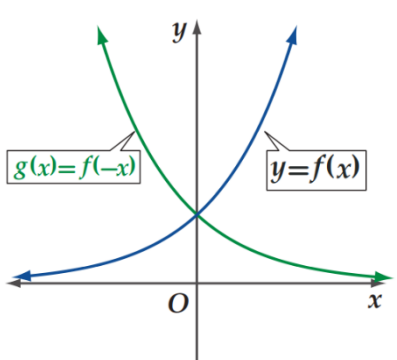
لدالتي النمو الأسي والاضمحلال الأسي

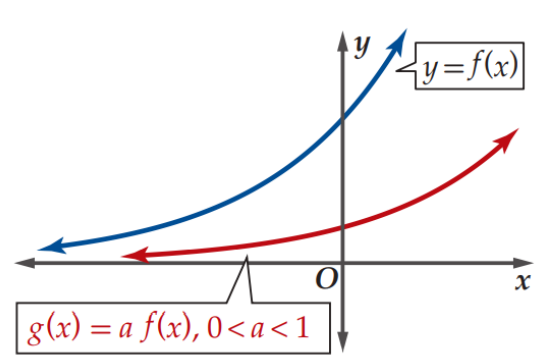
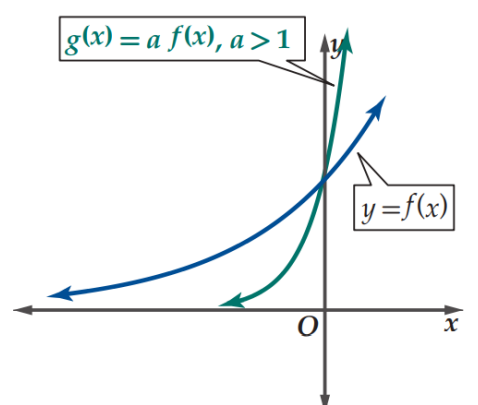
الانسحاب	
رأسي	
$g(x) = f(x) + k$	
خارج k	
(-) أسفل	(+) أعلى
$g(x) = f(x) - k$	$g(x) = f(x) + k$
	

الانسحاب	
أفقي	
$g(x) = f(x - h)$	
داخل h	
(+) يسار	(-) يمين
$g(x) = f(x + h)$	$g(x) = f(x - h)$
	

التحويلات الهندسية للدوال الرئيسية (الأهم)

لدالتي النمو الأسي والاضمحلال الأسي

الانعكاس
الانعكاس حول المحور y
$g(x) = f(-x)$


التمدد	
رأسي	
$g(x) = a \cdot f(x)$	
تضييق	توسع
$0 < a < 1$	$a > 1$
	

$$0 < b < 1$$

مثال: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$$(0, \infty), R^+$$

المدى

$$\{y | y > 0\}$$

$$b > 1$$

مثال: $y = 2^x$

$$(0, \infty), R^+$$

المدى

$$\{y | y > 0\}$$

الصورة الأصلية

$$f(x) = b^x$$

$$f(x) = ab^x$$

$$a > 0$$

إيجاد مدى الدالة
الأسية

الدالة متأثرة
بالانعكاس

الدالة متأثرة
بالانسحاب

حول محور x

$$f(x) = -f(x)$$

تغيير اتجاه إشارة التباين (<)

$$y = -2^x$$

$$\{y | y < 0\}$$

المدى

$$y = -4\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$$

$$\{y | y < 2\}$$

المدى

الانعكاس حول محور y

لا يؤثر على المدى

الانسحاب الرأسى

للأسفل (-)

لأعلى (+)

$$y = 2^{x+3} - 5$$

$$y = 2^x + 1$$

المدى

$$\{y | y > -5\}$$

$$\{y | y > 1\}$$

$$y = 3\left(\frac{1}{4}\right)^{x+3} - 1$$

$$y = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{x-5} + 3$$

المدى

$$\{y | y > -1\}$$

$$\{y | y > 3\}$$

الانسحاب الأفقى لا يؤثر على المدى

المعادلة الأسية

هي معادلة تتضمن متغيرات في موقع الأس .

خاصية المساواة للدوال الأسية

إذا كان $b > 0, b \neq 1$ ، فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$
 مثال: إذا كان $3^x = 3^5$ ، فإن $x = 5$ وإذا كان $x = 5$ ، فإن $3^x = 3^5$

حل كل معادلة مما يأتي :

$$2^x = 8^3$$

$$2^{2x} = 2^4$$

مثال

الحل :

$2^x = 8^3$

$8 = 2^3$

$2^x = (2^3)^3$

$2^x = 2^9$

$x = 9$

$2^{2x} = 2^4$

$2x = 4$

$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$

$x = 2$

الربح المركب

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt}$$

A المبلغ الكلي بعد t سنة ، P المبلغ الأصلي الذي تم استثماره أو رأس المال ، r معدل الربح السنوي المتوقع ، n عدد مرات إضافة الأرباح إلى رأس المال في السنة.

مثال

استثمر حسن مبلغ 70000 ريال متوقعاً ربحاً سنوياً نسبته 4.3% ، بحيث تضاف الأرباح إلى رأس المال كل شهر . ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 7 سنوات إلى أقرب منزلتين عشريتين ؟

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt} \quad \text{الحل :}$$

$$A = 70000 \left(1 + \frac{0.043}{12} \right)^{(12)(7)}$$

$$A \approx 94533.78$$

المتباينة الأسية هي متباينة تتضمن عبارة أسية أو أكثر ، حيث الأساس موجب.

حل المتباينات الأسية

لدالة الاضمحلال

إذا كان $0 < b < 1$ ، فإن $b^x > b^y$ ،
إذا فقط إذا كان $x < y$

مثال: إذا كان $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^5$ ، فإن $x < 5$ ،
وإذا كان $x < 5$ ، فإن $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^5$

لدالة النمو

إذا كان $b > 1$ ، فإن $b^x > b^y$ ،
إذا فقط إذا كان $x > y$

مثال: إذا كان $2^x > 2^6$ ، فإن $x > 6$ ،
وإذا كان $x > 6$ ، فإن $2^x > 2^6$

مثال

حل المتباينة :

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{3t+5} \geq \left(\frac{1}{243}\right)^{t-6}$$

$$3^2 = 9$$

$$3^5 =$$

$$243$$

الحل :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2(3t+5)} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{5(t-6)}$$

$$2(3t + 5) \leq 5(t - 6)$$

$$6t + 10 \leq 5t - 30$$

$$t \leq -40$$

حل المتباينة :

$$10^{5b+2} > 1000$$

الحل :

$$10^{5b+2} > 10^3$$

$$5b + 2 > 3$$

$$5b > 1$$

$$b > \frac{1}{5}$$

اللوغاريتم للأساس b

اللوغاريتم: هو الأس y الذي يجعل المعادلة $x = b^y$ صحيحة.
 فإذا كان b, x عددين موجبين و $b \neq 1$ تكتب على الصورة $y = \log_b x$

الصورة الأسية

الصورة اللوغاريتمية

$$x, b > 0, b \neq 1$$

$$b^y = x$$

$$\log_b x = y$$

التحويل من ...

الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية

$$125^{\frac{1}{3}} = 5$$

$$\log_{125} 5 = \frac{1}{3}$$

الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية

$$\log_4 16 = 2$$

$$4^2 = 16$$

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة ما يلي :

$$\log_3 81$$

$$\log_3 81 = y$$

$$3^y = 81$$

$$3^y = 3^4$$

$$y = 4$$

الحل :

مثال

2

$$\log_b b = 1$$

التبرير:

$$b^1 = b$$

مثال:

$$\log_{10} 10 = 1$$

1

$$\log_b 1 = 0$$

التبرير:

$$b^0 = 1$$

مثال:

$$\log_6 1 = 0$$

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

إذا كان $b \neq 1, b > 0$

x عدد حقيقي فإن:

4

$$b^{\log_b x} = x, x > 0$$

التبرير:

$$\log_b x = \log_b x$$

مثال:

$$3^{\log_3 1} = 1$$

3

$$\log_b b^x = x$$

التبرير:

$$b^x = b^x$$

مثال:

$$\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$$

ملاحظات

- لأي $b \neq 0$ فإن $b^0 = 1$
- $\log_b 0$ غير معرف لأن $b^x \neq 0$ لأي قيمة لـ x

الدالة اللوغاريتمية

هي دالة تكتب على الصورة: $f(x) = \log_b x$

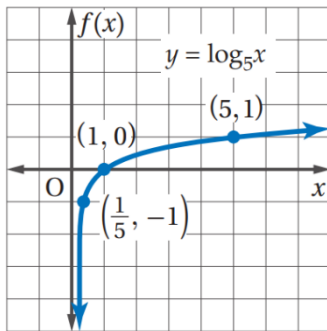
حيث $b \neq 1$ و $b > 0$ و $x > 0$

الدالة الرئيسية (الأم) للدوال اللوغاريتمية

الدوال الرئيسية " الأم "	
صورتها	
$f(x) = \log_b x$, $0 < b < 1$	$f(x) = \log_b x$, $b > 1$
تمثيلها البياني	
خصائص منحنى الدالة	
متصل - متباين - متناقص	متصل - متباين - متزايد
المجال	
مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+	مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+
المدى	
مجموعة الأعداد الحقيقية R	مجموعة الأعداد الحقيقية R
خط التقارب	
المحور y	المحور y
مقطع المحور x	
1	1

مثل الدالة $f(x) = \log_5 x$ بيانياً :

مثال



الحل :

الأساس $b = 5 > 1$

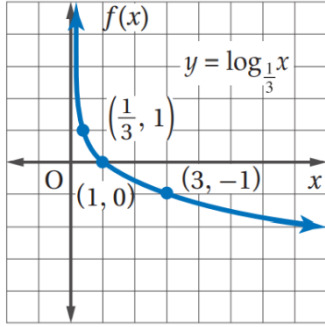
$\frac{1}{b}$	-1
1	0
b	1

المنحنى متصل ومتزايد.

$\frac{1}{5}$	-1
1	0
5	1

مثال

مثل الدالة $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ بيانياً :



الأساس $b = \frac{1}{3}$, $0 < \frac{1}{3} < 1$

الحل :

$\frac{1}{b}$	-1
1	0
b	1

3	-1
1	0
$\frac{1}{3}$	1

المنحنى متصل ومتناقص.

ملاحظة

يمكن تطبيق التحويلات الهندسية لتمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانياً تماماً كما في الدوال الأسية.

إيجاد الدوال العكسية للدوال الأسية

لا بد أن تكون الدالة متباينة .

نستبدل x بـ y والعكس .

نحول الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية ونجعل y في طرف .

مثال

أوجد الدالة العكسية للدالة $y = 0.5^x$

الحل :

$y = 0.5^x$ متباينة فإن لها دالة عكسية

$$x = 0.5^y$$

$$y = \log_{0.5} x$$

خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية

إذا كان b عدداً موجباً حيث $b \neq 1$ ، فإن $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال: إذا كان $\log_5 x = \log_5 8$ ، فإن $x = 8$ ، وإذا كان $x = 8$ فإن $\log_5 x = \log_5 8$

خصائص اللوغاريتمات

خاصية لوغاريتم القوة

لوغاريتم القوة يساوي حاصل ضرب الأس في لوغاريتم أساسها.

لأي عدد حقيقي m وأي عددين موجبين x, b حيث $b \neq 1$

$$\log_b x^m = m \log_b x$$

مثال:

استعمل $\log_3 7 \approx 1.7712$

فقرب قيمة $\log_3 49$

الحل:

$$\begin{aligned} \log_3 49 &= \log_3 (7)^2 \\ &= 2 \log_3 7 \\ &= 2 (1.7712) \\ &= 3.5424 \end{aligned}$$

خاصية القسمة في اللوغاريتمات

لوغاريتم ناتج القسمة يساوي لوغاريتم المقسوم مطروحاً منه لوغاريتم المقسوم عليه.

إذا كانت x, y, b أعداداً حقيقية موجبة حيث $b \neq 1$

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

مثال:

استعمل $\log_3 2 \approx 0.63$

لتقريب قيمة $\log_3 4.5$

الحل:

$$\begin{aligned} \log_3 4.5 &= \log_3 \left(\frac{9}{2} \right) \\ &= \log_3 9 - \log_3 2 \\ &= \log_3 3^2 - \log_3 2 \\ &= 2 - 0.63 \\ &= 1.37 \end{aligned}$$

خاصية الضرب في اللوغاريتمات

لوغاريتم حاصل الضرب هو مجموع لوغاريتمات عوامله.

إذا كانت x, y, b أعداداً حقيقية موجبة حيث $b \neq 1$

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$$

مثال:

استعمل $\log_4 2 = 0.5$

لإيجاد قيمة $\log_4 32$

الحل:

$$\begin{aligned} \log_4 32 &= \log_4 (16 \times 2) \\ &= \log_4 (4^2 \times 2) \\ &= \log_4 4^2 + \log_4 2 \\ &= 2 + 0.5 \\ &= 2.5 \end{aligned}$$

لوغاريتم المجموع أو الفرق لا يساوي مجموع أو فرق اللوغاريتمات .

ملاحظة

$$\log_a(x \pm 4) \neq \log_a x \pm \log_a 4$$

تبسيط العبارات اللوغاريتمية

دون استعمال الآلة الحاسبة ، احسب قيمة $\log_6 \sqrt[3]{36}$

مثال

الحل :

بما أن الأساس 6 نعبر عن $\sqrt[3]{36}$ على صورة قوة 6

$$\begin{aligned} \log_6 \sqrt[3]{36} &= \log_6 36^{\frac{1}{3}} \\ &= \log_6 (6^2)^{\frac{1}{3}} \\ &= \log_6 (6)^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{2}{3} \log_6 6 \\ &= \frac{2}{3} (1) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

كتابة العبارات اللوغاريتمية

الصورة المختصرة

اكتب العبارة بالصورة المختصرة :

$$= -5 \log_2 (x + 1) + 3 \log_2 (6x)$$

الحل :

$$= \log_2 (x + 1)^{-5} + \log_2 (6x)^3$$

$$= \log_2 (x + 1)^{-5} (6x)^3$$

$$\log_2 \frac{(6x)^3}{(x + 1)^5}$$

$$\log_2 \frac{216x^3}{(x + 1)^5}$$

الصورة المطولتة

اكتب العبارة بالصورة المطولتة :

$$\log_{13} 6a^3bc^4$$

الحل :

$$= \log_{13} 6 + \log_{13} a^3 + \log_{13} b + \log_{13} c^4$$

$$= \log_{13} 6 + 3 \log_{13} a + \log_{13} b + 4 \log_{13} c$$

حل المعادلات اللوغاريتمية

تحتوي على **لوغاريتم واحد** .
تحويل إلى الصيغة الأسية ثم نوجد الحل .

1

حل المعادلة $\log_9 x = \frac{3}{2}$

مثال

الحل :

$$9^{\frac{3}{2}} = x$$

$$(3)^{2(\frac{3}{2})} = x$$

$$x = 27$$

تحتوي على **لوغاريتمات في كلا الطرفين** .
تستخدم خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية للمساواة
ثم نوجد الحل مع استبعاد الحلول الدخيلة .

2

حل المعادلة $\log_2 x^3 = \log_2 8$

مثال

الحل :

$$x^3 = 8$$

$$x^3 = 2^3$$

$$x = 2$$

تحتوي على **أكثر من لوغاريتم في الطرف الواحد** .
نختصرها باستخدام خصائص اللوغاريتمات ثم تحول
إلى الصورة الأسية ونوجد الحل مع استبعاد الحلول الدخيلة .

3

حل المعادلة $2 \log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3$

مثال

الحل :

$$\log_7 x^2 = \log_7 (27)(3)$$

$$x^2 = 81$$

$$x = \pm 9$$

$x = 9$ و **نستبعد $x = -9$ لأنه لا يوجد لوغاريتم لعدد سالب** .

حل المتباينات اللوغاريتمية

1

تحتوي على لوغاريتم واحد .
 إذا كان $x > 0, b > 1$ و $\log_b x > y$ فإن $x > b^y$

عند حل متباينة
 لوغاريتمية **يستثنى**
 قيم المتغير التي
 لا يكون اللوغاريتم
 عندها معرفاً

مثال

أوجد مجموعة حل المتباينة $\log_4 x \geq 3$

الحل :

$$x \geq 4^3$$

$$x \geq 64$$

مجموعة الحل :

$$\{x \mid x \geq 64, x \in R\}$$

2

تحتوي على لوغاريتمات في كلا الطرفين .
 إذا كان $b > 1$ ، فإن $\log_b x > \log_b y$ ، فإن $x > y$ إذا فقط إذا كان $x > y$

مثال

أوجد مجموعة حل المتباينة $\log_8(2x) > \log_8(6x - 8)$

الحل :

3

مجموعة الحل :

$$\left\{ x \mid \frac{4}{3} < x < 2, x \in R \right\}$$

2

لتحديد الفترة كاملة

- $2x \leq 0$ •
- $x \leq 0$
- $6x - 8 \leq 0$ •
- $6x \leq 8$
- $x \leq \frac{4}{3}$

1

$$2x > 6x - 8$$

$$-4x > -8$$

$$\frac{-4x}{-4} < \frac{-8}{-4}$$

$$x < 2$$

اللوغاريتمات العشرية

هو لوغاريتمه أساسه 10

تكتب دون كتابة الأساس 10

$$\log_{10} x = \log x, \quad x > 0$$

إيجاد قيمة اللوغاريتم العشري

تحتوي معظم الحاسبات العلمية $\log x$ كونه أمراً أساسياً

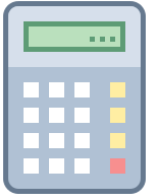
ويستعمل المفتاح **LOG** لإيجاد قيمته.

استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة ما يأتي مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة آلاف .

$$\log 7$$

مثال

الحل :



اضغط على المفاتيح : **LOG** 7 **ENTER** =

$$\log 7 \approx 0.8451$$

خصائص اللوغاريتمات العشرية

$$\log x = y$$

$$10^y = x$$

1

$$\log 1 = 0$$

$$10^0 = 1$$

2

$$\log 10 = 1$$

$$10^1 = 10$$

3

$$\log 10^m = m$$

$$10^m = 10^m$$

4

حل معادلات أسية باستعمال اللوغاريتم العشري

إذا كان من الصعب كتابة طرفي المعادلة الأسية بدلالة الأساس نفسه ، فإنه يمكنك حلها بأخذ اللوغاريتم العشري لكلا الطرفين .

حل المعادلة $3^x = 15$ وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف .

مثال

$$3^x = 15 \quad \text{الحل :}$$

$$\log 3^x = \log 15$$

$$x \log 3 = \log 15$$

$$x = \frac{\log 15}{\log 3}$$

$$x \approx 2.4650$$

حل متباينات أسية باستعمال اللوغاريتم العشري

يمكن استعمال استراتيجيات حل المعادلات الأسية لحل متباينات أسية .

أوجد مجموعة حل المتباينة $3^{2x} \geq 6^{x+1}$ وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف .

مثال

الحل :

$$\log 3^{2x} \geq \log 6^{x+1}$$

$$2x \log 3 \geq (x + 1) \log 6$$

$$2x \log 3 \geq x \log 6 + \log 6$$

$$2x \log 3 - x \log 6 \geq \log 6$$

$$x(2 \log 3 - \log 6) \geq \log 6$$

هنا المقدار موجب لذا تبقى إشارة التباين كما هي .

$$x \geq \frac{\log 6}{2 \log 3 - \log 6}$$

$$\{x | x \geq 4.4190, x \in R\}$$

عند الضرب أو القسمة على عدد سالب يتغير اتجاه إشارة التباين . لذا لا بد قبل القسمة على المقدار $2 \log 3 - \log 6$ معرفة إذا كان موجباً أم سالباً .

صيغة تغيير الأساس

هي **صيغة** تستخدم لكتابة عبارات لوغاريتمية مكافئة لأخرى بأساس مختلف .

لأي أعداد موجبة a, b, n ، حيث $a \neq 1$ ، $b \neq 1$

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

لوغاريتم العدد الأصلي للأساس b ←
 لوغاريتم الأساس القديم للأساس b ←

مثال :

$$\log_3 11 = \frac{\log_5 11}{\log_5 3}$$

اكتب $\log_6 8$ بدلالة اللوغاريتم العشري ، ثم أوجد

قيمه مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة آلاف .

مثال

الحل :

$$\log_6 8 = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 6} = \frac{\log 8}{\log 6}$$

$$\approx 1.1606$$