تم تحميل وعرض المادة من منصة

حقيبتي

www.haqibati.net

منصة حقيبتي التعليمية

منصة حقيبتي هو موقع تعليمي يعمل على تسهيل العملية التعليمية بطريقة بسيطة وسهلة وتوفير كل ما يحتاجه المعلم والطالب لكافة الصفوف الدراسية كما يحتوي الموقع على حلول جميع المواد مع الشروح المتنوعة للمعلمين.

الفصل الأول

الدوال والمتباينات

1-1 خصائص الأعداد الحقيقية

الأعداد الحقيقية R : تتضمن الاعداد الحقيقية مجموعات مختلفة من الاعداد منها :

المجموعة	التعريف + مثال
الأعداد غير النسبية (I)	هي أعداد لايمكن كتابتها على صورة كسر اعتيادي أو هي اعداد تكتب بصورة كسور عشرية ليست منتهية وليست دورية مثال : الجذور التربيعية للأعداد التي ليست مربعات كاملة، π ، $-\sqrt{7}$
الأعداد النسبية (Q)	هي جميع الكسور الاعتيادية التي تكتب على صيغة $\frac{a}{b}, b \neq 0$ أو الكسور العشرية (المنتهية أو الدورية) سواء كانت موجبة أو سالبة . مثال: $\frac{2}{7}, -\frac{3}{5}, 0.452, -0.\overline{3}$
الأعداد الصحيحة (Z)	هي جميع الأعداد التي تكون بدون فواصل عشرية (موجبة أو سالبة) بالإضافة الى الصفر ، مثال: $14, -\sqrt{25}, -3$
الأعداد الكلية (W)	هي الأعداد الطبيعية بالإضافة الى الصفر، مثال $0, 6, 9$
الأعداد الطبيعية (N)	هي جميع الأعداد (الموجبة) التي تكون بدون فواصل عشرية ، مثال: $\sqrt{64}, 14$

خصائص الأعداد الحقيقية R : لاي أعداد حقيقية a, b, c فإن :

الخاصية	الجمع		الضرب	
التبديلية	$a+b=b+a$ $5+7=7+5$		$a.b=b.a$ $2.3=3.2$	
التجميعية	$(a+b)+c=a+(b+c)$ $(7+5)+1=7+(5+1)$		$(a.b).c=a.(b.c)$ $(9.3).2=9.(3.2)$	
العنصر المحايد	$0+a=a$ $0+3=3$	$a+0=a$ $4+0=4$	$1.a=a$ $1.8=8$	$a.1=a$ $2.1=2$
النظير	$(-a)+a=0$ $(-2)+2=0$	$a+(-a)=0$ $3+(-3)=0$	$a.\frac{1}{a}=1 \Rightarrow 5.\frac{1}{5}=1$	$\frac{1}{a}.a=1 \Rightarrow \frac{1}{7}.7=1$
الانغلاق	$(a+b) \Rightarrow (2+6) \in R$		$(a.b) \Rightarrow (8.9) \in R$	
التوزيع	من اليمين $(a+b).c = ac+bc$		من اليسار $c(a+b)=ca+cb$	

النظير الجمعي والنظير الضربي

العدد	النظير الجمعي(عكس إشارة العدد)	النظير الضربي (مقلوب العدد)
$\sqrt{17}$	$-\sqrt{17}$	$\frac{1}{\sqrt{17}}$
$\frac{-2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{-9}{2}$

تبسيط العبارات الجذرية : فيها نستخدم خاصية التوزيع والتجميع

مثال : بسط العبارة الأتية $5(3x+6y)+4(2x-9y)$	
$5(3x)+5(6y)+4(2x)+4(-9y)$	خاصية التوزيع
$15x+30y+8x-36y$	التبسيط
$(15+8)x+(30-36)y=23x-6y$	خاصية التجميع/ التبسيط

1-2 العلاقات والدوال

العلاقة

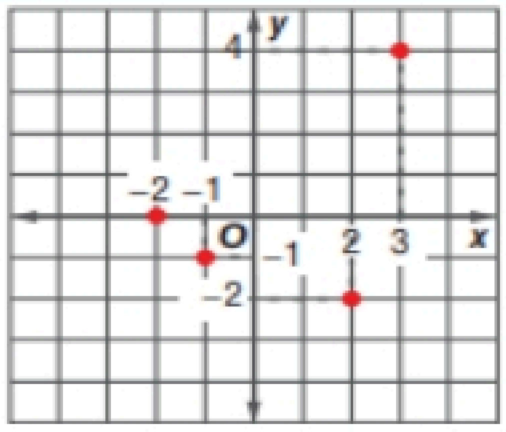
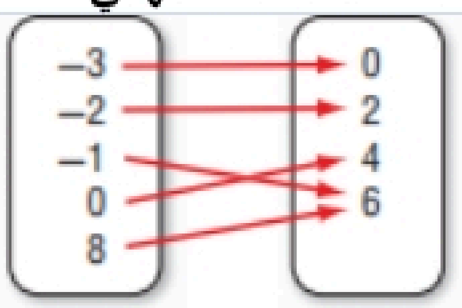
هي مجموعة من الأزواج المرتبة (x,y) ولها 3 حالات هي :

الحالة	مثال
العلاقة	$\{(2,3),(2,7)\}$
الدالة	$\{(-1,5),(4,5),(0,7)\}$
الدالة المتباينة	$\{(2,5),(4,3),(1,6)\}$
ملاحظة : كل دالة هي علاقة وليس كل علاقة دالة	

مجموعة قيم x تسمى مجال

مجموعة قيم y تسمى مدى

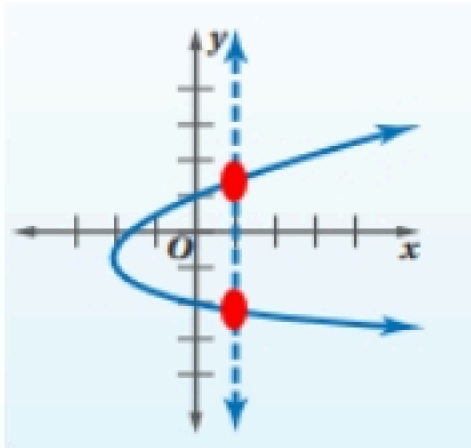
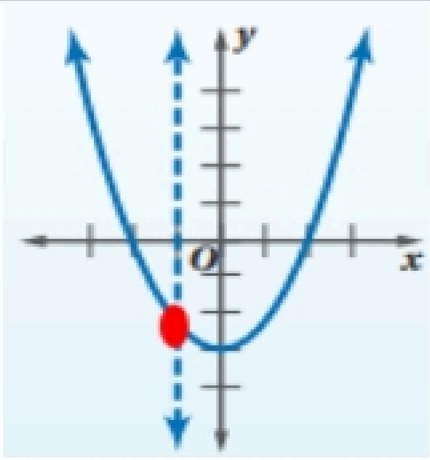
طرق وصف العلاقة

<table>
<tr><th>التمثيل البياني</th><th>المخطط السهمي</th><th>جداول</th><th>أزواج مرتبة</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>

بداية السهم تكون x (مجال)
نهاية السهم تكون y (مدى)</td>
<td><table>
<tr><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td>-4</td><td>-5</td></tr>
<tr><td>-2</td><td>-4</td></tr>
<tr><td>0</td><td>-3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>-2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>-1</td></tr>
</table></td>
<td>$\{(3,-4),(-1,0),(5,0)\}$</td>
</tr>
</table>

اختبار الخط الرأسي

لاي تمثيل بياني يمكن عمل اختبار الخط الرأسي لمعرفة فيما كان التمثيل يعبر عن علاقة أو دالة .

علاقة : إذا قطع الخط الراسي التمثيل البياني في أكثر من نقطة	دالة : إذا قطع الخط الرأسي التمثيل البياني في نقطة واحدة فقط
	

تمثيل العلاقة

لتمثيل أي معادلة نكون جدول لبعض قيم x التي تحقق المعادلة .

إيجاد قيمة دالة

نستعمل الرمز $f(x)$ بدلا من y	يسمى x المتغير المستقل	يسمى y المتغير التابع

مثال : إذا كان $f(x) = 3x^2 + 1$ فأوجد كلا مما يلي :

$f(7)$	$f(7) = 3(7^2) + 1 \Rightarrow 3(49) + 1 \Rightarrow 148$
$f(5a)$	$f(5a) = 3((5a)^2) + 1 \Rightarrow 3(5^2).(a^2) + 1$ $3(25).a^2 + 1 \Rightarrow 75a^2 + 1$

1-3 دوال خاصة

(دالة متعددة التعريف ، دالة أكبر عدد صحيح ، دالة القيمة المطلقة)

1.دالة متعددة التعريف

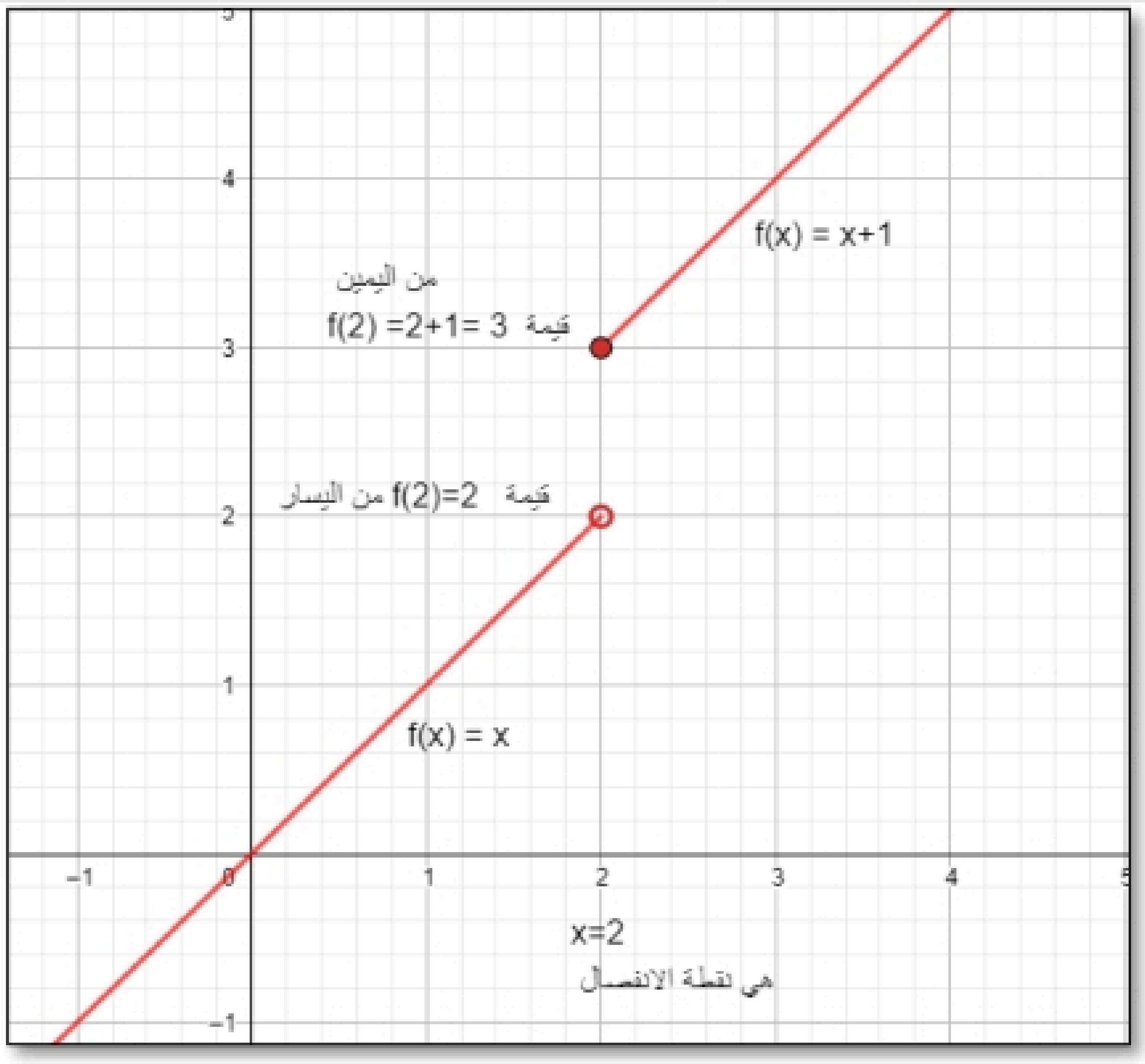
هي دالة لها تعريفين أو أكثر ولكل تعريف شرط خاص به

$f(x) = \begin{cases} \text{تعريف}1 & \text{شرط}1, \\ \text{تعريف}2 & \text{شرط}2, \end{cases}$	خطوات التمثيل : 1. نكون جدول 2. نعوض النقطة التي يتغير عندها تعريف الدالة عند كل تعريف فيصبح لدينا زوج مرتب 3. نختار قيمة لـ x تحقق الشرط في كل تعريف و يصبح لدينا زوج مرتب آخر

مثال : مثل بيانيا

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x < 2 \\ x+1 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

$f(x) = x + 1$		$f(x) = x$	
نعوض النقطة التي يتغير عندها تعريف الدالة $(x = 2)$			
$f(2) = 2 + 1 = 3$ فالزوج المرتب هو $(2,3)$		$f(2) = 2$ فالزوج المرتب هو $(2,2)$	
نعوض قيمة لـ x تحقق الشرط			
$x \geq 2$	$f(x) = x + 1$	$x < 2$	$f(x) = x$
نختار $x = 3$ مثلا $f(3) = 3 + 1 = 4$ فالزوج المرتب هو $(3,4)$		نختار $x = 0$ مثلا $f(0) = 0$ فالزوج المرتب هو $(0,0)$	
الأزواج المرتبة التي تمثيل المستقيم2 ، هي : $(2,3)$و$(3,4)$		الأزواج المرتبة التي تمثيل المستقيم1 ، هي : $(2,2)$ و $(0,0)$	



2. الدالة الدرجية ومن أمثلتها
دالة أكبر عدد صحيح

الدالة الرئيسية الام لها $f(x)=[x]$ مجالها R ومداها Z

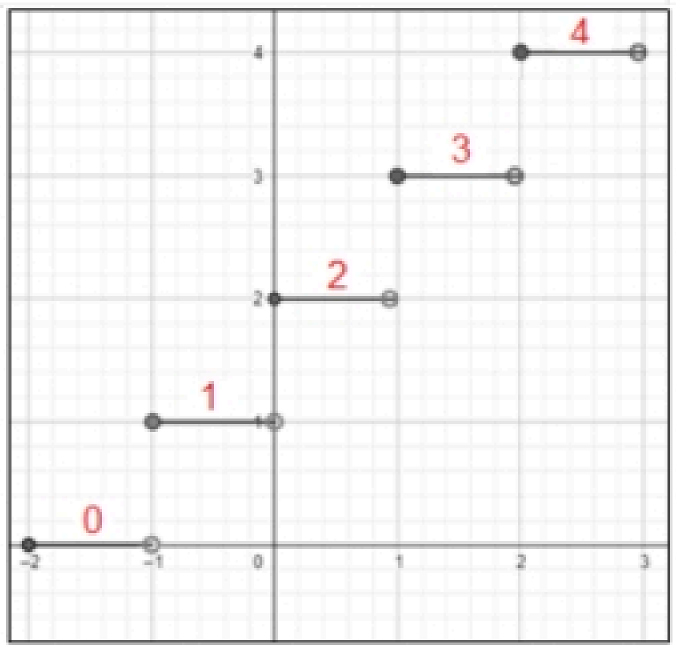
عند تمثيلها نعيد كتابة التعريف
ونكتفي ب 4 قيم لـ $\boldsymbol{f(x)}$ و بـ 4 فترات لـ $\boldsymbol{x}$
ملاحظة : شكل التمثيل البياني قطع مستقيمة
طول الدرجة = $\left|\frac{1}{\text{معامل } x}\right|$

$$f(x)=\begin{cases}-1 & -1\le x<0\\ 0 & 0\le x<1\\ 1 & 1\le x<2\\ 2 & 2\le x<3\end{cases}$$

مثال: $\boldsymbol{f(x)=[x]+2}$
طول الدرجة =$\boldsymbol{1}$

$$f(x)=\begin{cases}-1+2=\boxed{1} & -1\le x<0\\ 0+2=\boxed{2} & 0\le x<1\\ 1+2=\boxed{3} & 1\le x<2\\ 2+2=\boxed{4} & 2\le x<3\end{cases}$$

تمثل على محور y على شكل قطعة مستقيمة — تحدد على محور x



3.دالة القيمة المطلقة

الدالة الرئيسية الام لها $f(x)=|x|$ مجالها R ومداها R^+

عند تمثيلها نعيد كتابتها من خلال تكوين جدول
ملاحظة : شكل التمثيل البياني V

خطوات التمثيل :

1. إيجاد صفر ما داخل المقياس	
2. نختار قيمتين لـ $\boldsymbol{x}$:	قيمة أكبر من صفر ماداخل المقياس
	قيمة أصغر من صفر ما داخل المقياس

مثال : مثل بيانيا : $\boldsymbol{y=|x+3|}$

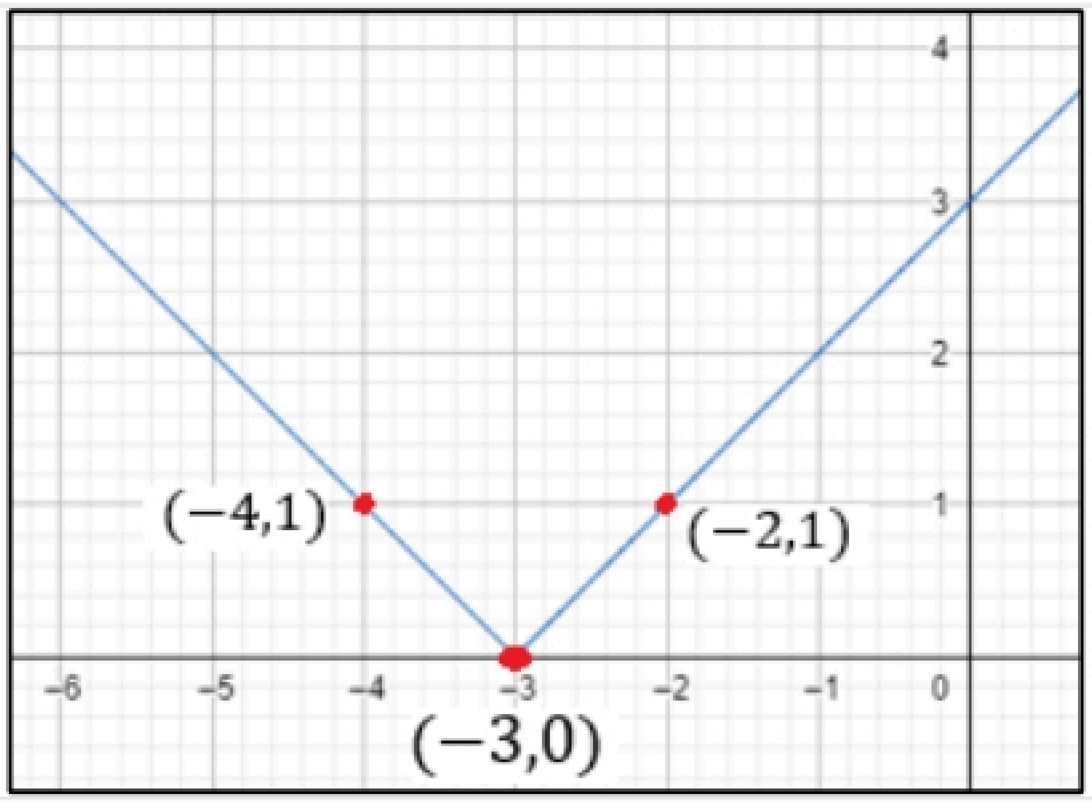
إيجاد صفر ما داخل المقياس

$$\boldsymbol{x+3=0}$$
$$\boldsymbol{\Longrightarrow x=-3}$$

فالزوج المرتب هو
$\boldsymbol{(-3,0)}$

نفرض قيمتين لـ x
قيمة أكبر من صفر الدالة وقيمة أصغر من صفر الدالة

x	$y=\lvert x+3\rvert$	الأزواج المرتبة
-2	$f(-2)=\lvert -2+3\rvert=\lvert 1\rvert=1$	$(-2,1)$
-4	$f(-4)=\lvert -4+3\rvert=\lvert -1\rvert=1$	$(-4,1)$



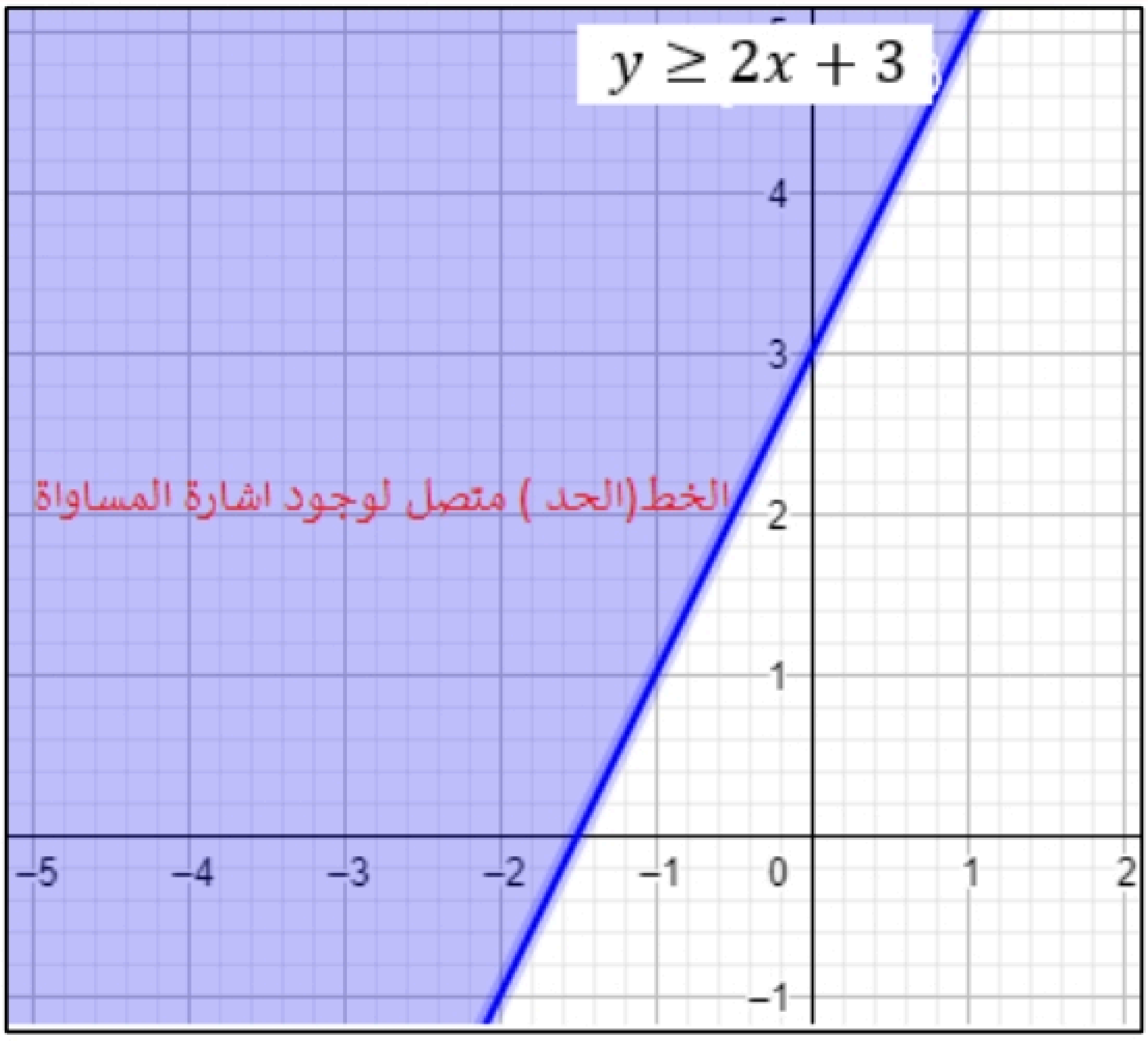
خطوات تمثيل المتباينة بيانيا

1. تحويل المتباينة الى معادلة .	
2. نختار قيمتين لـ x لإيجاد زوجين مرتبين لتمثيل حد المتباينة	
3. نرسم حد المتباينة	متصل إذا كان لدينا احدى العلامتين $\geq , \leq$
	منفصل إذا كان لدينا احدى العلامتين $> , <$

4. نختار زوج مرتب ونعوضه في المتباينة :
- إذا كانت النتيجة النهائية للمتباينة صحيحة نظلل المنطقة التي تحوي الزوج المرتب.
- إذا كانت النتيجة النهائية للمتباينة خاطئة نظلل المنطقة التي لا تحوي الزوج المرتب.

مثل بيانيا : $y \geq 2x + 3$

نحول المتباينة الى معادلة	نفرض قيمتين لـ x			منطقة الحل (التظليل)
	الأزواج المرتبة	$y = 2x + 3$	x	نختار زوج مرتب $(1,1)$ نعوضه في المتباينه
الحد متصل لوجود المساواة $y = 2x + 3$	$(0,3)$	$y = 2(0) + 3 = 3$	0	$y \geq 2x + 3$ $1 \geq 2(1) + 3$ $1 \geq 5$
	$(1,5)$	$y = 2(1) + 3 = 5$	1	خاطئة ؛ أي نظلل المنطقة التي لا تحوي الزوج المرتب $(1,1)$



خطوات تمثيل متباينة القيمة المطلقة

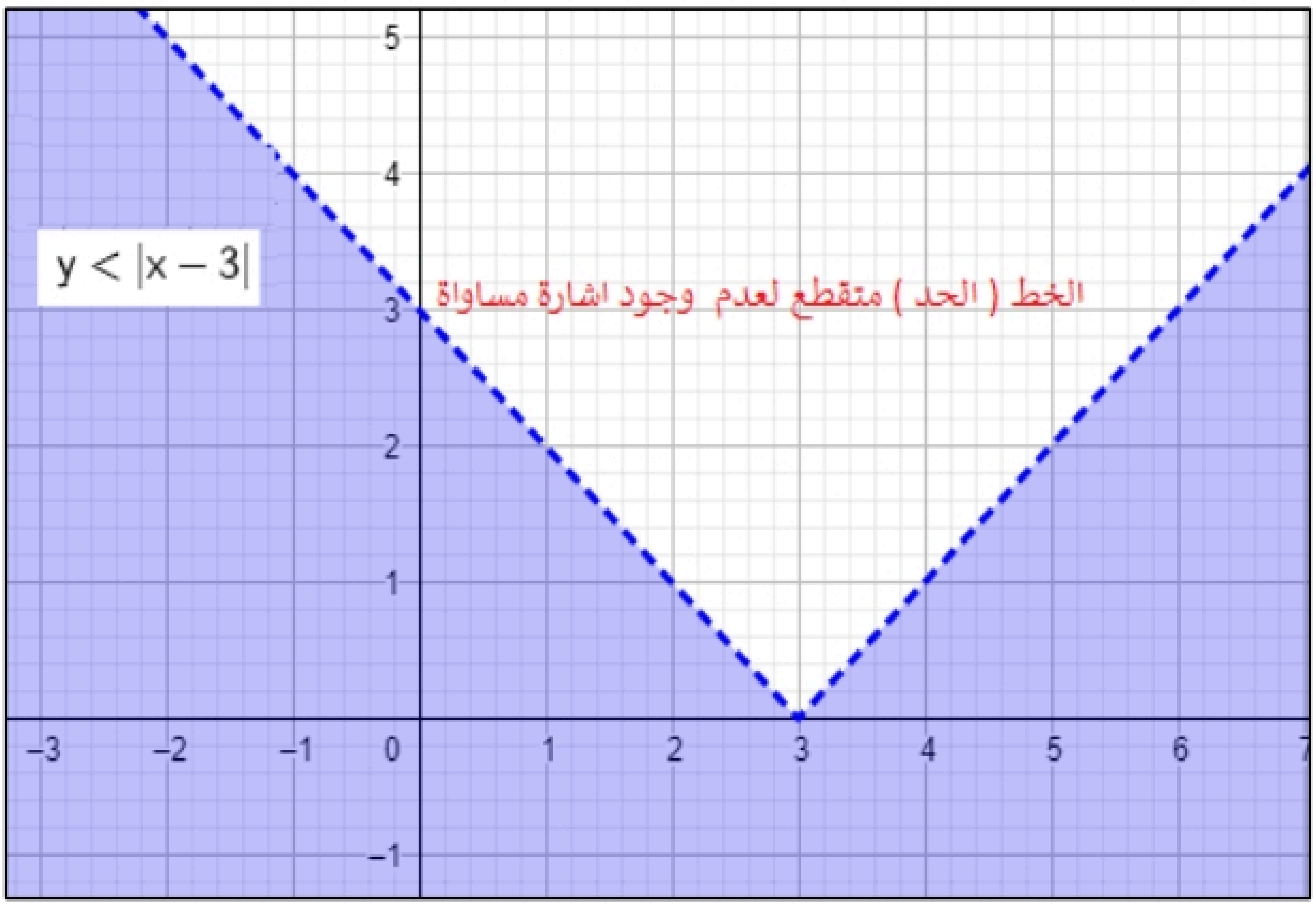
1. تحويل المتباينة الى معادلة .
2. إيجاد صفر ما داخل المقياس
نختار قيمتين لـ x قيمة أكبر من صفر ما داخل المقياس وقيمة أصغر منه .

3. نرسم حد المتباينة	متصل إذا كان لدينا احدى العلامتين $\leq , \geq$
	منفصل إذا كان لدينا احدى العلامتين $< , >$

4. نختار زوج مرتب داخل V أو خارجها ونعوضه في المتباينة :
- إذا كانت النتيجة النهائية للمتباينة صحيحة نظلل المنطقة التي تحوي الزوج المرتب.
- إذا كانت النتيجة النهائية للمتباينة خاطئة نظلل المنطقة التي لا تحوي الزوج المرتب.

مثل بيانيا : $\boldsymbol{y < |x-3|}$

نحول المتباينة الى معادلة	نفرض قيمتين لـ x قيمة أكبر من صفر الدالة وقيمة أصغر من صفر الدالة			منطقة الحل (التظليل)
الحد متقطع لعدم وجود المساواة $\boldsymbol{y = |x-3|}$ نجد صفرما داخل المقياس $\boldsymbol{x - 3 = 0}$ $\boldsymbol{x = 3}$ فالزوج المرتب $\boldsymbol{(3, 0)}$	الأزواج المرتبة	$y = |x-3|$	x	نختار زوج مرتب $(1,1)$ نعوضه في المتباينه $y < |x-3|$ $1 < |1-3|$ $1 \leq |-2|$ $1 < 2$ صحيحة ؛ أي نظلل المنطقة التي تحوي الزوج المرتب $(1,1)$
	$(1,2)$	$y = |1-3|$ $= |-2| = 2$	1	
	$(5,2)$	$y = |5-3|$ $= |2| = 2$	5	

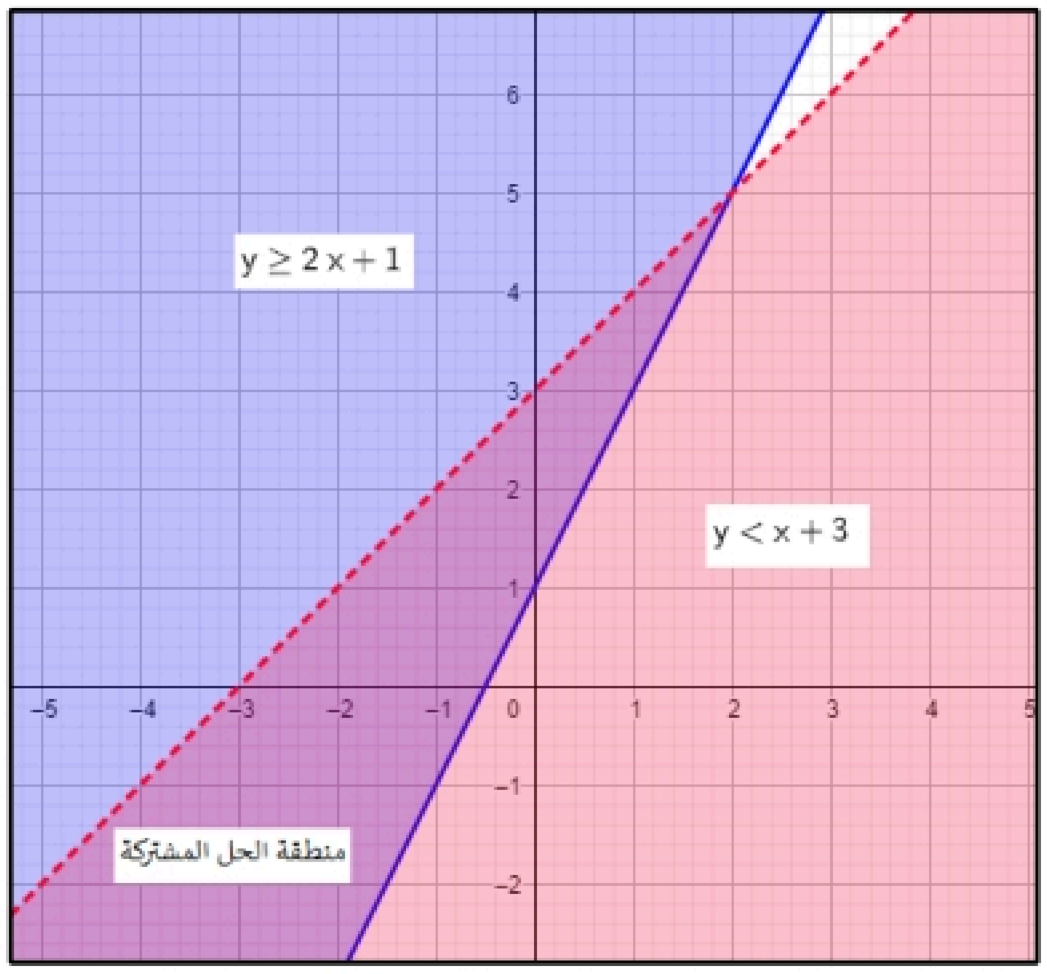


1-5حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيا

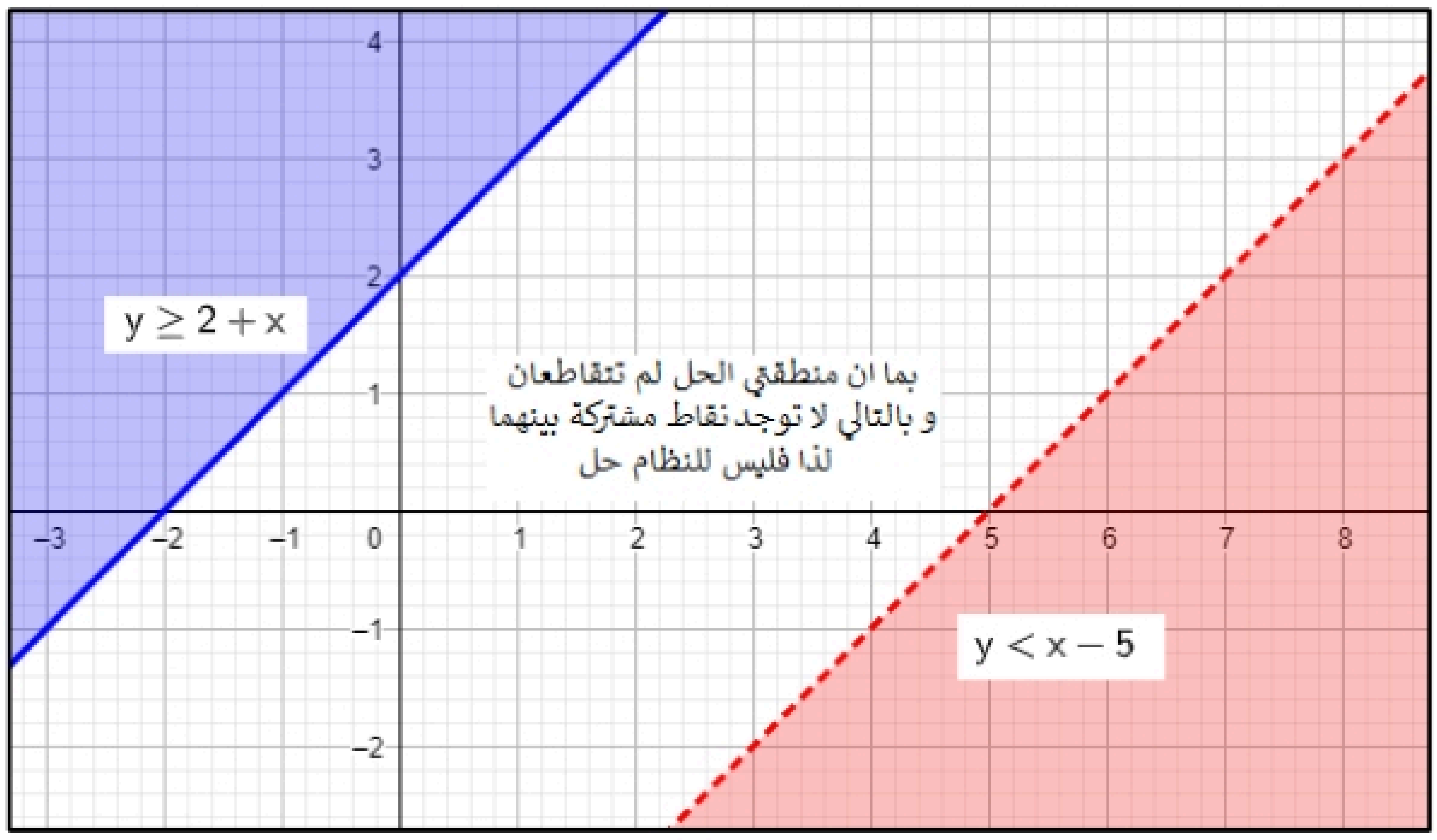
عند تمثيل نظام من متباينتين نرسم كل متباينة لوحدها في النهاية نظلل منطقة الحل

مناطق الحل
(لنظام من متباينتين)

1. منطقة حل المشتركة
(التي ظللت مرتين)

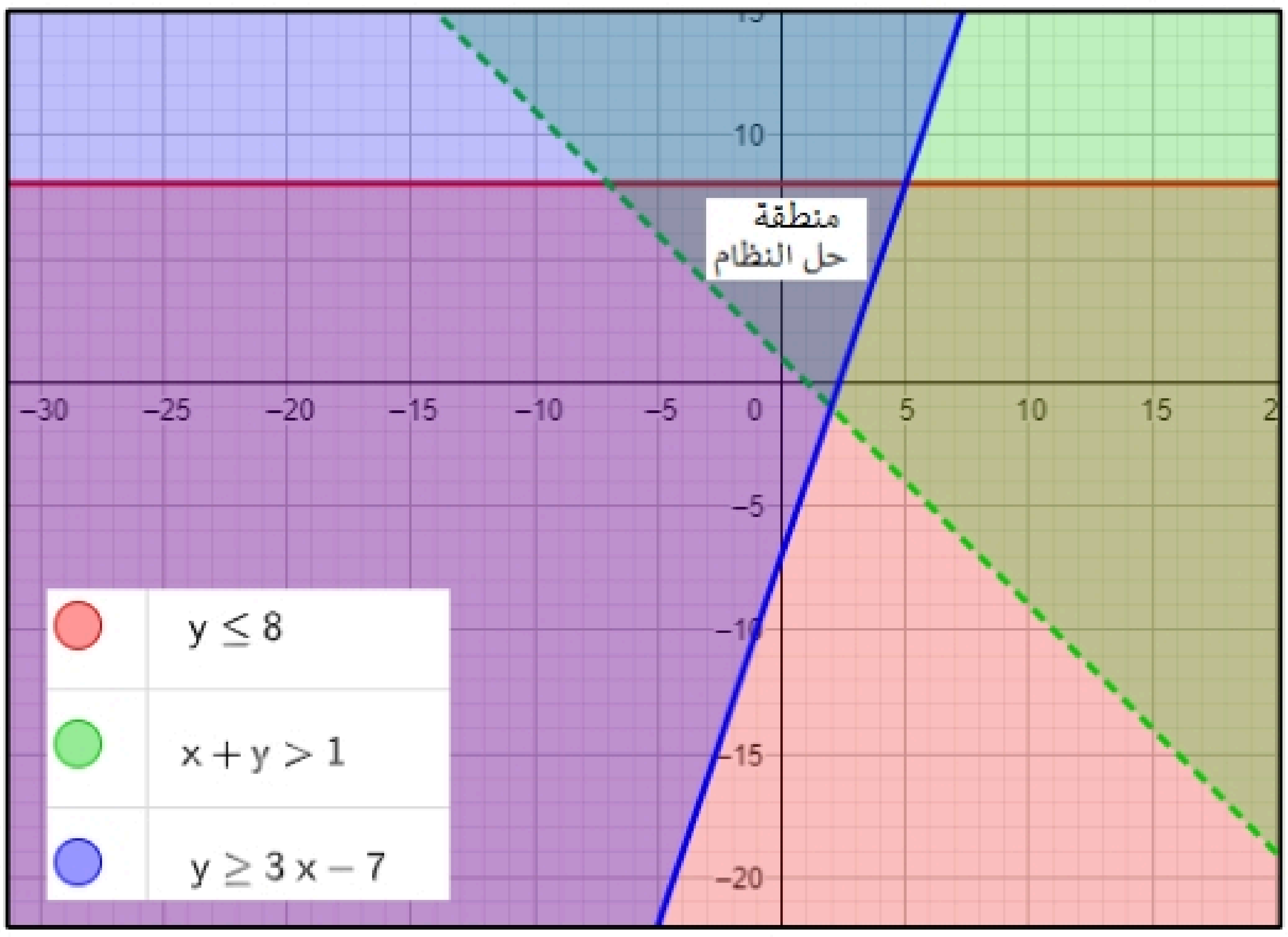


2. لا يكون هناك منطقة حل مشتركة أي انه لا يوجد حل لنظام المتباينتين



عند تمثيل 3 متباينات

- قد يتكون لدينا مناطق حل مغلقة (مثلث مثلا)
- وقد تكون منطقة الحل المشتركة مفتوحة

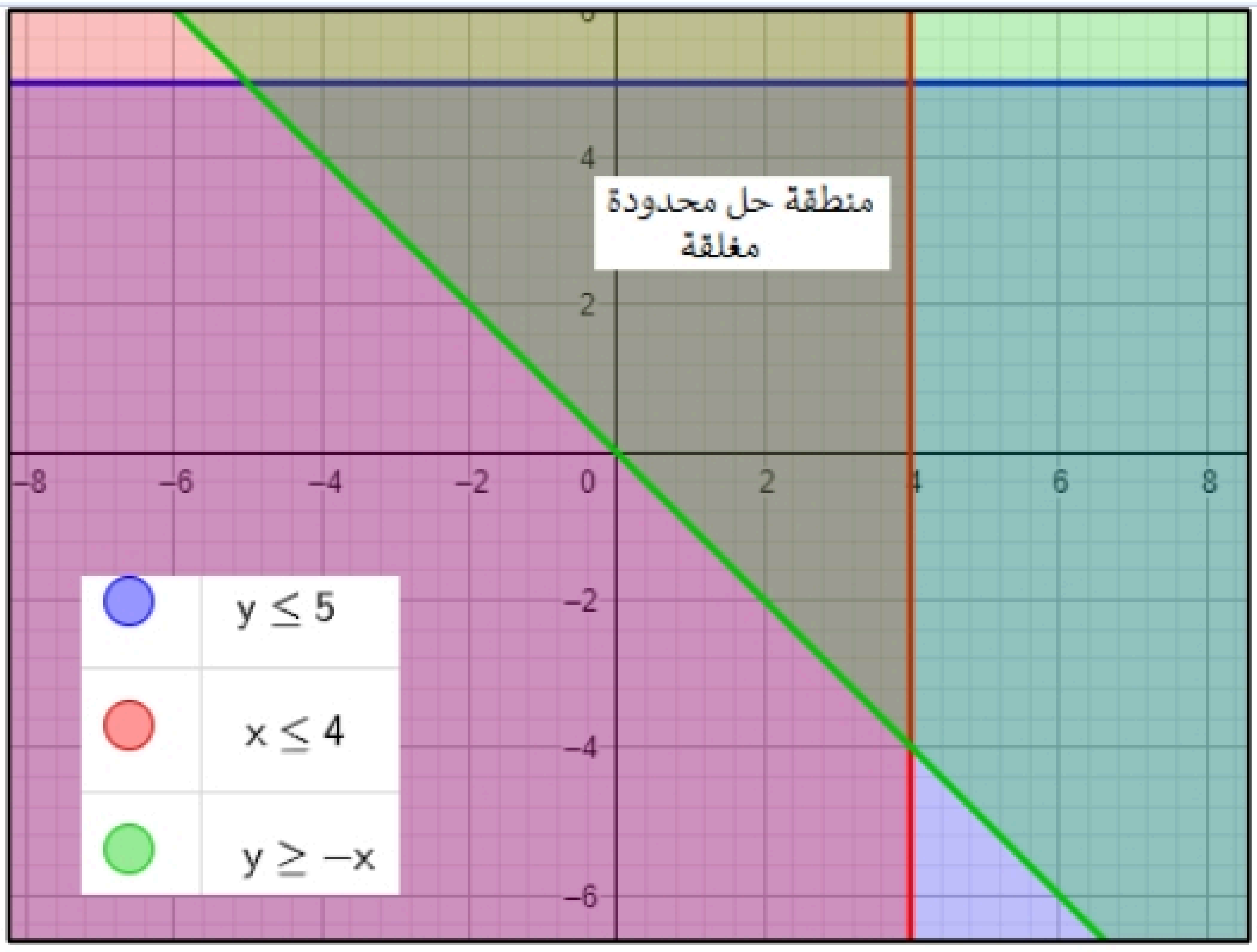


1-6 البرمجة الخطية والحل الأمثل

مناطق الحل

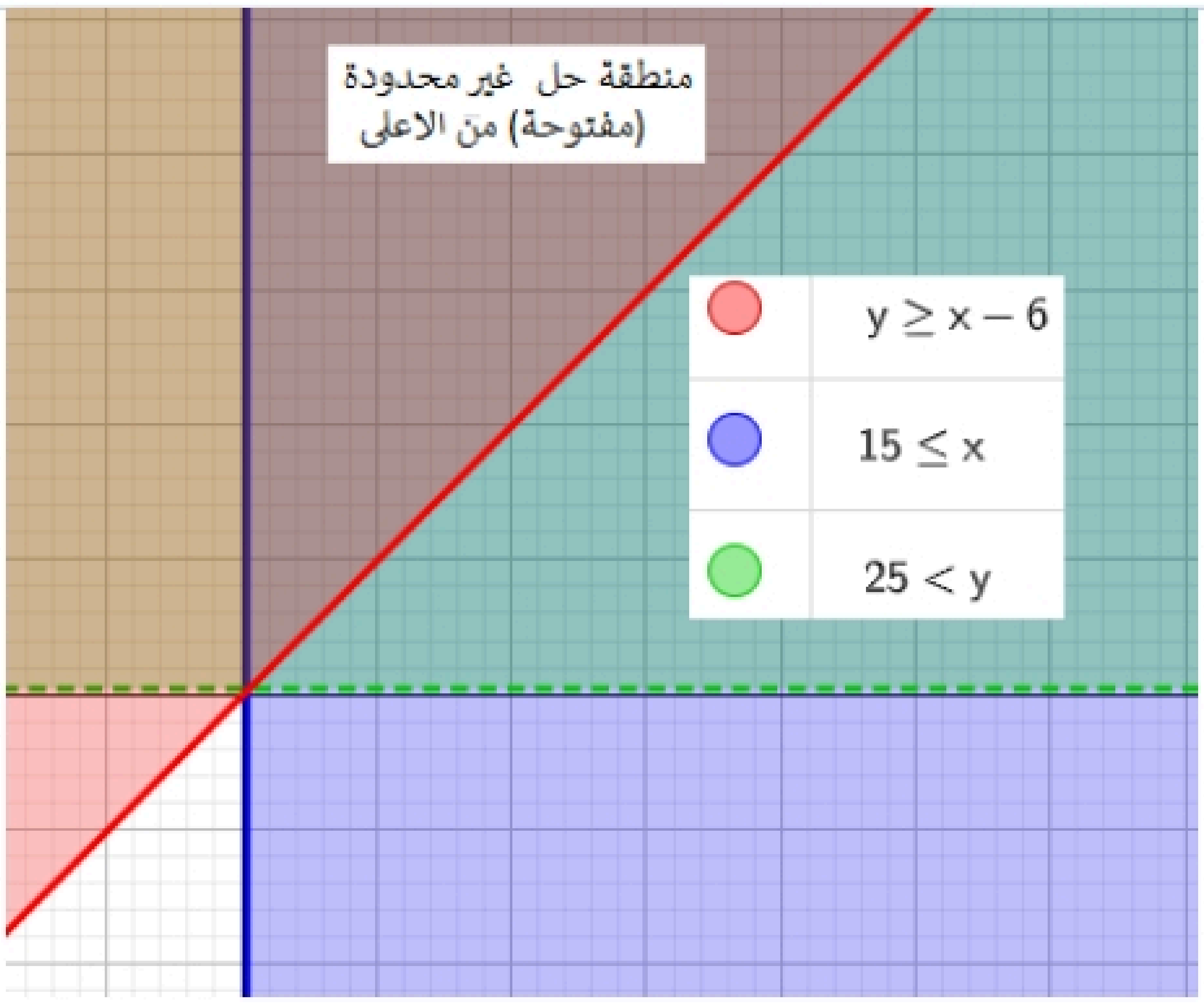
1. محدودة (مغلقة)
محصورة بقيود

يوجد قيمة عظمى وقيمة صغرى للدالة تظهر دائما عند رؤوس منطقة الحل

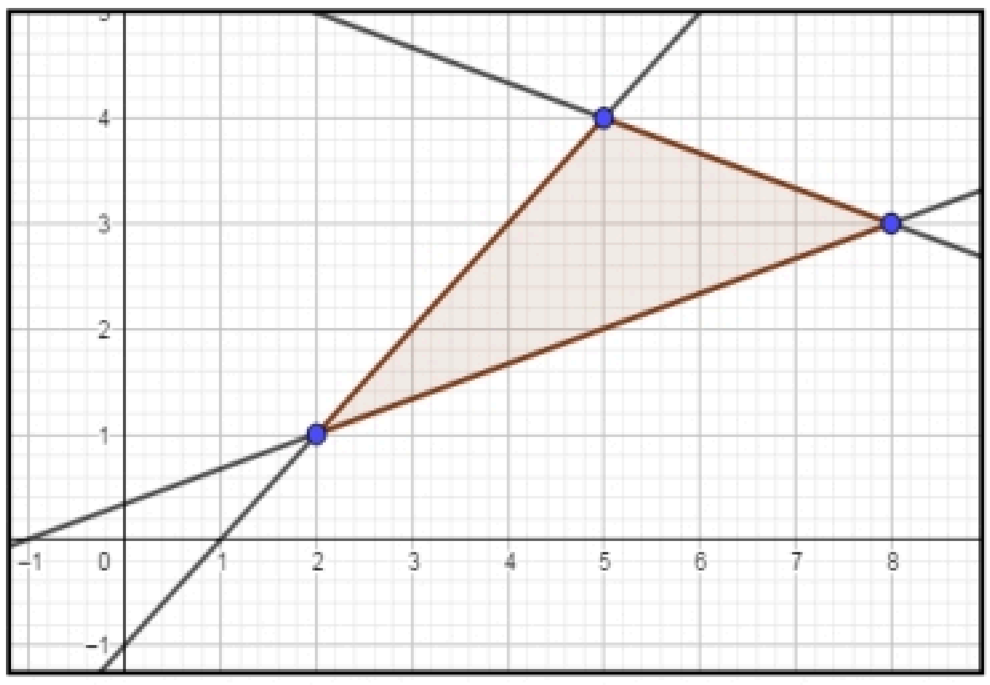


2.غير محددة
(مفتوحة و ممتدة من أحد الأطرف)

ويمكن أن تحتوي الدالة على قيمة عظمى أو قيمة صغرى



مثال : استعمل التمثيل المجاور لتحديد إحداثيات رؤوس منطقة الحل و اوجدي القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة $f(x,y) = x + y$.



(x,y)	$f(x,y) = x + y$
$(5,4)$	$f(5,4) = 5 + 4 = 9$
$(2,1)$	$f(2,1) = 2 + 1 = 3$
$(8,3)$	$f(8,3) = 8 + 3 = 11$

القيمة الصغرى هي 3 ، القيمة العظمى هي 11

الفصل الثاني

المصفوفات

2-1 مقدمة في المصفوفات

المصفوفة

هي ترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات او أعداد في صفوف أفقية او أعمدة راسية، محصورة بين قوسين

رتبة المصفوفة

تتحدد رتبة المصفوفة بدلالة بعديها ، فمثلا المصفوفة التي تتكون m صفا و n عموديا تكون من الرتبة $m \times n$.

مثال :

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{عمودين}} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}}\right\} \text{3 صفوف}$$

بما أن A فيها 3 صفوف و عمودين ، فان رتبتها 3×2 قيمة العنصر a_{32} في المصفوفة A يساوي 2 .

يدل الرمز a_{32} على العنصر الواقع في الصف الثالث والعمود الثاني من المصفوفة A

أسماء خاصة لبعض المصفوفات

مصفوفة الصف	مصفوفة العمود	المصفوفة المربعة	المصفوفة الصفرية
$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
تحوي صفا واحدا	تحوي عمودا واحدا	عدد الصفوف = عدد الأعمدة	جميع عناصرها أصفار

المصفوفتــــان المتساويتـــان

هما مصفوفتان لهما الرتبة نفسها وكل عنصر في إحداهما يساوي العنصر المناظر له في الاخرى .

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ فإن $A = B$

2-2 العمليات على المصفوفات

جمع المصفوفات وطرحها

يمكن جمع مصفوفتين او طرحهما إذا وفقط اذا كان لهما نفس الرتبة.

مثال1 :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$$

بما أن المصفوفتان من الرتبة نفسها $m \times n$ يمكن إجراء الجمع و الطرح عليهما .

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B - A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -7 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -10 & -7 \end{bmatrix}$$

ضرب المصفوفة في عدد ثابت

حاصل ضرب مصفوفة A من الرتبة $m \times n$

في عدد ثابت k هي مصفوفة من الرتبة $m \times n$

(ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في ذلك العدد الثابت)

مثال2 :

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2C = 2.\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}$$

خصائص جمع المصفوفات

الخاصية التجميعية لجمع المصفوفات

$$(\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C} = \underline{A} + (\underline{B} + \underline{C})$$

الخاصية الإبدالية لجمع المصفوفات

$$\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}$$

خاصية التوزيع للضرب في عدد

$$K(\underline{A} + \underline{B}) = K\underline{A} + K\underline{B}$$

2-3 ضرب المصفوفات

ضرب المصفوفات

$$\underset{m\times r}{A}\ \cdot\ \underset{r\times t}{B} = \underset{m\times t}{AB}$$

متساويان

AB

لضرب مصفوفتين لابد من تحقق شرط الضرب هو
عدد اعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية،
اما غير ذلك فانه غير معرف.

مثال1 : هل يمكن اجراء عملية الضرب على $A_{4\times 2} \cdot B_{2\times 3}$

نعم يمكن الضرب لان أعمدة المصفوفة الأولى = صفوف المصفوفة الثانية

وبذلك توجد قاعدة لعملية ضرب المصفوفات وهي

اضرب عناصر الصف الاول في المصفوفة الاولى في عناصر العمود الاول في المصفوفة الثانية . ثم اجمع نواتج الضرب وضع العنصر الناتج في الصف الاول العمود الاول من مصفوفة الناتج وهكذا ....

مثال 2: أوجد AB :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

أعمدة المصفوفة الثانية → صفوف المصفوفة الاولى ↓	$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$
$[3 \quad 1]$	$3(0) + 1(-1) = -1$	$3(2) + 1(4) = 10$
$[2 \quad -5]$	$2(0) + (-5)(-1) = 5$	$2(2) + (-5)(4) = -16$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 5 & -16 \end{bmatrix}$$

خصائص ضرب المصفوفات

الخاصية التجميعية لضرب المصفوفات

$(\underline{A}\ \underline{B})\ \underline{C} = \underline{A}(\ \underline{B}\ \underline{C})$

خاصية التوزيع من اليسار للمصفوفات

$\underline{C}\ (\underline{A} + \underline{B}) = \underline{C}\ \underline{A} + \underline{C}\ \underline{B}$

الخاصية التجميعية لضرب المصفوفات في عدد

$K(\ \underline{A}\ \underline{B}) = (\ K\ \underline{A})\ \underline{B} = \underline{A}(K\ \underline{B})$

خاصية التوزيع من اليمين للمصفوفات

$(\underline{A} + \underline{B})\ \underline{C} = \underline{A}\ \underline{C} + \underline{B}\ \underline{C}$

ملاحظة : عملية ضرب المصفوفات غير إبداليه

2-4 المحددات وقاعدة كرامر

المحددات

كل مصفوفة مربعه لها محددة. وهو الشرط الأساس لايجاد المحدد (تكون المصفوفة مربعه)

وبالتالي يكون محدد المصفوفة من النوع 2×2 محدد من الدرجة 2

ويرمز لمحددة المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ وكذلك يرمز لمحدد المصفوفة $\underline{A}$ بالرمز $|\underline{A}|$

طريقة إيجاد المحدد من النوع **2×2** هو

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

(حاصل ضرب عنصري القطر الرئيسي مطروحا منه حاصل ضرب عنصري القطر الاخر)

مثال 1: اوجد قيمة المحدد التالي $\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$: $\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 5(9) - (-4)\,8 = 77$

قاعدة الأقطار

تسمى محددات المصفوفات من الرتبة **3×3** محددات من الدرجة الثالثة وفي هذه الحاله يمكننا حساب هذه المحددات باستعمال قاعدة الأقطار

مثال 2: اوجد قيمة المحدد التالي باستعمال قاعدة الأقطار $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$

الخطوة 1 : أعد كتابة العمود ألاول والثاني عن يمين المحددة .

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} 8 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{matrix}$$

الخطوة 2: جد حاصل ضرب الأقطار و موازياتها .

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} 8 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} 8 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{matrix}$$

القطر الاخر

$$= 4(4)(1) + 8(2)(6) + 3(2)\,(5)$$
$$= 16 + 96 + 30 = 142$$

القطر الرئيسي

$$= 8(4)\,(5) + 3(2)\,(1) + 4(2)\,(6)$$
$$= 160 + 6 + 48 = 214$$

الخطوة 3: اطرح المجموع الثاني من المجموع الأول .

$$214 - 142 = 72$$

اذن قيمة المحدد هي 72

مساحة المثلث

تستعمل المحددات أيضا لايجاد مساحة المثلث اذا كانت احداثيات رؤوس المثلث معلومة

مثـال 3: استعمل المحددات لايجاد مساحة المثلث الذي رؤوسه (4 , 1-) , (6 , 3) , (2 , 1) .

نوجد قيمة المحدد باستعمال قاعدة الأقطار

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ -1 & 4 \end{matrix}$$

$$= (1(6)(1) + 2(1)(-1) + 1(3)(4)) - (1(6)(-1) + 1(1)(4) + 2(3)(1))$$

$$= (6 - 2 + 12) - (-6 + 4 + 6) = 16 - 4 = 12$$

$$|A| = \frac{1}{2}(12) = 6$$

ملاحظة : نستعمل القيمة المطلقة للمقدار A حتى نضمن ان المساحة موجبة وغير سالبة .

قاعدة كرامر

$$ax + by = m$$
$$fx + gy = n$$

وحيث ان c مصفوفة المعاملات

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix} \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|\underline{c}|} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|\underline{c}|}$$

مثـال 4: حل النظام الاتي باستخدام قاعة كرامر:

$$5x - 6y = 15$$
$$3x + 4y = -29$$

الخطوة 1: نوجد محددة مصفوفة المعاملات

$$|\underline{c}| = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5(3) - (-6(3)) = 38$$

الخطوة 2: نوجد قيم $x\ ,y$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|\underline{c}|} = \frac{\begin{vmatrix} 15 & -6 \\ -29 & 4 \end{vmatrix}}{38} = \frac{60-174}{38} = -3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|\underline{c}|} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 3 & -29 \end{vmatrix}}{38} = \frac{-145-45}{38} = -5$$

حل النظام هو : $(-3, -5)$

معلومة

اذا كانت قيمة محدد مصفوفة المعاملات لا يساوي الصفر فان له حل وحيد

اما اذا كان قيمة المحدد يساوي صفرا فان له عدد لانهائي من الحلول او لا حل له

2-5 النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

مصفوفة الوحدة هي مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيس يساوي الواحد ، والباقي اصفار ورمزها (I)

مصفوفة وحدة من النوع 2× 2 $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ ، مصفوفة وحدة من النوع 3×3 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

المصفوفة المحايدة لعملية الضرب (I) :

لاي مصفوفة مربعة $\underline{A}$ لها نفس رتبة مصفوفة الوحدة $\underline{I}$ فان $\underline{A}\cdot\underline{I} = \underline{I}\cdot\underline{A} = \underline{A}$

مثـال 1: $\begin{bmatrix}3 & 7\\1 & -4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 7\\1 & -4\end{bmatrix}$

النظير الضربي للمصفوفة تسمي المصفوفة $\underline{B}$ نظير ضربي للمصفوفة $\underline{A}$ اذا وفقط اذا كان :

$\underline{A}\cdot\underline{B} = \underline{B}\cdot\underline{A} = \underline{I}$ ويرمز للمصفوفة $\underline{B}$ بالرمز $\underline{A}^{-1}$

يكون : $\underline{A}\cdot\underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1}\cdot\underline{A} = \underline{I}$

<u>خطوات ايجاد النظير الضربي للمصفوفة من النوع 2 × 2 فان يكون على النحو التالي :</u>

1. ايجاد محددة المصفوفة واذا كانت المحددة تساوي صفر فانه لا يوجد نظير ضربي للمصفوفة واذا كانت لا تساوي الصفر فانه يوجد نظير ضربي للمصفوفة
2. نبادل بين عناصر القطر الرئيس و نغير إشارة كل من عناصر القطر الاخر
3. نضرب المصفوفة في $\frac{1}{\text{محددة المصفوفة}}$

مثـال 2: اوجد النظير الضربي للمصفوفة ان وجد .

$$A = \begin{bmatrix}-1 & 0\\8 & -2\end{bmatrix}$$

الخطوة 1 : ايجاد محددة المصفوفة: $\begin{vmatrix}-1 & 0\\8 & -2\end{vmatrix} = (-1)(-2) - (8)(0) = 2$

الخطوة 2 : نبادل بين عناصر القطر الرئيس و نغير إشارة كل من عناصر القطر الاخر $\begin{bmatrix}-2 & 0\\-8 & -1\end{bmatrix}$

الخطوة 3: نضرب المصفوفة في $\frac{1}{\text{محددة المصفوفة}}$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2 & 0\\-8 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\-4 & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}$$

المعادلة المصفوفية

تستخدم لحل النظام من معادلتين

$$\begin{aligned} ax + by &= m \\ fx + gy &= n \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} ax + by \\ fx + gy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

حيث

$$B = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix}$$

مصفوفة الثوابت   مصفوفة المتغيرات   مصفوفة المعاملات

وحل المعادلة المصفوفية هو : $X = A^{-1} \cdot B$

مثـال 3: حل نظام المعادلتين الاتيتين باستخدام المعادلة المصفوفية :

$$\begin{aligned} 4x + 5y &= 1 \\ 3x + 6y &= 2 \end{aligned}$$

الخطوة 1 : نوجد مصفوفة المعاملات و مصفوفة الثوابت

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

مصفوفة الثوابت   مصفوفة المعاملات

الخطوة 2 : نجد النظير الظربي لمصفوفة المعاملات

$$A^{-1} = \frac{1}{((4 \cdot 6) - (5 \cdot 3))} \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

الخطوة 3 : نضرب مصفوفة النظير الضربي بمصفوفة الثوابت

$$X = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-4}{9} \\ \frac{5}{9} \end{bmatrix}$$

الخطوة 4: حل النظام هو: $\left(\frac{-4}{9}, \frac{5}{9}\right)$

الفصل الثالث

كثيرات الحدود ودوالها

3-1 الأعداد المركبة

الوحدة التخيلية هي الجذر التربيعي الموجب للعدد -1 : $\sqrt{-1} = i$

العدد التخيلي البحت هي الجذور التربيعية لأعداد حقيقية سالبة ولأي عدد حقيقي موجب مثل b

فإن : $\sqrt{-b^2} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{b^2} = bi$

قوى الوحدة التخيلية

الأعداد التخيلية

زوجي

إذا كان اس العدد التخيلي i يقبل القسمة على 4 | $=1$

إذا كان اس العدد التخيلي i لا يقبل القسمة على 4 | $=-1$

فردي

بعد أخذ i منه يقبل القسمة على4 | $i=$

بعد أخذ i منه لا يقبل القسمة على4 | $-i=$

العدد المركب هو عدد يمكن كتابة على الصورة $(a + bi)$

مثال: $(2 + 4i)$ او $(1 - i)$

تساوي الأعداد المركبة يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذه تساوى الجزأين الحقيقين والجزأين التخيليين أي أن : $a + bi = c + di$ إذا وفقط إذا كان $a = c , b = d$

جمع وطرح الأعداد المركبة لجمع أو طرح عددين مركبين , نقوم بجمع الأجزاء الحقيقية معا الأجزاء التخيلية معا .

$$(-1 + 2i) - (4 + 6i) = (-1 - 4) + (2 - 6)(i) = -5 - 4i$$

ضرب الأعداد المركبة لضرب الأعداد المركبة فإننا نستخدم طريقة التوزيع بالترتيب.

$$(2 + 4i)(9 - 3i) = 2(9) + 2(-3i) + 4i(9) + 4i(-3i) = 18 - 6i + 36i - 12i^2$$

$$= 18 + 30i - 12(-1) = 30 + 30i$$

العددان المركبان المترافقان يسمى العددان $(a + bi), (a - bi)$ مركبين مترافقين وناتج ضربهما هو عدد حقيقي دائما على صورة $a^2 + b^2$ ويمكن استعمالها في قسمة عددين مركبين

قسمة الأعداد المركبة

$$\frac{5}{2+4i} = \frac{5}{2+4i} \cdot \frac{2-4i}{2-4i} = \frac{5(2)+5(-4i)}{4+16} = \frac{10-20i}{20} = \frac{5}{10} - i$$

3-2 القانون العام والمميز

القانون العام

الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية هي $a\ x^2 + x\,b + c\ = 0$ لكي نحل هذه المعادلة نستخدم ما يسمى بالقانون العام والصيغة هي

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

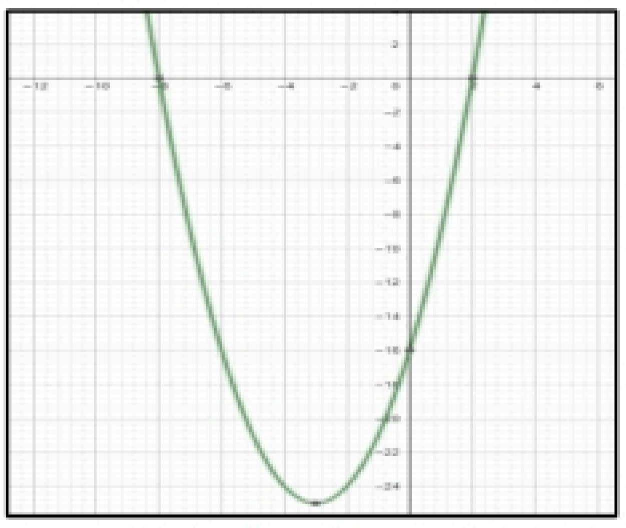
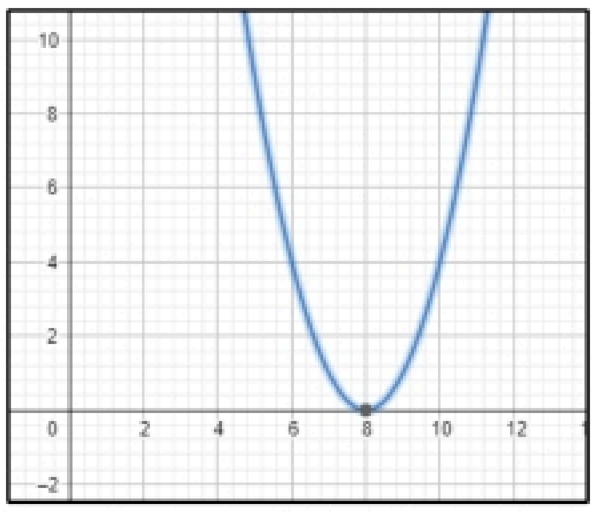
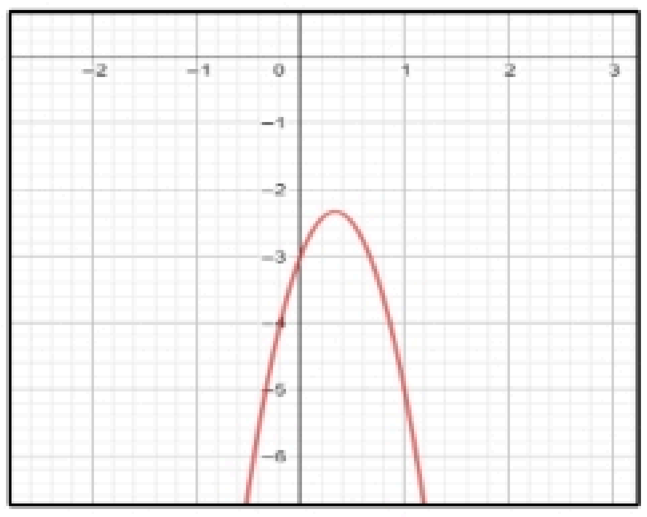
المميز

هو قيمة ما تحت الجذر في القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2a}$$

المميز

حالت المميز

مثال على التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة	عدد الجذور وانواعها	قيمة المميز
	جذران حقيقيان نسبيان	$b^2 - 4ac > 0$ مربع كامل
	جذران حقيقيان غير نسبيان	ليس مربع كامل $b^2 - 4ac > 0$
	جذر حقيقي مكرر مرتين	$b^2 - 4ac = 0$
	جذران مركبان مترافقين	$b^2 - 4ac < 0$

3-3 العمليات على كثيرات الحدود

وحيدة الحد

هي عدد أو متغير أو عبارة ناتجة عن ضرب متغير أو أكثر و أسسها أعداد صحيحة غير سالبة

خصائص الأسس

الخاصية	التعريف	مثال	الخاصية	التعريف	مثال
ضرب القوى	$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$	$3^3 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^7$	القوى الصفرية	$x^0 = 1,\ x \neq 0$	$7^0 = 1$
قسمة القوى	$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$, $a \neq 0$	$\frac{9^5}{9^2} = 9^{5-2} = 9^3$	قوة القوة	$(x^a)^b = x^{ab}$	$(3^3)^2 = x^{3\cdot 2}$
الاس السالب	$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$, $x \neq 0$	$3^{-5} = \frac{1}{3^5}$	قوة ناتج القسمة	$(\frac{x}{y})^a = \frac{x^a}{y^a}$	$(\frac{x}{y})^2 = \frac{x^2}{y^2}$
قوة ناتج الضرب	$(xy)^a = x^a y^a$	$(2k)^4 = 2^4\ k^4$			

درجة كثيرة الحدود

هي أكبر درجة لوحيدات الحد المكونة لها

شروط كثيرة الحدود :

لا تحتوي على متغير في المقام	لا تحتوي على جذر	لا تحتوي على أسس سالبة أو أسس كسرية

التبسيط

عملية تبسيط عبارات تتضمن إعادة كتابتها دون اقواس او أسس سالبة

تبسيط وحيدات الحد

تكون وحيدة الحد في ابسط صورة عندما

لا تتضمن قوى قوة.	تكون جميع الكسور المتضمنة في ابسط صورة.
يظهر كل أساس مرة واحدة.	لا تتضمن اقواسا أو أسسا سالبة

جمع كيثرات الحدود وطرحها

نتخلص من الاقواس ونجمع او نطرح الحدود المتشابهة

ضرب كثيرات الحدود

نستعمل خاصية التوزيع لضرب وحيدة حد في كثيرة حدود او في ضرب كثيرات الحدود

3-4 قسمة كثيرات الحدود

قسمة كثيرة حدود على وحيدة حد

خطوات قسمة كثيرة حدود على وحيدة حد .

1. توزيع البسط (كثيرة الحدود) على المقام (وحيدة حد) .
2. اقسم كل حد في البسط على المقام .
3. اكتب الناتج في ابسط صورة .

مثال 1 : بسطي العبارة التالية :

$$\frac{4y^2x-2xy+2yx^2}{xy} = \frac{4xy^2}{xy} - \frac{2xy}{xy} + \frac{2yx^2}{xy}$$

$$= 4y - 2 + 2x$$

قسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود

عندما يكون قسمة كثيرة حدود على ثنائية هناك طريقتان للحل عن طريق المثال هذا نوضح ذلك الطريقتين

مثال 2 : استعملي القسمة الطويلة لايجاد الناتج : $(x^2 + 3x - 40) \div (x - 5)$

خطوات خوارزمية كثيرات حدود على أخرى :

1. اكتب كثيرة الحدود في كل من المقسوم والمقسوم عليه بحيث تكون حدودها مرتبة ترتيبا تنازليا حسب درجتها .
2. ابدا بقسمة الحد الأول في المقسوم على الحد الأول في المقسوم عليه وضع الإجابة في المكان المخصص لذلك .
3. اضرب ناتج القسمة في الخطوة السابقة في المقسوم عليه واكتب الإجابة تحت المقسوم واطرحه من المقسوم .
4. استمر بقسمة الحد الثاني و هكذا حتى نصل الى ان يكون باقي القسمة 0 او كثيرة حدود درجتها اقل من درجة المقسوم عليه .

$$\begin{array}{r|l}
 & x + 8 \\
\hline
x - 5 & x^2 + 3x - 40 \\
 & -\ \ x^2 - 5x \\
\hline
 & 8x - 40 \\
 & -\ \ 8x - 40 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

القسمة التركيبية :

هي طريقة مبسطة لقسمة كثيرة حدود على ثنائية حد .

خطوات القسمة التركيبية :

1. اكتب معاملات المقسوم بعد ترتيب حدوده تنازليا بحسب درجتها تاكد من ان المقسوم عليه على الصورة $x - r$ ثم اكتب الثابت r في الصندوق واكتب المعامل الأول اسفل الخط الافقي
2. اضرب المعامل الأول في r واكتب الناتج اسفل المعامل الذي يليه .
3. اجمع ناتج الضرب مع المعامل الذي فوقه .
4. كرر الخطوتين السابقتين على ناتج الجمع في الخطوة السابقة حتى تصل الى ناتج جمع العددين في العمود الأخير .
5. الاعداد في الصف الأخير تمثل معاملات ناتج القسمة ، ودرجة الحد الأول أقل بواحد من درجة المقسوم والعدد الاخير هو الباقي

مثال 3 : استعملي القسمة التركيبية لايجاد الناتج : $(x^2 + 3x - 40) \div (x - 5)$

المتغيرات ←	الحد الثابت	x	x^2	
المعاملات ←	-40	3	1	
	+	+	↓	$\boxed{5}$
	40	5		
الباقي ←	0	8	1	

ناتج القسمة هو : $x + 8$ والباقي 0

تذكير

اذا لم يوجد احد الحدود في كثيرة حدود المقسوم فأضفه وليكن معاملة صفرا

مثال : $2x^3 - 5x^2 + 8$

فاكتبه $2x^3 - 5x^2 + 0x + 8$

3-5 دوال كثيرات الحدود

كثيرة الحدود بمتغير واحد عبارة جبرية على الصورة التالية .

$a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1\, x + a_0$ حيث $a_0\ ,\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ldots,\ a_{n-1}\ ,a_n$
اعداد حقيقية ، $a_n \neq 0$ ، n عدد صحيح غيرسالب .

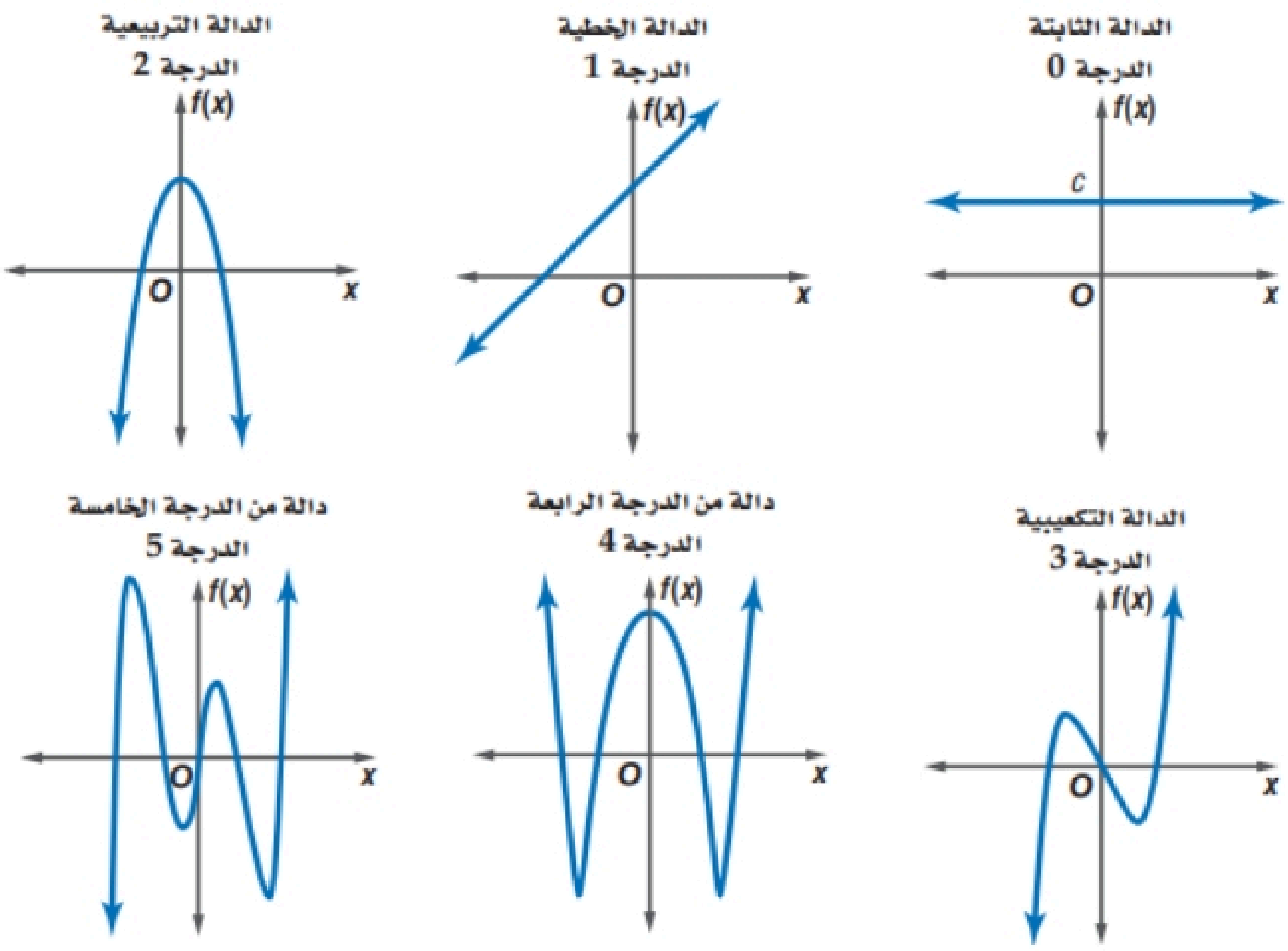
درجة كثيرة الحدود هي اس المتغير ذي أكبر أس فيها.

المعامل الرئيسي هو معامل الحد الاول في كثيرة الحدود المكتوبة بالصيغة القياسية.

كثيرة حدود	مثال	الدرجة	المعامل الرئيس
الثابتة	14	0	14
الخطية	$2x + 3$	1	2
التربيعية	$5x^2 - 3x + 1$	2	5
التكعيبية	$8x^3 + 12x^2 - 3x + 1$	3	8
الصيغة العامة	$a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1\, x + a_0$	n	a_n

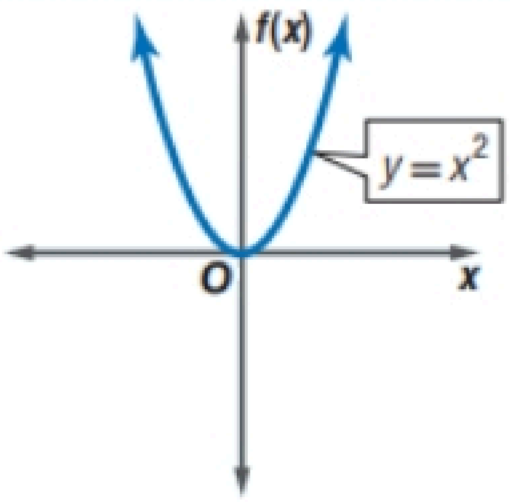
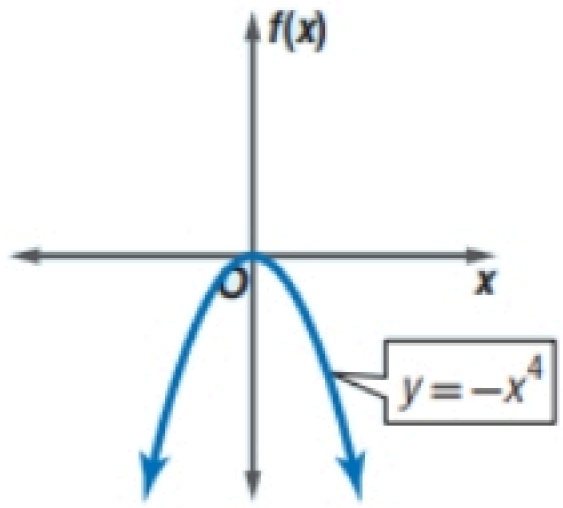
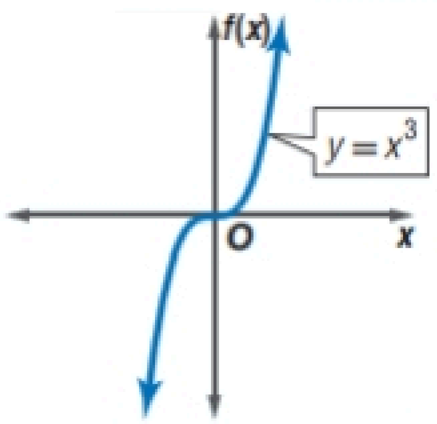
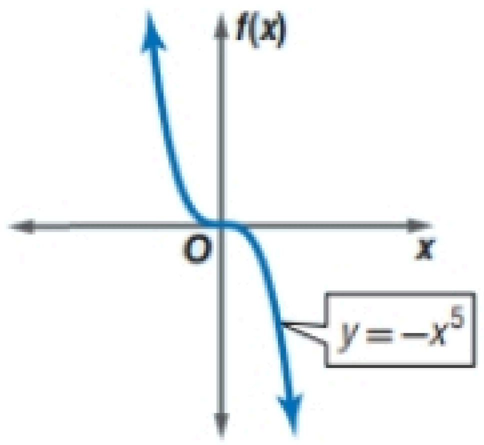
دالة القوة هي دالة متصلة تكتب على الصورة $f(x) = a\, x^b$
حيث a عدد حقيقي , b عدد صحيح غير السالب

التمثيل البياني لكثيرات الحدود هو التمثيل البياني لدالة كثيرة حدود يظهر عدد المرات التي يقطع فيها هذا التمثيل المحور x , و هذا العدد يمثل درجة كثيرة الحدود و هكذا



سلوك طرفي الدالة في التمثيل البياني

العاملان الوحيدان في تحديد سلوك طرفي التمثيل البياني هما المعامل الرئيس و درجة كثيرة الحدود .

الدرجة : زوجية المعامل الرئيس : موجب المجال : R المدى : مجموعه الاعداد الحقيقية الاكبر من او تساوي القيمة الصغرى  سلوك طرفي التمثيل البياني :(في الاتجاه نفسة) $f(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$ $f(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$	الدرجة : زوجية المعامل الرئيس : سالب المجال : R المدى : مجموعه الاعداد الحقيقية الأقل من او تساوي القيمة العظمى  سلوك طرفي التمثيل البياني :(في الاتجاه نفسة) $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$ $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$
الدرجة : فردية المعامل الرئيس : موجب المجال : R المدى : R  سلوك طرفي التمثيل البياني : (في اتجاهين مختلفين) $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$ $f(x) \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$	الدرجة : فردية المعامل الرئيس : سالب المجال : R المدى : R  سلوك طرفي التمثيل البياني : (في اتجاهين مختلفين) $f(x) \to +\infty$ عندما $x \to -\infty$ $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to +\infty$

صفر الدالة

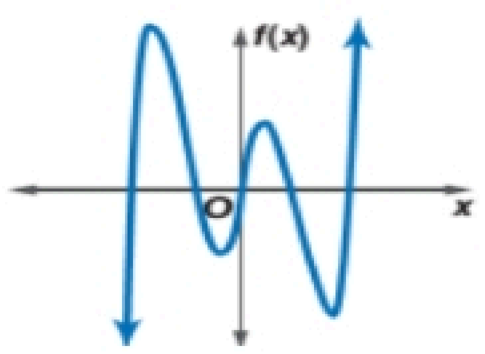
صفر الدالة الحقيقي : هو الاحداثي x لنقطة تقاطع التمثيل البياني للدالة مع المحور x .

عدد اصفار الدالة الحقيقية : هو عدد مرات تقاطع التمثيل البياني مع المحور x .

أصفار الدوال ذات الدرجة الفردية والزوجية

يكون للدوال الفردية عدد فردي من الاصفار المنتمية لمجموعة الاعداد الحقيقية ويكون للدوال الزوجية الدرجة عدد زوجي من الاصفار أو لا يكون لها اصفار تنتمي الى مجموعة الاعداد الحقيقية

مثال : الدالة في التمثيل البياني التالي لها 5 اصفار حقيقية



3-6 حل معادلات كثيرات الحدود

طرائق تحليل كثيرات الحدود

عدد الحدود	طريقة التحليل	نموذج
أي عدد	اخراج العامل المشترك الأكبر	$4\,a^3b^2 \;-\; 8ab \;=\; 4a\,b(\,a^2b-2)$
حدَان	الفرق بين مربعين الفرق مكعبين مجموع مكعبين	$a^2 - b^2 = (a\;+b)\;(a-b)$ $a^3 - b^3 = (\,a\;-\;b)\,(a^2\;+\;ab+\;b^2\,)$ $a^3 + b^3 = (\,a\;+b)\,(\,a^2\;-\;a\,b\;+\;b^2\,)$
ثلاثة حدود	ثلاثية حدود المربع الكامل	$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
	ثلاثية الحدود بالصورة العامة	$acx^2+\;(a\,d\;+\;b\,c)\,x\;+\;b\,d$ $=\;(\,ax\;+b)(cx\;+\;d)$
اربعة حدود أو أكثر	تجميع الحدود	$ax\;+\;bx\;+\;ay\;+\;by$ $=\;x(a\;+b)\;+y\,(\,a\;+\;b\,)$ $=\;(x\;+\;y)(a+b)$

كثيرة الحدود الاولية

هي كثيرة الحدود التي لا يمكن تحليلها الى كثيرتي حدود درجة كل منهما أقل من درجة كثيرة الحدود المعطاة .

الصورة التربيعية

الصورة التربيعية لكثيرة الحدود هي: $a\;u^2+b\,u\;+\;c$ ، $a\;\neq\;0$ و $a\;,b\,,c$ اعداد حقيقية
ويمكن ان تكتب بعض كثيرات الحدود في المتغير x على هذه الصورة وذلك بعد تعريف u بدلالة x .

مـثال :

اكتب العبارة على الصورة التربيعية $8\,x^4\;\;+12x^2\;\;+18$

$$2(\,2x^2)^{\,2}+6(\,2x^2)+18 \Rightarrow (\,u=2x^2\,) \;\Longrightarrow\; 2\,(\,u)^{\,2}+6(\,u)+18$$

تـنبيــة :

هناك كثيرات حدود لايمكن كتابتها على الصورة التربيعية مثال لذلك $x^4\;+\;5\,x\;+6$ لا يمكن كتابتها على الصورة التربيعية .

3-7 نظريتا الباقي والعوامل

نظرية الباقي

اذا قسمت كثيرة الحدود $P(x)$ على $x - r$, فان الباقي ثابت ويساوي $P(r)$, وكذلك :

$$P(x) = Q(x) \cdot (x - r) + P(r)$$

حيث $Q(x)$ دالة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة $P(x)$.

مثال 1 : $x^2 + 6x + 2 = (x - 4) \cdot (x + 10) + 42$

التعويض التركيبي

هو عملية إيجاد قيمة دالة عند عدد بتطبيق نظرية الباقي واستعمال القسمة التركيبية .

ملاحظة : في التعويض التركيبي يتم قسمة كثيرة حدود على ثنائية حد على الصورة $(x - a)$ وفي هذه الحالة استعمل a , واذا كانت ثنائية الحد على الصورة $(x + a)$ فاستعمل $-a$

نظرية العوامل

تكون ثنائية الحد $x - r$ عاملا من عوامل كثيرة الحدود $P(x)$ اذا وفقط اذا كان $P(r) = 0$

مثال 2 : ثنائية الحد $x - 5$ عاملا من عوامل $P(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15$

إذا كان $P(5) = 0$

نظرية العوامل تعد حالة خاصة من نظرية الباقي .

"التحليل الى العوامل " ليس شرطا ان تكون عوامل كثيرة الحدود ثنائيات حد .

فمثلا , $x^2 + x^3 - x + 15$ هما

$x + 3$ و $x^2 - 2x + 5$.

3-8 الجذور والأصفار

النظرية الأساسية في الجبر

كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر لها جذر واحد على الأقل ينتمي الى مجموعة الاعداد المركبة .

الجذور المكررة

يمكن ان يكون لمعادلات كثيرت الحدود جذر مكرر مرتين او ثلاث او اربع وهكذا

نتيجة للنظرية الاساية في الجبر

يكون لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n العدد n فقط من الجذور المركبة بما في ذلك الجذور المكررة .

مثال 1:

1) $x^3 + 2x^2 + 6$: لها 3 جذور

2) $4x^4 - 3x^3 + 5x - 6$: لها 4 جذور

3) $2x^5 - 3x^2 + 8$: لها 5 جذور

قانون ديكارت للإشارات

هو قانون يستخدم لمعرفة عدد الاصفار الحقيقية والتخيلية لدالة كثيرة الحدود .

إذا كانت $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots\dots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية فإن :

1. عدد الاصفار الموجبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(x)$ ، او اقل منه بعدد زوجي .
2. عدد الاصفار السالبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(-x)$ ، او اقل منه بعدد زوجي .

مثال 2: اذكر العدد الممكن للاصفار الحقيقية الموجبة والحقيقية السالبة والتخيلية للدالة

$$f(x) = 2x^5 + x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x + 9$$

الخطوة 1 : احسب عدد مرات تغير إشارة معاملات $f(x)$

$$f(x) = +2x^5 + x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x + 9$$

لا   لا   نعم   لا   نعم

نجد أن هناك 2 من تغيرات في إشارة المعاملات لذا عدد الاصفار الحقيقية الموجبة سيكون 2 أو 0

الخطوة 2 : احسب عدد مرات تغير إشارة معاملات $f(-x)$

$$f(-x) = 2(-x)^5 + (-x)^4 + 3(-x)^3 - 4(-x)^2 - (-x) + 9$$

$$f(x) = -2x^5 + x^4 - 3x^3 - 4x^2 + x + 9$$

نعم نعم لا نعم لا

نجد أن هناك 3 تغيرات في إشارة المعاملات لذا عدد الاصفار الحقيقية السالبة سيكون 3 أو 1

الخطوة 3 : ننشئ جدول يبين عدد الجذور الحقيقية والتخيلية الممكنة

عدد الاصفار الحقيقية الموجبة	عدد الاصفار الحقيقية السالبة	عدد الاصفار التخيلية يساوي العدد 5 مطروحا منه (عددالاصفار الموجبة والسالبة الحقيقية)
2	3	5-(2+3)=0
	1	5-(2+1)=2
0	3	5-(0+3)=2
	1	5-(0+1)=4

نظرية الأعداد المركبة المترافقة

اذا كان a, b عددين حقيقيين , وكان $a + bi$ صفرا لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية .
فان $a - bi$ صفر للدالة أيضا .

مثال 3: اكتب دالة كثيرة حدود درجتها اقل ما يمكن , ومعاملات حدودها اعداد صحيحة ، اذا كان العددان $-1 \; , 5 - i$

من المعطيات فان $-1 \; , \; 5 - i$ من اصفار كثيرة حدود

وبما ان $5 - i$ صفر للدالة فان المرافق أيضا صفر للدالة $5 + i$

اكتب معادلة كثيرة الحدود على صورة حاصل ضرب عواملها .

$P(x) = (x + 1)[\; x - (5 - i)\,][x - (5 + i)]$

$= (x + 1)\,[(x - 5) + i]\,[(x - 5) - i]$

$= (x + 1)[+(x - 5)^2 - i^2\,]$

$= (x + 1)\,(x^2 - 10x + 26)$

$= x^3 - 10x^2 + 26x + x^2 - 10x + 26$

$= x^3 - 9x^2 + 16x + 26$