تم تحميل وعرض المادة من منصة

حقيبتي

www.haqibati.net

منصة حقيبتي التعليمية

منصة حقيبتي هو موقع تعليمي يعمل على تسهيل العملية التعليمية بطريقة بسيطة وسهلة وتوفير كل ما يحتاجه المعلم والطالب لكافة الصفوف الدراسية كما يحتوي الموقع على حلول جميع المواد مع الشروح المتنوعة للمعلمين.

المملكة العربية السعودية

وزارة التعليم
Ministry of Education

قررت وزارة التعليم تدريس
هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

الرياضيات 2-1

التعليم الثانوي - نظام المسارات

السنة الأولى المشتركة

قام بالتأليف والمراجعة
فريق من المتخصصين

طبعة 1446-2024

ⓒ وزارة التعليم ، ١٤٤٥هـ

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر
وزارة التعليم
الرياضيات ١-٢ - التعليم الثانوي - نظام المسارات - السنة الأولى
المشتركة. / وزارة التعليم - ط ١٤٤٦- الرياض ، ١٤٤٥هـ
٢٠٠ ص ؛ ٢٧.٥ x ٢١سم

رقم الإيداع : ١٤٤٥/٢٢٢٢١
ردمك : ٩-٦٧٤-٥١١-٦٠٣-٩٧٨

مواد إثرائية وداعمة على "منصة عين الإثرائية"

ien.edu.sa

أعزاءنا المعلمين والمعلمات، والطلاب والطالبات، وأولياء الأمور، وكل مهتم بالتربية والتعليم:
يسعدنا تواصلكم؛ لتطوير الكتاب المدرسي، ومقترحاتكم محل اهتمامنا.

fb.ien.edu.sa

بسم الله الرحمن الرحيم

نبذة عن نظام المسارات في المرحلة الثانوية

عزيزي الطالب:

إنّ تقدم الدول وتطورها يقاس بمدى قدرتها على الاستثمار في التعليم، ومدى استجابة نظامها التعليمي لمتطلبات العصر ومتغيراته. وحرصًا من وزارة التعليم على ديمومة تطوير أنظمتها التعليمية، واستجابة لرؤية المملكة العربية السعودية 2030 فقد بادرت إلى اعتماد مشروع تطوير نظام التعليم الثانوي إلى نظام "المسارات" بهدف إحداث تغيير حقيقي وشامل في المرحلة الثانوية.

ما الذي سيقدمه لك نظام المسارات في المرحلة الثانوية ؟

إن نظام المسارات يقدم أنموذجًا تعليميًا متميزًا وحديثًا للتعليم الثانوي بالمملكة العربية السعودية يسهم بكفاءة فيما يلي:

- تعزيز قيم المواطنة لديك من خلال التركيز عليها في جميع المواد؛ استجابة لمطالب التنمية المستدامة العالمية، والخطط التنموية في المملكة التي تؤكد على ترسيخ ثنائية القيم والهوية، وتقوم على تعاليم الإسلام، والوسطية، ومفهوم المواطنة، والانتماء.
- تأهيلك بما يتوافق والتخصصات المستقبلية في الجامعات والكليات أو المهن المطلوبة؛ لضمان مواءمة مخرجات التعليم مع متطلبات سوق العمل بشكل وثيق وحقيقي.
- تمكينك من متابعة تعليمك في المسار المفضل لديك في مراحل مبكرة وبخطط مركزة ومرتبطة، وفق ميولك وقدراتك.
- تمكينك من الالتحاق بالتخصصات العلمية والإدارية النوعية المرتبطة بسوق العمل ووظائف المستقبل.
- دمجك في بيئة تعليمية ممتعة ومحفزة داخل المدرسة قائمة على فلسفة بنائية، وممارسات تطبيقية ضمن مناخ تعليمي نشط.
- نقلك عبر رحلة تعليمية متكاملة من المرحلة الابتدائية حتى الجامعة، قائمة على امتداد منطقي للمسارات التخصصية منذ مرحلة التأسيس حتى نهاية المرحلة الثانوية.
- تسهيل عملية الانتقال إلى مرحلة ما بعد التعليم العام، حيث تتواءم المسارات مع التخصصات في مرحلة ما بعد الثانوية، ومع متطلبات سوق العمل، مما يجعل انتقالك للمرحلة اللاحقة يسيرًا وأكثر كفاءة.
- تزويدك بالمهارات التقنية المعينة لك على التعامل مع الحياة والتجاوب مع متطلبات سوق العمل.
- توسيع الفرص أمامك عبر خيارات متنوعة غير الجامعات مثل: الحصول على شهادات مهنية، والالتحاق بالكليات التطبيقية، والحصول على دبلومات وظيفية.

ما الجديد في مشروع تطوير المرحلة الثانوية (المسارات)؟

نظام المسارات نظام تعليمي قائم على التعلّم عبر المستويات الدراسية، ويتكوّن من تسعة فصول دراسية تُدرَّس في ثلاث سنوات، تتضمن سنة أولى مشتركة يدرس فيها الطالب مجالات علمية وإنسانية متنوّعة، تليها سنتان تخصصيتان، يُسكَّن الطالب بها في مسار عام وأربعة مسارات تخصصية تتسق مع ميوله وقدراته، وهي: المسار الشرعي، مسار إدارة الأعمال، مسار علوم الحاسب والهندسة، مسار الصحة والحياة.

ما الذي يجعل نظام المسارات الأفضل لك؟

1. **وجود مواد دراسية جديدة:** تتسق مع متطلبات الثورة الصناعية الرابعة والخطط التنموية، ورؤية المملكة 2030؛ تدرسها ضمن مسارك، وتهدف لتنمية مهارات التفكير العليا وحل المشكلات، وتنمية مهاراتك البحثية.
2. **برامج المجال الاختياري في المسار العام:** ويكون مبنيًا على احتياجات سوق العمل، حيث يمكنك الالتحاق بمجال اختياري محدد وفق مصفوفة مهارات وظيفية؛ لتحصل على شهادة مهنية بإتقان تلك المهارات بعد إتمامها.
3. **مقاييس فرز وتوجيه:** تضمن تحقيق كفاءتك وفاعليتك، وتساعدك على تحديد اتجاهك وميولك ومكامن القوة لديك؛ مما ينعكس على نجاحك في المستقبل.
4. **العمل التطوعي:** يعد أحد متطلبات تخرجك، مما يساعدك على توطيد علاقاتك الإنسانية، وبناء وتنمية وتماسك مجتمعك.
5. **التجسير:** تستطيع الانتقال من مسار إلى آخر وفق آليات محددة، فيمكنك حتى بعد نهاية السنة الثانية تغيير تخصصك.
6. **حصص الإتقان:** تطوير مستواك التحصيلي ومهاراتك من خلال تقديم حصص الإتقان الإثرائية والعلاجية.
7. **خيارات التعليم عن بعد والتعلم المدمج:** التي بنيت في نظام المسارات على أسس من المرونة والملاءمة والتفاعل والفعالية.
8. **خطة التسريع للمتطلبات الجامعية:** تقديم مقررات تغني عن دراستك لها في الجامعات.
9. **مشروع التخرّج:** يشترط أن تقدم مشروع تخرج في مجال تخصصك؛ لدمج خبراتك النظرية مع ممارساتك التطبيقية.
10. **شهادات مهنية ومهارية:** تمنح لك بعد إنجاز مهام محددة واختبارات معيّنة بالشراكة مع جهات تخصصية.

كيف أستطيع تحديد توجهي بعد السنة المشتركة؟

يُمنح الطالب الفرصة للانخراط في مجالات التعلم التي يستطيع أن يبدع ويتميز بها عبر مجموعة من المقاييس تساعده على اختيار التخصص المناسب له، والكشف عن ميوله بوقت مبكر وفق مهاراته وقدراته.

بماذا ينفرد بناء الخطة الدراسية في نظام المسارات؟

- تحقيق تعليم عادل ومتكافئ لجميع الطلاب، لذا فقد صمم الجدول الدراسي ليكون أكثر ثباتًا؛ مما يقلل الهدر والضغط النفسي لدى الطالب.
- بنيت الخطة وفق رؤية تكاملية للمرحلتين ما قبل وبعد التعليم الثانوي، بحيث تضمن للطالب رحلة تعليمية متكاملة.
- بنيت بشكل متوازن ووزِّعت على شكل مواد دراسية يكمل بعضها بعضاً؛ لتساعد الطالب على إبراز طاقاته، وتنمية ميوله ومواهبه.
- تتصف بالثبات، فهي موحدة بين الثانويات بشكل عام؛ مما يسهل انتقال الطالب من مدرسة إلى أخرى دون هدر.

المقدمة

الحمد لله والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد:

تعد مادة الرياضيات من المواد الدراسية الأساسية التي تهيِّئ للطالب فرص اكتساب مستويات عُليا من الكفايات التعليمية، مما يتيح له تنمية قدرته على التفكير وحل المشكلات، ويساعده على التعامل مع مواقف الحياة وتلبية متطلباتها.

ومن منطلق الاهتمام الذي توليه حكومة خادم الحرمين الشريفين بتنمية الموارد البشرية، وعيًا بأهمية دورها في تحقيق التنمية الشاملة، كان توجه وزارة التعليم نحو تطوير المناهج الدراسية وفي مقدمتها مناهج الرياضيات، بدءًا من المرحلة الابتدائية، سعيًا للارتقاء بمخرجات التعليم لدى الطلاب، والوصول بهم إلى مصاف أقرانهم في الدول المتقدمة.

وتتميز هذه الكتب بأنها تتناول المادة بأساليب حديثة، تتوافر فيها عناصر الجذب والتشويق، التي تجعل الطالب يقبل على تعلمها ويتفاعل معها، من خلال ما تقدمه من تدريبات وأنشطة متنوعة، كما تؤكد هذه الكتب على جوانب مهمة في تعليم الرياضيات وتعلمها، تتمثل فيما يأتي:

- الترابط الوثيق بين محتوى الرياضيات وبين المواقف والمشكلات الحياتية.
- تنوع طرائق عرض المحتوى بصورة جذابة مشوقة.
- إبراز دور المتعلم في عمليات التعليم والتعلم.
- الاهتمام بالمهارات الرياضية، والتي تعمل على ترابط المحتوى الرياضي وتجعل منه كلاً متكاملاً، ومن بينها: مهارات التواصل الرياضي، ومهارات الحس الرياضي، وحل المشكلات، ومهارات التفكير العليا.
- الاهتمام بتوظيف التقنية في المواقف الرياضية المختلفة.
- الاهتمام بتوظيف أساليب متنوعة في تقويم الطلاب بما يتناسب مع الفروق الفردية بينهم.

ولمواكبة التطورات العالمية في هذا المجال، فإن المناهج المطوَّرة والكتب الجديدة سوف توفر للمعلم مجموعة متكاملة من المواد التعليمية المتنوعة التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، بالإضافة إلى البرمجيات والمواقع التعليمية، التي توفر للطالب فرصة توظيف التقنيات الحديثة والتواصل المبني على الممارسة، مما يؤكد دوره في عملية التعليم والتعلم.

ونحن إذ نقدّم هذه الكتب لأعزائنا الطلاب، لنأمل أن تستحوذ على اهتمامهم، وتلبي متطلباتهم وتجعل تعلمهم لهذه المادة أكثر متعة وفائدة.

والله ولي التوفيق

إليك عزيزي الطالب

ستركز في دراستك هذا العام على عدة موضوعات هندسية، تشمل ما يأتي:

- **المنطق الرياضي** واستعماله في البراهين الهندسية والجبرية.
- **العلاقات** بين **الزوايا والمستقيمات**.
- **العلاقات** في **المثلث**، وتطابق المثلثات، وتشابهها.
- **التحويلات الهندسية** والتماثل في الأشكال الثنائية والثلاثية الأبعاد.
- **خواص الأشكال الرباعية** ونظريات **الدائرة**.

وفي أثناء دراستك، ستتعلم طرائق لحل المسائل الهندسية وتمثيلها بصور متعددة وسوف تفهم لغة الرياضيات وتستعمل أدواتها، وتنمي قدراتك الذهنية وتفكيرك الرياضي.

كيف تستعمل كتاب الرياضيات؟

- **اقرأ** فقرة **فيما سبق** لتعرف ارتباط هذا الدرس بما درسته من قبل، ولتعرف أفكار الدرس الجديد اقرأ فقرة **والآن**.
- **ابحث** عن **المفردات** المظللة **باللون الأصفر** باللغتين العربية والإنجليزية ، واقرأ تعريف كل منها.
- **راجع** المسائل الواردة في **مثال** والمحلولة بخطوات تفصيلية؛ لتوضيح أفكار الدرس الرئيسة.
- **ارجع** إلى **إرشادات للدراسة** حيث تجد معلومات وتوجيهات تساعدك في متابعة الأمثلة المحلولة.
- **ارجع** إلى فقرة **قراءة الرياضيات** ؛ لتتذكر نُطق بعض الرموز والمصطلحات الرياضية.
- **اربط** بين المعنى اللغوي والمعنى الرياضي للمفردة، من خلال فقرة **ربط المفردات**
- **تذكَّر** بعض المفردات التي تعلَّمتها من قبل، بالرجوع إلى فقرة **مراجعة المفردات**
- **ارجع** إلى فقرة **تنبيه!** دائمًا لتعرف الأخطاء الشائعة التي يقع فيها كثير من الطلاب حول بعض المفاهيم الرياضية فتجتنبها.
- **ارجع** إلى **الصيغ والرموز** في آخر الكتاب لتعرف الرموز التي تعلمتها في المرحلة المتوسطة وما يقابلها في المرحلة الثانوية، ولتعرف أيضًا أهم الصيغ والرموز التي وردت في هذا الكتاب.
- **ارجع** إلى المثال المشار إليه مقابل بعض التمارين في فقرتي **تأكد** و **تدرب وحل المسائل** ليساعدك على حل هذه التمارين وما شابهها.
- **نفِّذ** **اختبار الفصل** في نهاية كل فصل، بعد أن تُراجع أفكار الدرس الرئيسة في **دليل الدراسة والمراجعة** . أو بعد مراجعة ما دوَّنته من أفكار في **المطويات**
- **استعن** بصفحتَي **الإعداد للاختبارات** ؛ لتتعرف أنواع أسئلة الاختبارات وبعض طرق حلِّها.
- **نفذ** **الاختبار التراكمي** في نهاية كل فصل لمراجعة الأفكار الرئيسة للفصل وماقبله من فصول.

الفهرس

الفصل 3 المثلثات المتطابقة

الفصل 4 العلاقات في المثلث

الفهرس

الفصل 5 الأشكال الرباعية

الفصل

3

المثلثات المتطابقة
Congruent Triangles

فيما سبق:

درست القطع المستقيمة والزوايا والعلاقات بين قياساتها.

والآن:

- أطبق العلاقات الخاصة بالزوايا الداخلية والزوايا الخارجية للمثلثات.
- أحدد العناصر المتناظرة في مثلثات متطابقة، وأبرهن على تطابق المثلثات.
- أتعرف خصائص المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع.

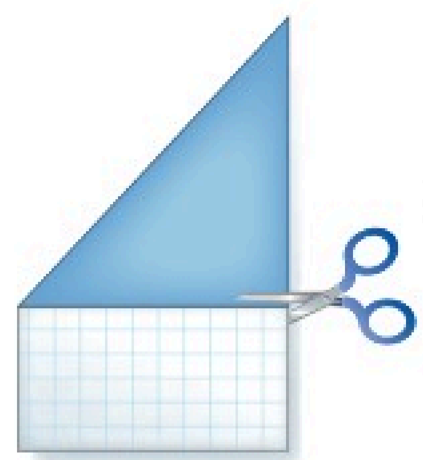
لماذا؟

لياقة: تستعمل المثلثات لتقوية إنشاءات ومعدات كثيرة، من بينها أجهزة اللياقة البدنية مثل هياكل الدراجات.

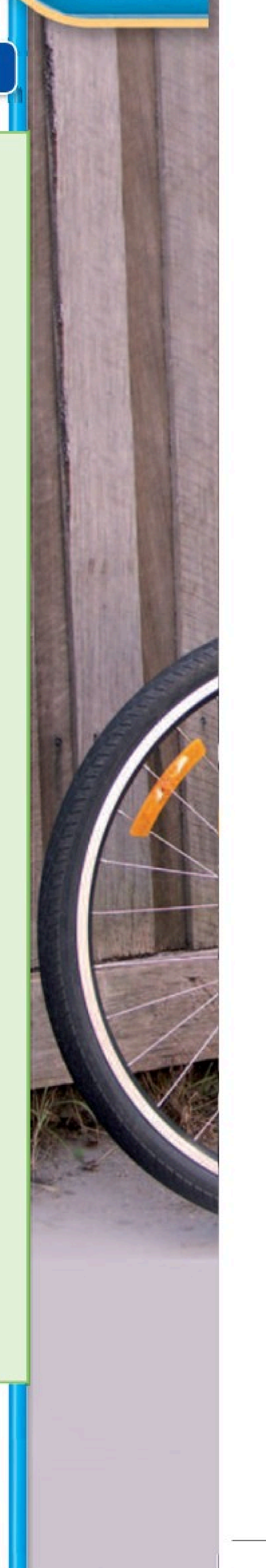
المطويات منظم أفكار

المثلثات المتطابقة: اعمل المطوية التالية لتنظيم ملاحظاتك حول المثلثات المتطابقة. ابدأ بثلاث أوراق رسم بياني وورقة مقواة من الحجم نفسه.

1 **ضع** أوراق الرسم البياني فوق الورقة المقواة، ثم اطوِ الأوراق لتشكل مثلثًا، كما في الشكل، ثم قص الورق الزائد.



2 **ثبِّت** الحافة، بحيث تشكل الأوراق دفترًا، واكتب عنوان الفصل في الصفحة الأولى، ورقِّمْ كل درس وعنوانه في باقي الصفحات.



رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

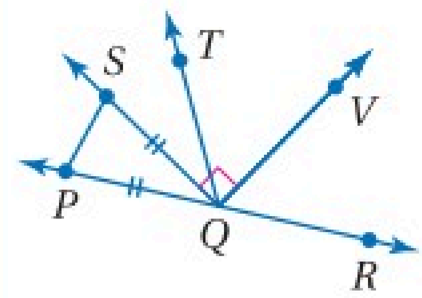
التهيئة للفصل 3

تشخيص الاستعداد:

أجب عن الاختبار الآتي، انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

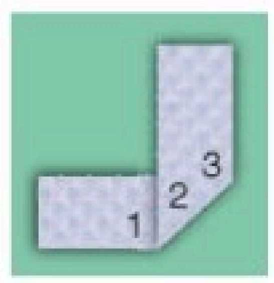
صنّف كل زاوية مما يأتي إلى قائمة أو حادّة أو منفرجة، ثم صنّف ΔSQP بحسب أضلاعه.



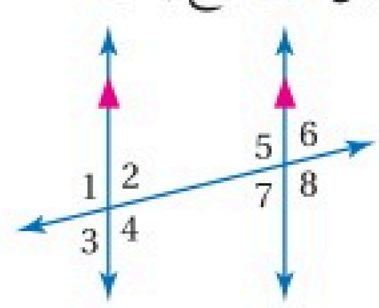
1) $\angle VQS$ (2 $\angle TQV$

3) $\angle PQV$

4) **تصاميم ورقية:** اطْوِ قطعة مستطيلة من الورق كما في الشكل المجاور، بحيث تتشكل زاوية قائمة من جهة الطي، ثم صنّف كلًّا من الزوايا المرقمة إلى قائمة أو منفرجة أو حادّة.



جبْر: استعمل الشكل أدناه لإيجاد المتغيِّر المطلوب في كلٍّ من السؤالين الآتيين. ووضِّح إجابتك:



5) أوجد قيمة x إذا علمت أنّ: $m\angle 3=(x-12)°$، وأنّ $m\angle 6=72°$

6) أوجد قيمة y . إذا علمت أنّ $m\angle 4 = (2y + 32)°$، وأنّ $m\angle 5 = (3y - 3)°$.

أوجد المسافة بين النقطتين في كلٍّ مما يأتي:

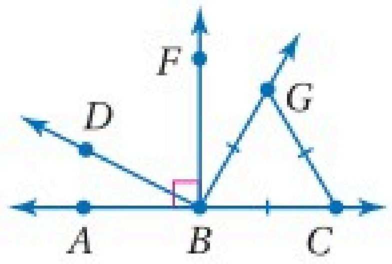
7) $X(-2, 5), Y(1, 11)$ (8 $R(8, 0), S(-9, 6)$

9) **خرائط:** قسَّمت منى خريطة المملكة برسم خطوط رأسية وأفقية، بحيث تمثل الوحدة عليها 35 كيلومترًا. إذا كان موقع المدينة التي تسكنها منى على الخريطة عند النقطة $(0, 0)$، وكانت مدينة نجران تقريبًا عند النقطة $(5, 2.2)$، فاحسب المسافة بين المدينتين إلى أقرب كيلومتر تقريبًا.

مراجعة سريعة

مثال 1

صنِّف كل زاوية مما يأتي إلى قائمة أو حادّة أو منفرجة، ثم صنِّف ΔGBC بحسب أضلاعه.



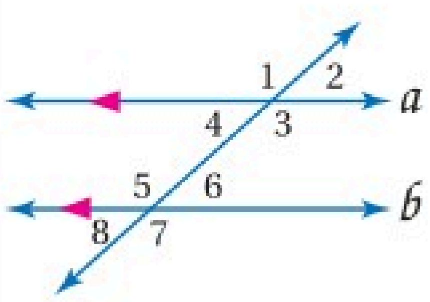
a) $\angle ABG$ تقع النقطة G خارج الزاوية القائمة $\angle ABF$؛ لذا تكون $\angle ABG$ زاوية منفرجة.

b) $\angle DBA$ تقع النقطة D داخل الزاوية القائمة $\angle FBA$؛ لذا تكون $\angle DBA$ زاوية حادة.

بما أن أطوال أضلاع المثلث جميعها متطابقة إذن هو متطابق الأضلاع.

مثال 2

في الشكل المجاور، إذا كان $m\angle 4 = 42°$، فأوجد $m\angle 7$.



$\angle 7$ و $\angle 1$ زاويتان متبادلتان خارجيًّا؛ لذا فهما زاويتان متطابقتان. $\angle 1$ و $\angle 4$ تشكِّلان زاوية مستقيمة؛ لذا فهما زاويتان متكاملتان. ينتج مما سبق أن $\angle 7$ و $\angle 4$ متكاملتان؛ إذن: $m\angle 7 = 180° - 42°$، أي $138°$

مثال 3

أوجد المسافة بين النقطتين $J(5, 2), K(11, -7)$.

$$JK = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$ صيغة المسافة بين نقطتين

$$= \sqrt{(11 - 5)^2 + [(-7) - 2]^2}$$ عوِّض

$$= \sqrt{6^2 + (-9)^2}$$ اطرح

$$= \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117}$$ بسِّط

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

3-1 تصنيف المثلثات
Classifying triangles

فيما سبق:

درست قياس الزوايا وتصنيفها.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أستعمل تصنيف المثلثات وفقًا لأضلاعها أو زواياها في إيجاد قيمٍ مجهولةٍ.

المفردات:

المثلث الحاد الزوايا
acute triangle

المثلث المنفرج الزاوية
obtuse triangle

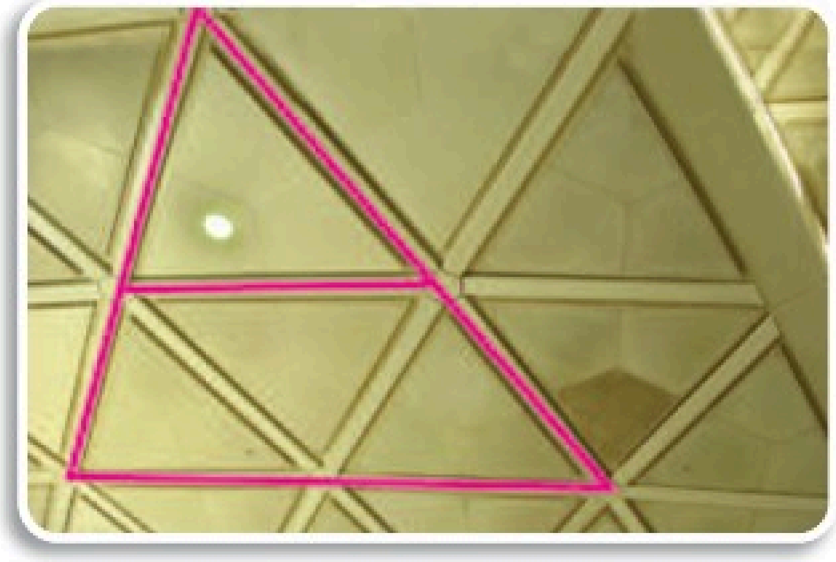
المثلث القائم الزاوية
right triangle

المثلث المتطابق الأضلاع
equilateral triangle

المثلث المتطابق الضلعين
isosceles triangle

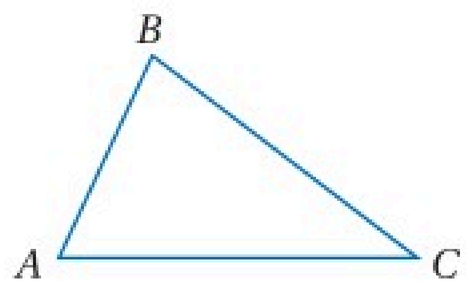
المثلث المختلف الأضلاع
scalene triangle

لماذا؟



يعدُّ المثلث عنصرًا زخرفيًّا مميزًا في العمارة التقليدية في المملكة العربية السعودية، كما يلاحظ ذلك في صالات المسافرين بمطار الملك خالد الدولي بمدينة الرياض.

تصنيف المثلثات وفقًا لزواياها: يكتب المثلث ABC على الصورة $\triangle ABC$ ، وتُسمى عناصره باستعمال الأحرف A , B , C كما يلي:

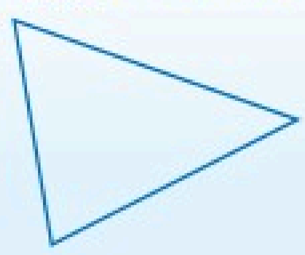
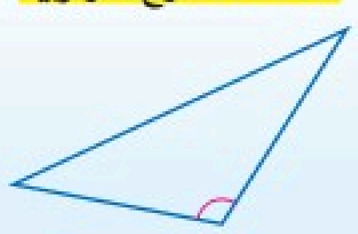
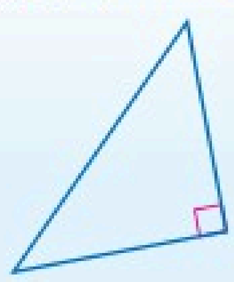


- أضلاع $\triangle ABC$ هي: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$
- الرؤوس هي: A , B , C
- الزوايا هي: $\angle A$ أو $\angle BAC$, $\angle C$ أو $\angle BCA$, $\angle B$ أو $\angle ABC$

وتُصنّف المثلثات بطريقتين: وفقًا لزواياها أو أضلاعها. وتحتوي جميع المثلثات على زاويتين حادتين على الأقل، وتُستعمل الزاوية الثالثة لتصنيف المثلث.

مفهوم أساسي: تصنيف المثلثات وفقًا لزواياها

أضف إلى مطويتك

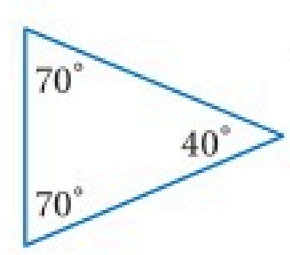
مثلث حاد الزوايا	مثلث منفرج الزاوية	مثلث قائم الزاوية
		
3 زوايا حادة	إحدى الزوايا منفرجة	إحدى الزوايا قائمة

يمكن تصنيف أي مثلث وفقًا لزواياه إلى أحد التصنيفات السابقة، بمعرفة قياسات زواياه.

مثال 1 تصنيف المثلثات وفقًا لزواياها

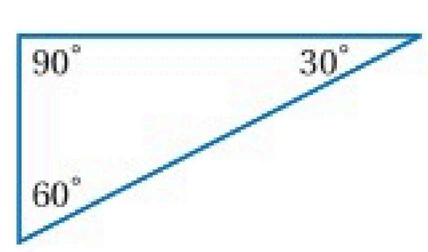
صنّف كلًّا من المثلثين الآتيين وفقًا لزواياه:

a)



زوايا المثلث الثلاث حادّة؛ لذا فالمثلث حادُّ الزوايا.

b)



قياس إحدى زوايا هذا المثلث $90°$ ، وبما أن إحدى زواياه قائمة، فإنه مثلث قائم الزاوية.

مراجعة المفردات

الزاوية الحادة: زاوية يقل قياسها عن 90°

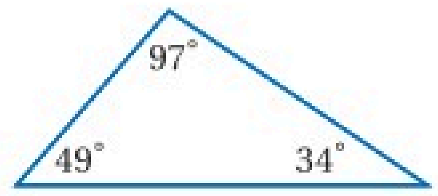
الزاوية القائمة: زاوية قياسها 90°

الزاوية المنفرجة: زاوية قياسها أكبر من 90°

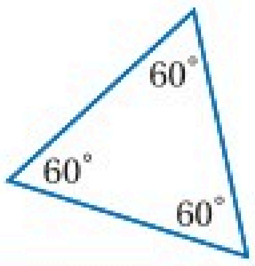
تحقق من فهمك

صنِّف كلًّا من المثلثين الآتيين وفقًا لزواياه:

(1A

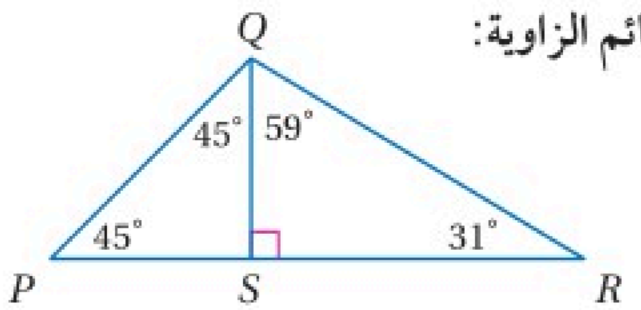


(1B



مثال 2 تصنيف المثلثات ضمن أشكال مختلفة وفقًا لزواياها

صنِّف $\triangle PQR$ إلى حادّ الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:



تقع النقطة S داخل $\angle PQR$، وحسب مسلّمة جمع قياسات الزوايا

يكون: $m\angle PQR = m\angle PQS + m\angle SQR$

بالتعويض: $m\angle PQR = 45^\circ + 59^\circ = 104^\circ$

وبما أن إحدى زوايا $\triangle PQR$ منفرجة، فإنه منفرج الزاوية.

تحقق من فهمك

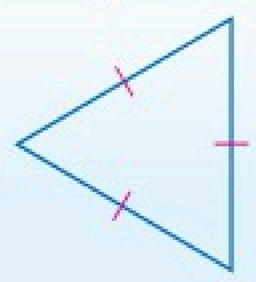
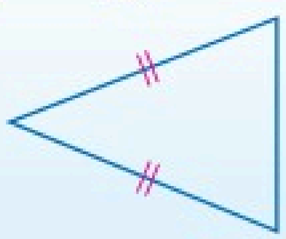
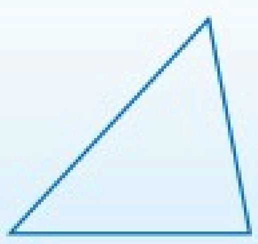
2) استعمل الشكل أعلاه لتصنيف $\triangle PQS$ إلى: حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية.

تصنيف المثلثات وفقًا لأضلاعها: يمكن كذلك تصنيف المثلثات بحسب عدد الأضلاع المتطابقة فيها. وللدلالة على تطابق ضلعين في مثلث، يوضع عدد متساوٍ من الشرطات الصغيرة على الضلعين المتطابقين.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

تصنيف المثلثات وفقًا لأضلاعها

مثلث متطابق الأضلاع	مثلث متطابق الضلعين	مثلث مختلف الأضلاع
		
3 أضلاع متطابقة	ضلعان على الأقل متطابقان	لا توجد أضلاع متطابقة

إن المثلث المتطابق الأضلاع حالة خاصة من المثلث المتطابق الضلعين.

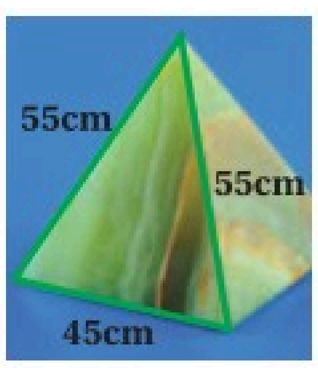
الربط مع الحياة

في العديد من السيارات، تُشغَّل أضواء الخطر بالضغط على زرّ صغير قرب المقْود. يكون شكل هذا الزر عادة مثلثًا أحمر أو برتقاليًا صغيرًا كما في الشكل أعلاه.

عندما يشغَّل هذا الزر تضيء أضواء إشارات الانعطاف بطريقة تحذيرية، وبنمط خاص يسهِّل رؤية السيارة من قبل السائقين الآخرين.

مثال 3 من واقع الحياة تصنيف المثلثات وفقًا لأضلاعها

فن العمارة: **صنِّف المثلث في الشكل المجاور وفقًا لأضلاعه.**



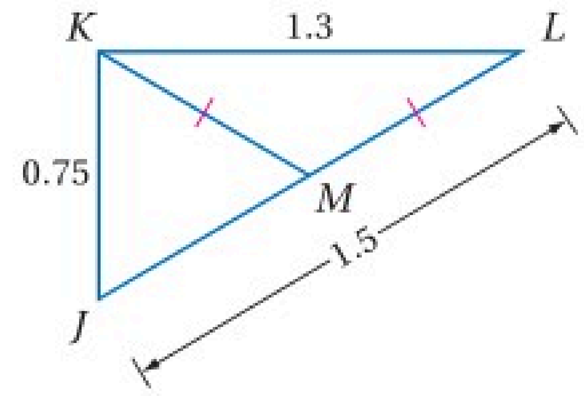
في المثلث ضلعان قياس كلٍّ منهما 55 cm؛ أيْ أنّه في المثلث ضلعين متطابقين.

فيكون المثلث متطابق الضلعين.

تحقق من فهمك

3) **قيادة السيارة والسلامة:** صنِّف شكل زرِّ ضوءِ الخطر في الهامش يمين الصفحة وفقًا لأضلاعه.

مثال 4 تصنيف المثلثات ضمن أشكال مختلفة وفقًا لأضلاعها



إذا كانت M نقطة منتصف $\overline{JL}$ ، فصنِّف $\triangle JKM$ إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع. ووضِّح إجابتك.

من تعريف نقطة المنتصف $JM = ML$.

$JM + ML = JL$	مسلمة جمع قياسات القطع المستقيمة
$ML + ML = 1.5$	عوِّض
$2ML = 1.5$	بسِّط
$ML = 0.75$	اقسم الطرفين على 2
$JM = ML = 0.75$	

وبما أن $\overline{KM} \cong \overline{ML}$، فإنّ $KM = ML = 0.75$

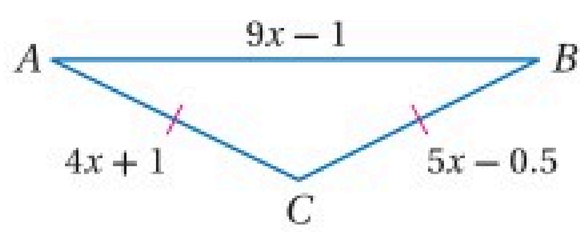
وهكذا تكون قياسات أضلاع المثلث الثلاثة متساوية، أي أن الأضلاع الثلاثة متطابقة؛ لذا فإن المثلث متطابق الأضلاع.

✓ تحقق من فهمك

4) صنِّف $\triangle KML$ إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع. ووضِّح إجابتك.

يمكنك استعمال خصائص المثلثات المتطابقة الأضلاع والمتطابقة الضلعين؛ لإيجاد قيمٍ مجهولةٍ كما في المثال الآتي:

مثال 5 إيجاد قيم مجهولة



جبر: أوجد قياسات أضلاع المثلث المتطابق الضلعين ABC في الشكل المجاور.

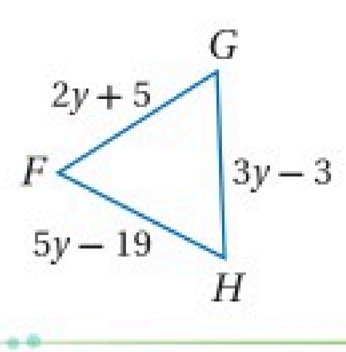
الخطوة 1: أوجد قيمة x.

$AC = CB$	مُعطى
$4x + 1 = 5x - 0.5$	عوِّض
$1 = x - 0.5$	اطرح $4x$ من الطرفين
$1.5 = x$	اجمع 0.5 إلى الطرفين

الخطوة 2: عوّض لإيجاد طول كل ضلع من أضلاع المثلث:

$AC = 4x + 1$	مُعطى
$= 4(1.5) + 1 = 7$	$x = 1.5$
$CB = AC$	مُعطى
$= 7$	$AC = 7$
$AB = 9x - 1$	مُعطى
$= 9(1.5) - 1$	$x = 1.5$
$= 12.5$	بسِّط

✓ تحقق من فهمك



5) أوجد قياسات أضلاع المثلث المتطابق الأضلاع FGH.

إرشادات للدراسة

تحقق

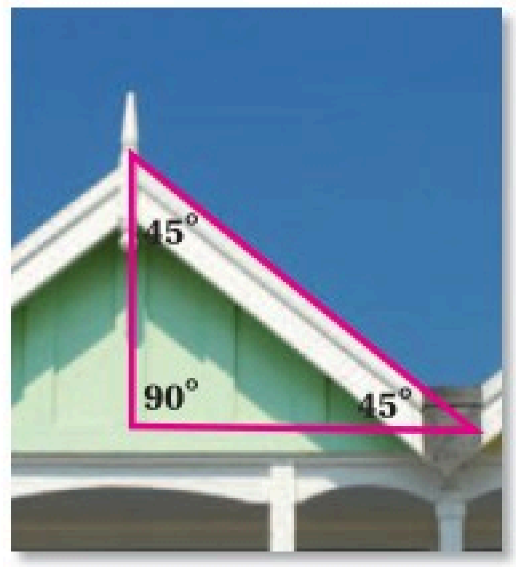
للتحقق من الإجابة في المثال 5 ، اختبر ما إذا كانت $CB = AC$ عندما نعوّض بـ 1.5 مكان x في العبارة $5x - 0.5$ التي تمثل CB.

$CB = 5x - 0.5$
$= 5(1.5) - 0.5$
$= 7$ ✓

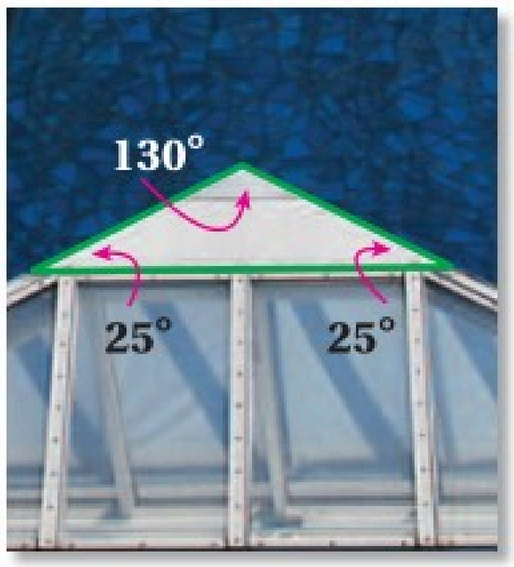
تأكد

المثال 1 **فنّ العمارة:** صنّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لزواياه.

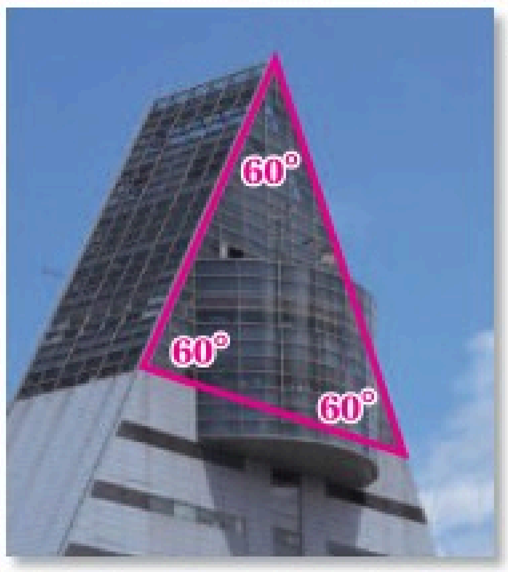
1)



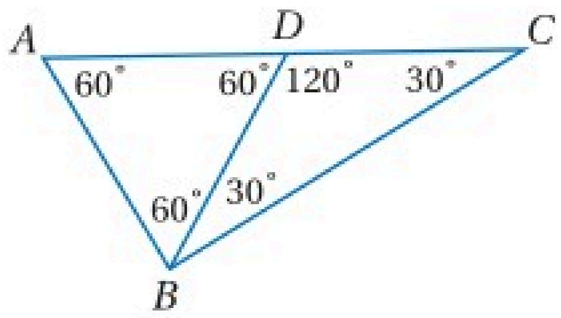
2)



3)



المثال 2 صنّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لزواياه.



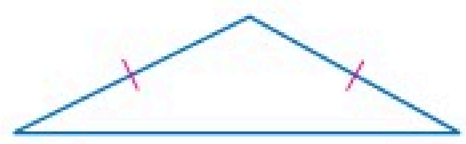
4) $\triangle ABD$

5) $\triangle BDC$

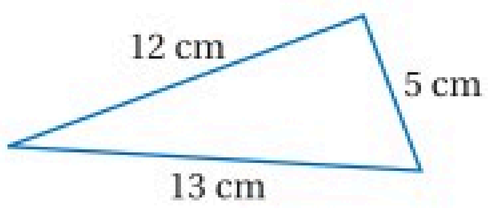
6) $\triangle ABC$

المثال 3 صنّف كلًّا من المثلثين الآتيين وفقًا لأضلاعه.

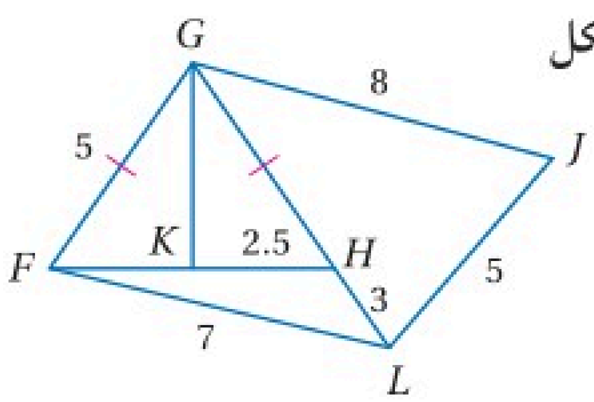
7)



8)



المثال 4 إذا كانت النقطة K هي منتصف $\overline{FH}$ ، فصنّف كلًّا من المثلثات الآتية في الشكل المجاور إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع:



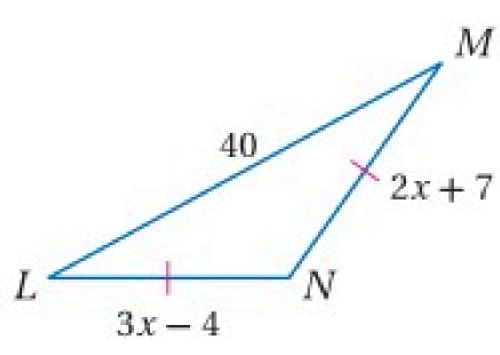
9) $\triangle FGH$

10) $\triangle GJL$

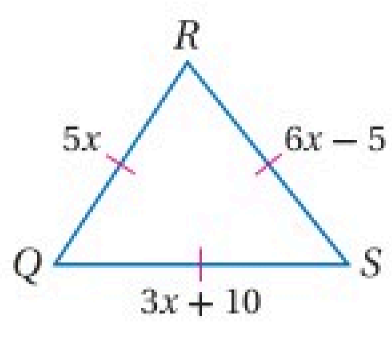
11) $\triangle FHL$

المثال 5 **جبر:** أوجد قيمة x وأطوال الأضلاع المجهولة في كلٍّ من المثلثين الآتيين:.

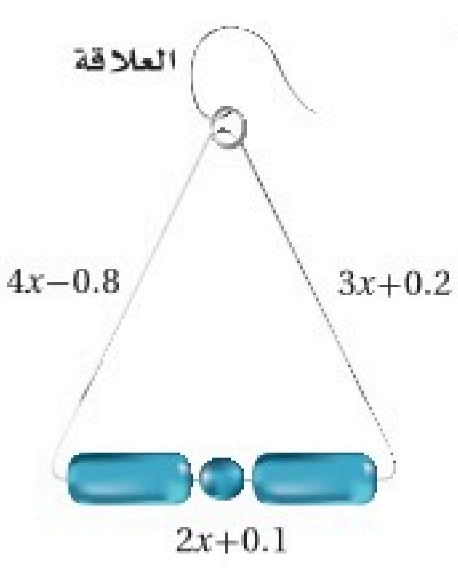
12)



13)



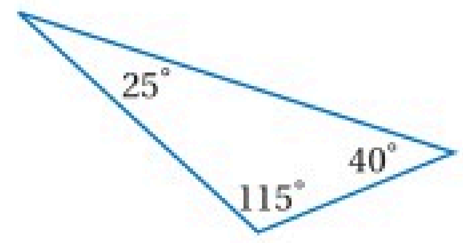
14) **مجوهرات:** افترض أن لديك سلكًا مرنًا من الفولاذ غير قابل للصدأ، وتريد أن تُشكِّله لتعمل قرطًا. إذا كان الجزء المثلث من القرط متطابق الضلعين، وأبعاده كما في الصورة، وطول جزء العلاقة 1.5 cm، فكم سنتمترًا من السلك تحتاج لعمل القرط؟ برِّر إجابتك.



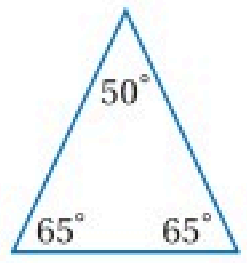
تدرب وحل المسائل

المثال 1 صنِّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لزواياه:

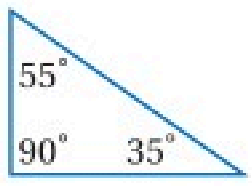
15)



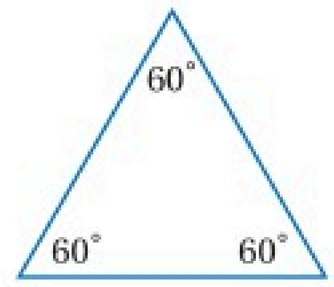
16)



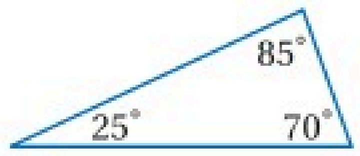
17)



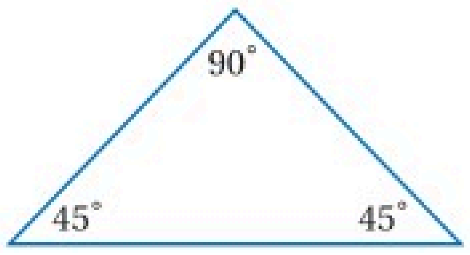
18)



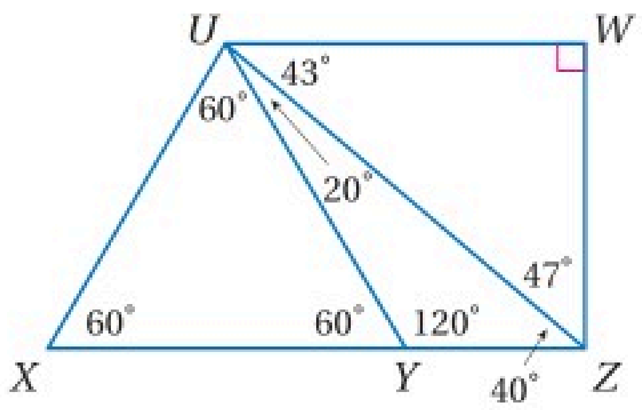
19)

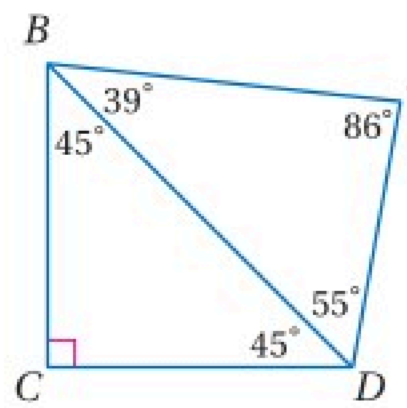


20)



المثال 2 صنِّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لزواياه:





21) $\triangle UYZ$

22) $\triangle BCD$

23) $\triangle ADB$

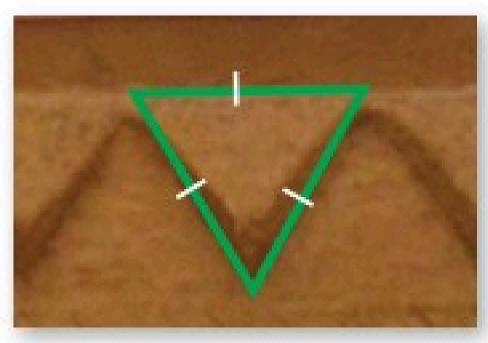
24) $\triangle UXZ$

25) $\triangle UWZ$

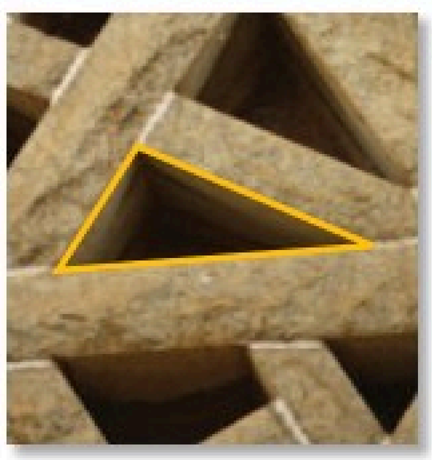
26) $\triangle UXY$

المثال 3 صنِّف كلًّا من المثلثين الآتيين وفقًا لأضلاعه:

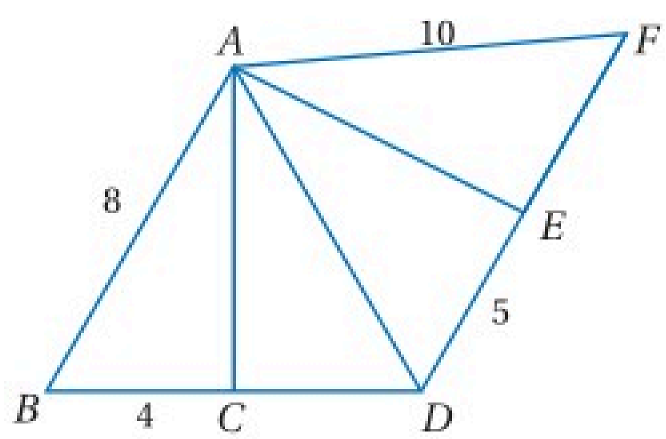
27)



28)



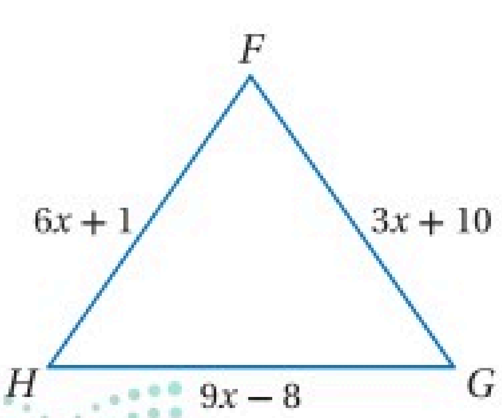
المثال 4 إذا كانت النقطة C هي منتصف $\overline{BD}$ ، والنقطة E منتصف $\overline{DF}$ ، فصنِّف كلًّا من المثلثات الآتية وفقًا لأضلاعها:

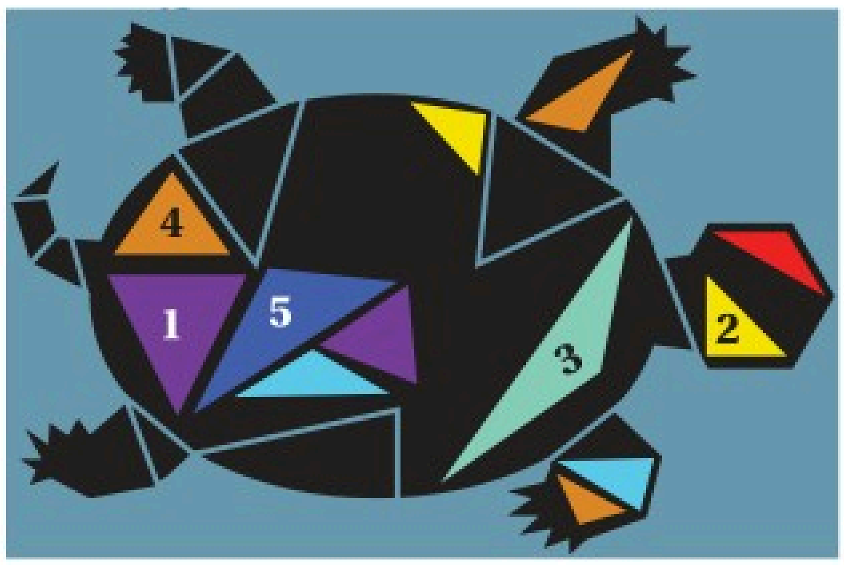


29) $\triangle ABC$ **30)** $\triangle ADF$

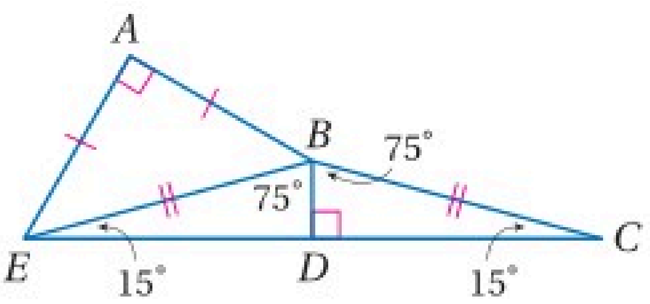
31) $\triangle ACD$ **32)** $\triangle ABD$

المثال 5 **33)** **جبر:** إذا علمت أن المثلث $\triangle FGH$ متطابق الأضلاع، فأوجد قيمة x وطول كل ضلع من أضلاعه.





34) فنّ تشكيلي: صنِّف كلًّا من المثلثات المرقمة في الشكل وفق زواياه ثم وفق أضلاعه. استعمل المثلث القائم الزاوية لتصنيف الزوايا، والمسطرة لقياس الأضلاع.



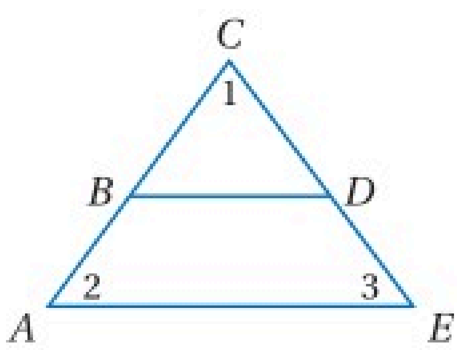
صنِّف كلًّا من المثلثات الظاهرة في الشكل المجاور وفق زواياه، ثم وفق أضلاعه:

35) $\triangle ABE$ 36) $\triangle EBC$ 37) $\triangle BDC$

هندسة إحداثية: **أوجد أطوال أضلاع $\triangle XYZ$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين، وصنِّفه وفق أضلاعه:**

38) $X(-5, 9), Y(2, 1), Z(-8, 3)$ 39) $X(7, 6), Y(5, 1), Z(9, 1)$

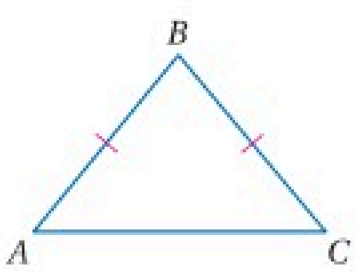
40) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين تبين فيه أنّ $\triangle BCD$ متطابق الزوايا، إذا كان $\triangle ACE$ متطابق الزوايا، وكانت $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$.



جبر: **أوجد قيمة x وأطوال أضلاع المثلث في كلٍّ مما يأتي:**

41) $\triangle FGH$ مثلث متطابق الأضلاع فيه: $FG = 3x - 10$, $GH = 2x + 5$, $HF = x + 20$.

42) $\triangle RST$ متطابق الأضلاع. ويزيد RS ثلاثة على أربعة أمثال x، ويزيد ST سبعة على مثلَي x، ويزيد TR واحدًا على خمسة أمثال x .



43) تمثيلات متعددة: في هذه المسألة ستكتشف العلاقة بين قياسَي الزاويتين اللتين تقابلان ضلعين متطابقين في مثلث، ومجموع زوايا المثلث المتطابق الضلعين.

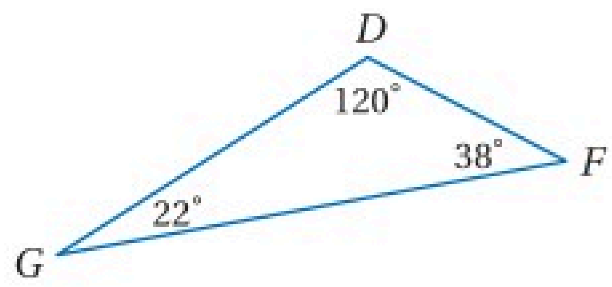
a) **هندسيًّا:** ارسم أربعة مثلثات متطابقة الضلعين، منها مثلث حادّ الزوايا ومثلث قائم الزاوية، ومثلث منفرج الزاوية. وفي كلٍّ من هذه المثلثات سمِّ الرأسيْن المقابلين للضلعين المتطابقين A, C، وسمِّ الرأس الثالث B. ثم قس زوايا كل مثلث، واكتب على كل زاوية قياسها.

b) **جدوليًّا:** رتِّب قياسات الزوايا في جدول. وضمِّنه عمودًا تكتب فيه مجموع قياسات هذه الزوايا.

c) **لفظيًّا:** خمّن العلاقة بين قياسَيْ الزاويتين اللتين تقابلان الضلعين المتطابقين في مثلث متطابق الضلعين، ثم خمّن مجموع قياسات زوايا المثلث المتطابق الضلعين.

d) **جبريًّا:** إذا كان قياس إحدى الزاويتين اللتين تقابلان الضلعين المتطابقين في مثلث متطابق الضلعين هو x، فاكتب عبارتين جبريتين تمثِّلان قياسَيْ الزاويتين الأخريين. وفسِّر إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا



44) اكتشف الخطأ: تقول ليلى: إن $\triangle DFG$ منفرج الزاوية، لكن نوال لا توافقها الرأي وتقول: إن عدد الزوايا الحادة في المثلث أكثر من عدد الزوايا المنفرجة؛ لذا فإن المثلث حادّ الزوايا. أيّتهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسر إجابتك.

تبرير: قرِّر ما إذا كانت الجملة في كلٍّ مما يأتي صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائمًا أو غير صحيحة أبدًا. ووضح إجابتك.

45) المثلث المتطابق الزوايا هو مثلث قائم الزاوية أيضًا.

46) المثلث المتطابق الأضلاع هو مثلث متطابق الضلعين أيضًا.

47) تحدٍّ: إذا كان طولا ضلعين من أضلاع مثلث متطابق الأضلاع $5x + 5$ وحدات، $7x - 5$ وحدات، فما محيطه؟ فسِّر إجابتك.

48) اكتب: فسِّر لماذا يُعد تصنيف المثلث المتطابق الزوايا أنه مثلث حاد متطابق الزوايا، تصنيفًا غير ضروري؟

تدريب على اختبار

49) جبر: اشترى خالد معجمًا من معرض الكتب بعد تخفيض نسبته 40٪ . إذا كان ثمنه قبل التخفيض 84.50 ريالًا، فكم ريالًا وفّر خالد؟

A 50.70 ريالًا　　**C** 33.80 ريالًا

B 44.50 ريالًا　　**D** 32.62 ريالًا

50) ما ميل المستقيم الذي معادلته $2x + y = 5$ ؟

A 2　　**C** -1

B $\frac{5}{2}$　　**D** -2

مراجعة تراكمية

أوجد المسافة بين المستقيمين المتوازيين في كلٍّ ممّا يأتي: (مهارة سابقة)

51) $x = -2 , x = 5$

52) $y = x + 2 , y = x - 4$

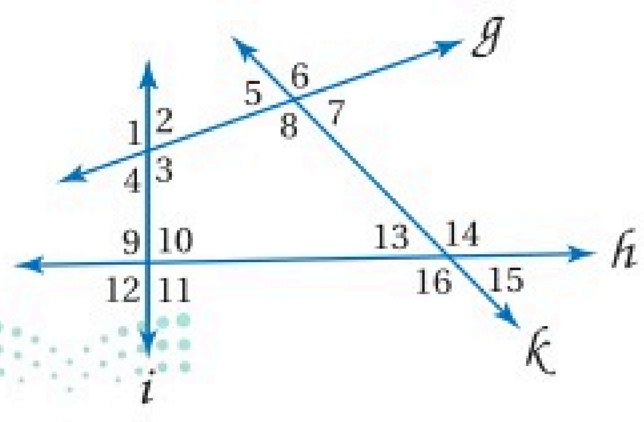
53) كرة قدم: رسم مصطفى الخطَّين الجانبيَّين لتخطيط ملعب كرة قدم، ووضع علامات على أحدهما، بحيث كانت المسافة بين أي علامتين متتابعتين 9 m، ثم أنشأ أعمدة عند هذه العلامات. فسِّر لماذا تكون هذه الأعمدة متوازية. (مهارة سابقة)

حدِّد الفرض والنتيجة في كل جملة شرطية فيما يأتي: (مهارة سابقة)

54) إذا كان الرجل كهلًا، فإن عمره 40 سنة على الأقل.

55) إذا كان $2x + 6 = 10$ ، فإن $x = 2$.

استعد للدرس اللاحق



صنِّف كل زوج من الزوايا مما يأتي إلى متبادلتين داخليًّا أو متبادلتين خارجيًّا أو متناظرتين أو متحالفتين:

56) $\angle 5$ و $\angle 3$

57) $\angle 9$ و $\angle 4$

58) $\angle 11$ و $\angle 13$

59) $\angle 1$ و $\angle 11$

استكشاف

3-2 معمل الهندسة
زوايا المثلثات
Angles of Triangles

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

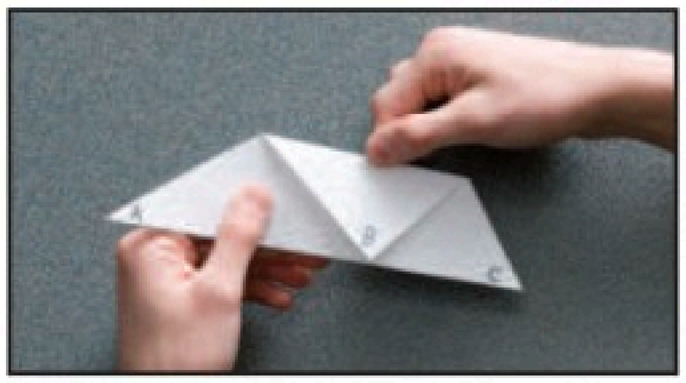
ستجد علاقات خاصة بين زوايا المثلث في هذا المعمل.

النشاط 1 الزوايا الداخلية للمثلث

الخطوة 1:

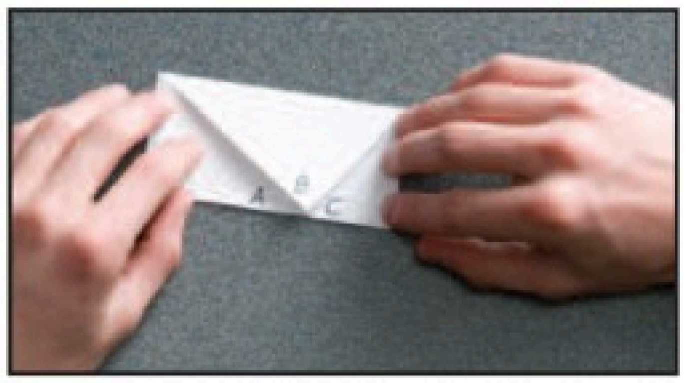
ارسم عدة مثلثات مختلفة ثم قصّها، وسمِّ رؤوس كل مثلث A , B , C .

الخطوة 2:



اطوِ الرأس B في كل مثلث، على أن يكون خطُّ الطيّ موازيًا لـ AC. وأعِد تسمية الرأس B على الورقة بعد طيّها.

الخطوة 3:



اطوِ الرأسين A , C حتى يلتقيا مع الرأس B. أعِدْ تسمية الرأسين A , C بعد الطيّ.

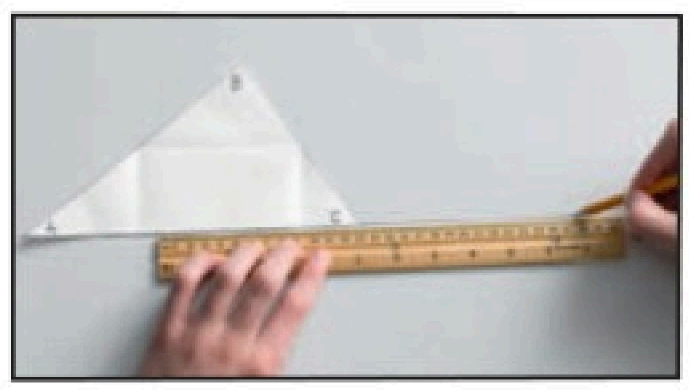
حلِّل النتائج:

1) الزوايا A , B , C تُسمى زوايا داخلية في المثلث ABC . ما اسم الشكل الهندسي الناتج بعد التقاء الرؤوس A , B , C في الخطوة 3؟

2) خمِّن مجموع قياسات الزوايا الداخلية في المثلث.

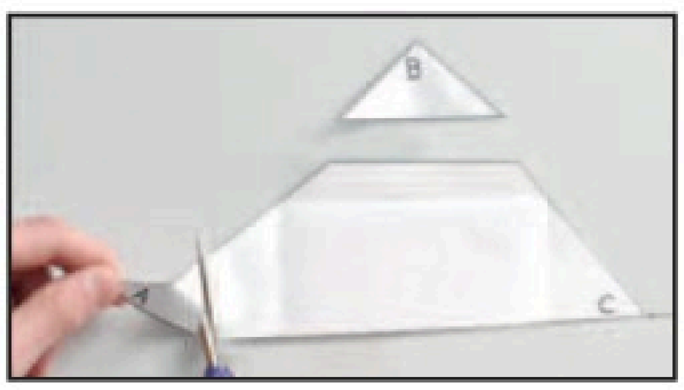
النشاط 2 الزوايا الخارجية للمثلث

الخطوة 1:



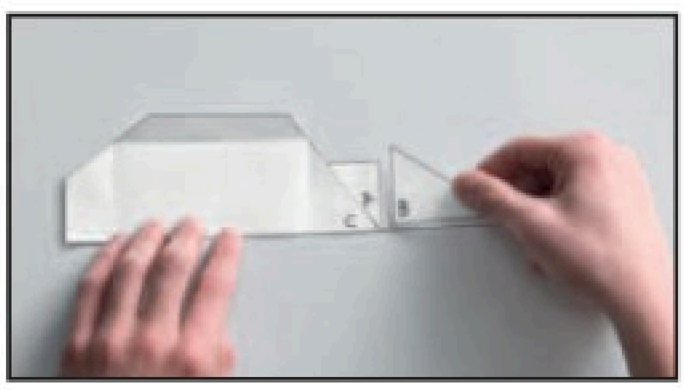
ابسط المثلثات التي استعملتها في النشاط 1، وضع كل مثلث على ورقة منفصلة. مُدّ $\overline{AC}$ كما في الشكل.

الخطوة 2:



افصل الزاويتين $\angle A$, $\angle B$ في كل مثلث.

الخطوة 3:



ضع $\angle A$, $\angle B$ على أن تشكّلا الزاوية المجاورة لِـ $\angle C$ كما في الشكل.

حلِّل النتائج:

3) الزاوية المجاورة لِـ $\angle C$ تُسمّى زاوية خارجية للمثلث ABC. خمِّن العلاقة بين الزاويتين $\angle A$, $\angle B$ من جهة، والزاوية الخارجية عند C.

4) كرِّر خطوات النشاط 2 بالنسبة للزاويتين الخارجيتين عند $\angle A$, $\angle B$ في كل مثلثٍ.

5) خمِّن العلاقة بين قياس الزاوية الخارجية ومجموع قياسَي الزاويتين الداخليتين عدا المجاورة لها.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

3-2 زوايا المثلثات
Angles of Trangles

فيما سبق:

درست تصنيف المثلثات وفقًا لقياسات أضلاعها وزواياها.

(الدرس 1-3)

والآن:

- أطبق نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث.
- أطبق نظرية الزاوية الخارجية للمثلث.

المفردات:

المستقيم المساعد
auxiliary line

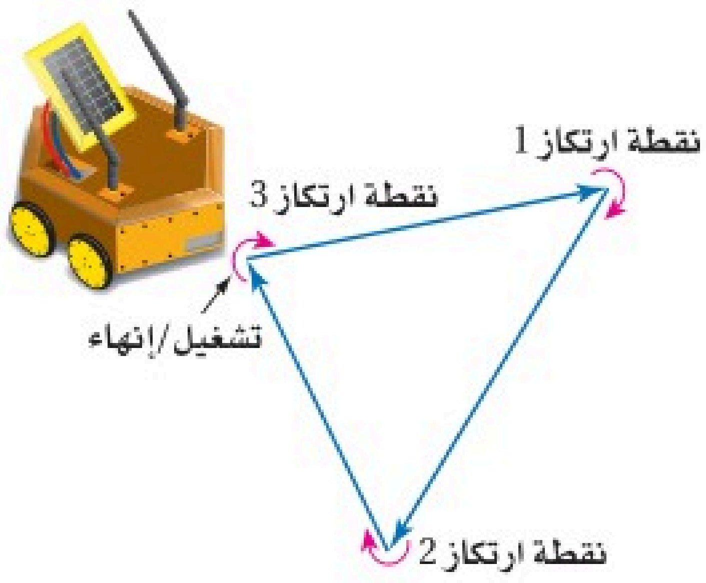
الزاوية الخارجية
exterior angle

الزاويتان الداخليتان البعيدتان
remote interior angles

البرهان التسلسليّ
flow proof

النتيجة
corollary

لماذا؟



يرعى أحد معاهد التقنية مسابقة سنوية، حيث يصمِّم الطلاب روبوتًا آليًّا يؤدّي مهامّ مختلفة. وقد تمَّت برمجة هذا الروبوت الآلي في أحد الاختبارات ليتحرك في مسار على شكل مثلث. على أن يكون مجموع قياسات الزوايا التي ينعطف فيها الروبوت الآلي عند نقاط الارتكاز الثلاث ثابتًا دائمًا.

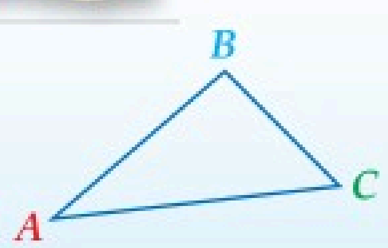
نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث: تُعبِّر نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث عن العلاقة بين الزوايا الداخلية لأيّ مثلث.

نظرية 3.1 نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

أضف إلى مطويتك

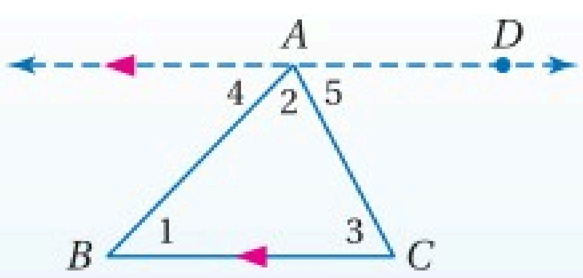
التعبير اللفظي: مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي $180°$

مثال: $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$



يتطلب برهان نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث استعمال مستقيم مساعِد، و**المستقيم المساعد** هو مستقيم إضافي (أو قطعة مستقيمة إضافية) يتم رسمه للمساعدة على تحليل العلاقات الهندسية، وكما تُبرر العبارات والاستنتاجات المُستعملة في البرهان، فإن خصائص المستقيم المساعِد يجب تبريرها.

برهان نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث



المعطيات: $\triangle ABC$

المطلوب: $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$

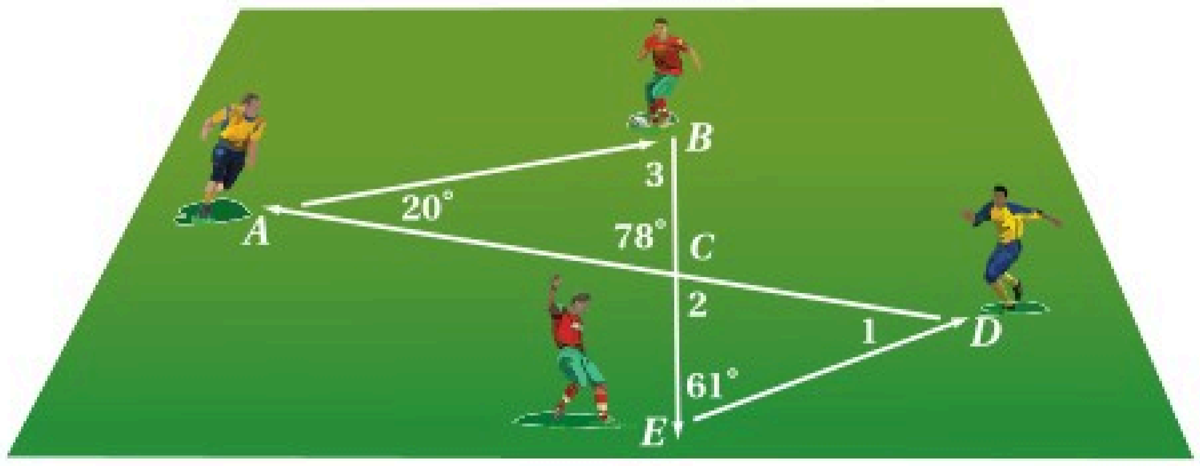
البرهان: من النقطة A ارسم المستقيم $\overleftrightarrow{AD}$ موازيًا لـِ $\overline{BC}$.

العبارات	المبررات
1) $\triangle ABC$	**1)** مُعطى
2) $\angle BAD$, $\angle 4$ زاويتان متجاورتان على مستقيم.	**2)** تعريف الزاويتين المتجاورتين على مستقيم
3) $\angle BAD$, $\angle 4$ متكاملتان.	**3)** الزاويتان المتجاورتان على مستقيم متكاملتان
4) $m\angle 4 + m\angle BAD = 180°$	**4)** تعريف الزاويتين المتكاملتين
5) $m\angle BAD = m\angle 2 + m\angle 5$	**5)** مسلّمة جمع قياسات الزوايا
6) $m\angle 4 + m\angle 2 + m\angle 5 = 180°$	**6)** بالتعويض
7) $\angle 4 \cong \angle 1$, $\angle 5 \cong \angle 3$	**7)** نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا
8) $m\angle 4 = m\angle 1$, $m\angle 5 = m\angle 3$	**8)** تعريف تطابُق الزوايا
9) $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$	**9)** بالتعويض

يمكن استعمال نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث لإيجاد الزاوية الثالثة في المثلث إذا عُلم قياسا زاويتيه الأُخريين.

مثال 1 من واقع الحياة — استعمال نظرية مجموع زوايا المثلث

كرة قدم: يبيِّن الشكل مسار الكرة في تدريب على تمريراتٍ نفَّذها أربعة لاعبين.
أوجد قياسات الزوايا المرقمة.



افهم: **المعطيات:** في الشكل أعلاه، قياس الزاويتين A, C في المثلث ABC ° 20°, 78، قياس الزاوية E في المثلث CED يساوي °61
المطلوب: إيجاد قياسات الزوايا المرقمة.

خطط: أوجد $m\angle 3$ باستعمال نظرية مجموع زوايا المثلث مستعملًا قياسَيْ الزاويتين الأُخريين في $\triangle ABC$. ثم استعمل نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس لإيجاد $m\angle 2$، وعندها يمكنك إيجاد $m\angle 1$ في $\triangle CDE$

حُلّ:

$m\angle 3 + m\angle BAC + m\angle ACB = 180°$ — نظرية مجموع زوايا المثلث

$m\angle 3 + 20° + 78° = 180°$ — عوِّض

$m\angle 3 + 98° = 180°$ — بسِّط

$m\angle 3 = 82°$ — اطرح 98 من الطرفين

$\angle ACB, \angle 2$ متطابقتان؛ لأنهما زاويتان متقابلتان بالرأس؛ لذا فإن $m\angle 2 = 78°$.
استعمل $m\angle 2$ و $m\angle CED$ في $\triangle CDE$ لإيجاد $m\angle 1$.

$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle CED = 180°$ — نظرية مجموع زوايا المثلث

$m\angle 1 + 78° + 61° = 180°$ — عوِّض

$m\angle 1 + 139° = 180°$ — بسِّط

$m\angle 1 = 41°$ — اطرح 139 من الطرفين

تحقَّق: يجب أن يكون مجموع قياسات زوايا كلٍّ من $\triangle CDE$, $\triangle ABC$ مساويًا لـ °180

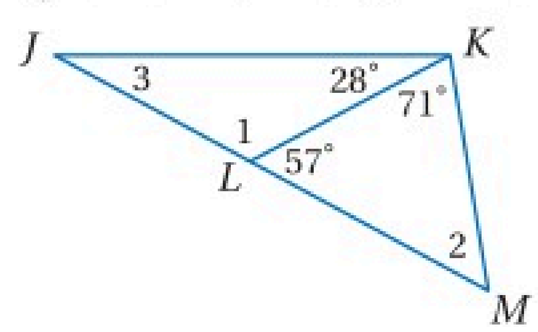
$\triangle ABC:\ m\angle 3 + m\angle BAC + m\angle ACB = 82° + 20° + 78° = 180°$ ✓

$\triangle CDE:\ m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle CED = 41° + 78° + 61° = 180°$ ✓

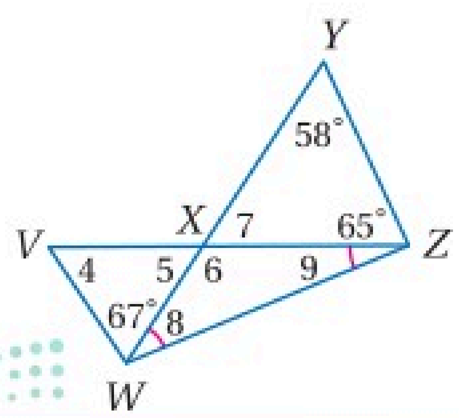
تحقق من فهمك

أوجد قياسات الزوايا المرقَّمة فيما يأتي:

(1A



(1B



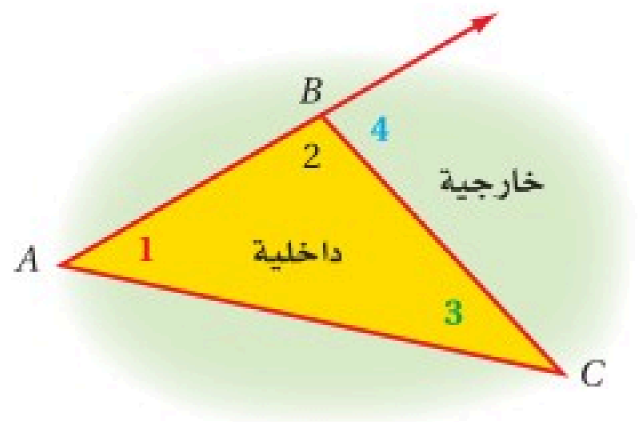
الربط مع الحياة

يدمج تمرين "مرِّر وتحرَّك" في لعبة كرة القدم بين عدة مظاهر أساسية لعملية التمرير، حيث تكون جميع التمريرات في التدريب على شكل مثلثات، وهذا هو الأساس في جميع حركات الكرة، وبالإضافة إلى ذلك، على اللاعب أن يتحرك فورًا بعد تمريره الكرة.

إرشادات للدراسة

تجزئة المسألة
تُجزأ المسائل المركبة إلى مسائل يمكن التعامل مع كلٍّ منها بسهولة؛ مما يساعد على حلّها. فمثلًا في المثال 1: عليك أن تجد $m\angle 2$ أولًا قبل أن تحاول إيجاد $m\angle 1$

نظرية الزاوية الخارجية للمثلث: بالإضافة إلى الزوايا الداخلية الثلاث، يمكن أن يكون للمثلث **زوايا خارجية** كلٌّ منها تتشكل من أحد أضلاع المثلث وامتداد ضلع مجاور له. ولكل زاوية خارجية **زاويتان داخليتان بعيدتان** غير مجاورتين لها.



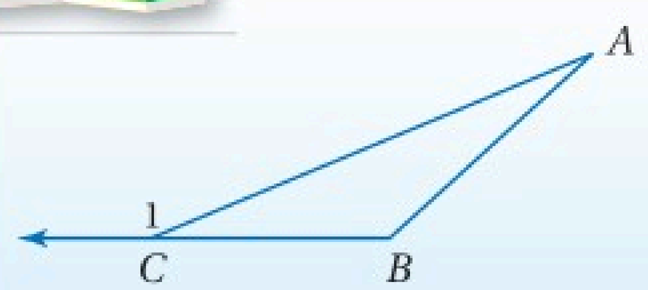
$\angle 4$ زاوية خارجية لـ $\triangle ABC$،
وزاوياتاها الداخليتان البعيدتان
هما $\angle 3$, $\angle 1$.

نظرية 3.2 نظرية الزاوية الخارجية

أضف إلى مطويتك

قياس الزاوية الخارجية في مثلث يساوي مجموع قياسَيْ الزاويتين الداخليتين البعيدتين.

مثال: $m\angle A + m\angle B = m\angle 1$



في **البرهان التسلسلي** تُستعمل عبارات مكتوبة في مستطيلات، وأسهم تبيِّن التسلسل المنطقي لهذه العبارات. ويُكتب أسفل كل مستطيل السبب الذي يبرِّر العبارة المكتوبة داخله، ويمكنك برهنة نظرية الزاوية الخارجية باستعمال البرهان التسلسليِّ كما يأتي.

قراءة الرياضيات

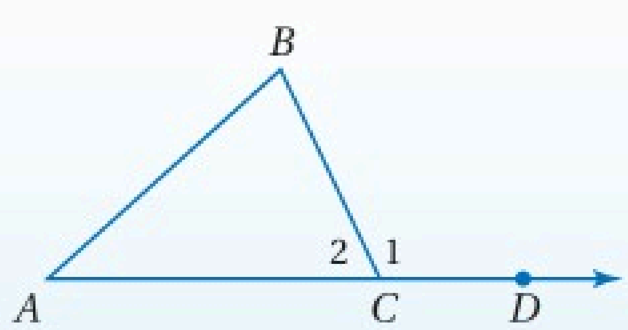
البرهان بالمخطط التسلسلي
يُسمَى البرهان التسلسلي أحيانًا البرهان بالمخطط التسلسلي.

البرهان نظرية الزاوية الخارجية

المعطيات: $\triangle ABC$

المطلوب: $m\angle A + m\angle B = m\angle 1$

برهان تسلسلي:



$\triangle ABC$
معطى
↓
$m\angle A + m\angle B + m\angle 2 = 180$
نظرية مجموع زوايا المثلث

$\angle 1, \angle 2$ زاويتان متجاورتان على مستقيم
تعريف الزاويتين المتجاورتين على مستقيم
↓
$\angle 1, \angle 2$ متكاملتان
الزاويتان المتجاورتان على مستقيم متكاملتان
↓
$m\angle 1 + m\angle 2 = 180$
تعريف الزاويتين المتكاملتين

↓
$m\angle A + m\angle B + m\angle 2 = m\angle 1 + m\angle 2$
بالتعويض
↓
$m\angle A + m\angle B = m\angle 1$
بالطرح

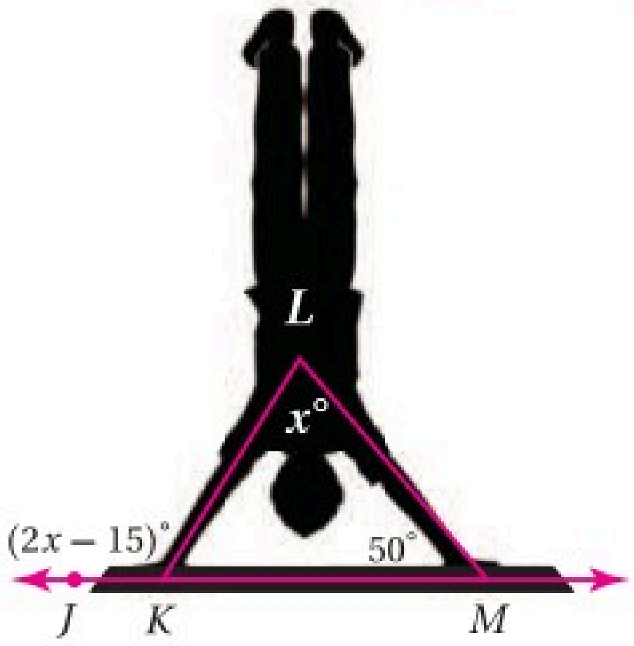
إرشادات للدراسة

البرهان التسلسلي
يمكن أن يكتب البرهان التسلسليَ بصورةٍ رأسيَة أو أفقيَة.

يمكن إيجاد قياسات الزوايا المجهولة باستعمال نظرية الزاوية الخارجية.

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال نظرية الزاوية الخارجية

اللياقة البدنية: أوجد قياس $\angle JKL$ في الوضع الذي يظهر فيه المتدرب في الصورة.

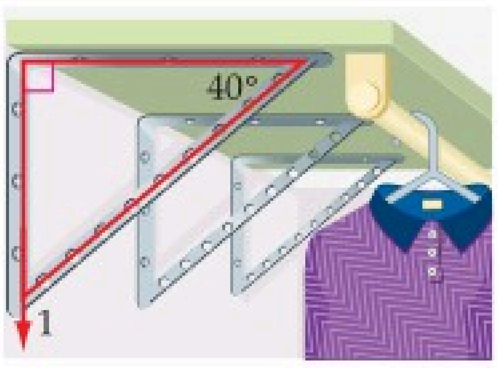


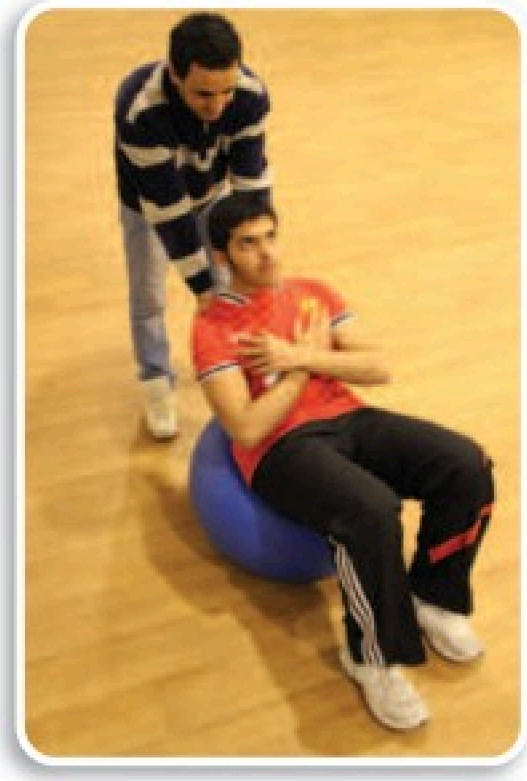
$m\angle KLM + m\angle LMK = m\angle JKL$	نظرية الزاوية الخارجية
$x + 50 = 2x - 15$	عوّض
$50 = x - 15$	اطرح x من الطرفين
$65 = x$	اجمع 15 إلى الطرفين

لذا فإن $m\angle JKL = (2(65) - 15)^\circ = 115^\circ$.

✓ تحقق من فهمك

2) **تنظيم خزانة الملابس:** تثبِّت لطيفة جسور الرفوف على جدار خزانتها. ما قياس $\angle 1$ التي يصنعها الجسر مع جدار الخزانة؟





الربط مع الحياة

المدرب المتخصص

يعلّم مدرّبو اللياقة البدنية المتدربين طرائق متنوعة ويحفزونهم على أدائها، ومن المهم أن يحمل هؤلاء المدربون شهادات تخصص في مجال عملهم.

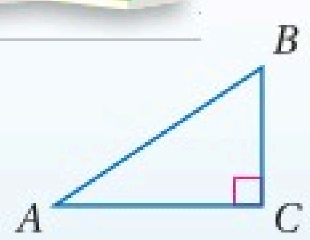
النتيجة هي نظرية يكون برهانها مبنيًّا على نظريةٍ أخرى، ويمكن استعمال النتيجة كأي نظرية أخرى لتبرير خطوات برهانٍ آخر، أو حلّ أسئلة ذات علاقة، وفيما يلي نتائج مباشرة لنظرية مجموع زوايا المثلث:

نتيجتان — مجموع زوايا المثلث

أضف إلى مطويتك

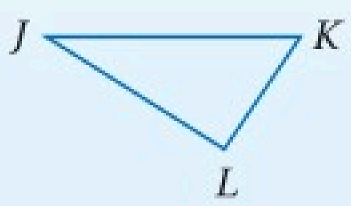
3.1 الزاويتان الحادتان في أي مثلث قائم الزاوية متتامتان.

مثال: إذا كانت $\angle C$ قائمة، فإن $\angle A$, $\angle B$ زاويتان متتامتان.



3.2 توجد زاوية قائمة واحدة، أو زاوية منفرجة واحدة على الأكثر في أي مثلث.

مثال: إذا كانت $\angle L$ قائمة، فإن $\angle J$, $\angle K$ زاويتان حادتان.



ستبرهن النتيجتين 3.1 , 3.2 في السؤالين 24 , 23

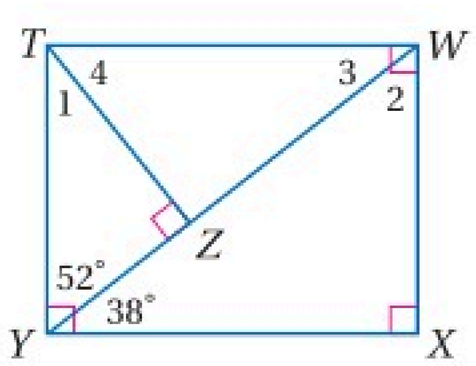
إرشادات للدراسة

التحقق من المعقولية

عندما تجد قياسات زوايا مثلث، تأكد دائمًا أن مجموع هذه القياسات يساوي °180.

مثال 3 — إيجاد قياسات الزوايا في مثلثات قائمة الزاوية

أوجد قياس كلٍّ من الزوايا المرقّمة في الشكل المجاور.



$m\angle 1 + m\angle TYZ = 90^\circ$	زاويتان حادتان في مثلث قائم الزاوية
$m\angle 1 + 52^\circ = 90^\circ$	عوّض
$m\angle 1 = 38^\circ$	اطرح 52 من الطرفين

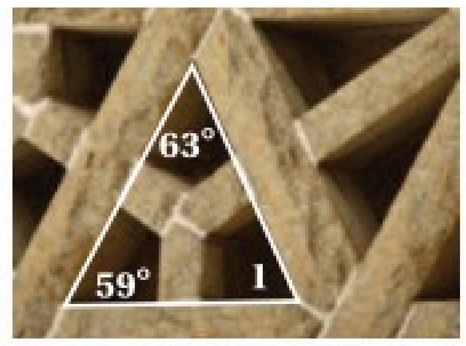
✓ تحقق من فهمك

3A) $\angle 2$ 3B) $\angle 3$ 3C) $\angle 4$

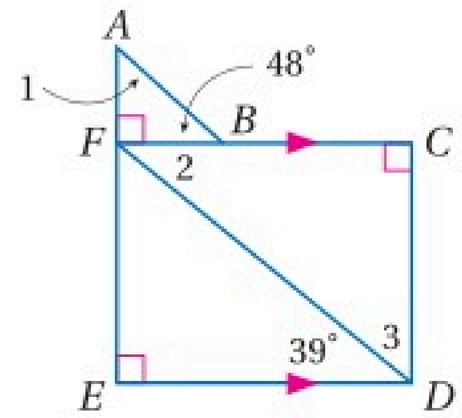
تأكد

المثال 1 أوجد قياس كلٍّ من الزوايا المرقّمة في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

(1



(2

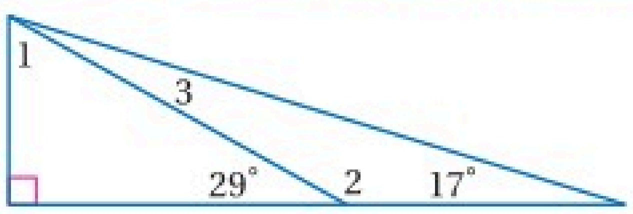


المثال 2 **كراسي الشاطئ:** تشكل دعامة المقعد مع بقية الهيكل مثلثًا كما هو موضح في الشكل المجاور. أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

(3 $m\angle 2$ **(4** $m\angle 4$

(5 $m\angle 1$ **(6** $m\angle 3$

المثال 3 معتمدًا على الشكل المجاور، أوجد القياسات التالية:



(7 $m\angle 1$

(8 $m\angle 3$

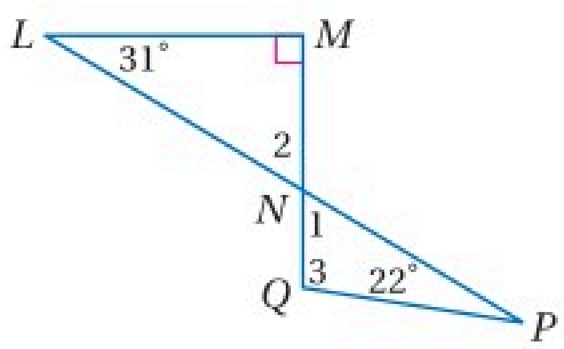
(9 $m\angle 2$

تدرب وحل المسائل

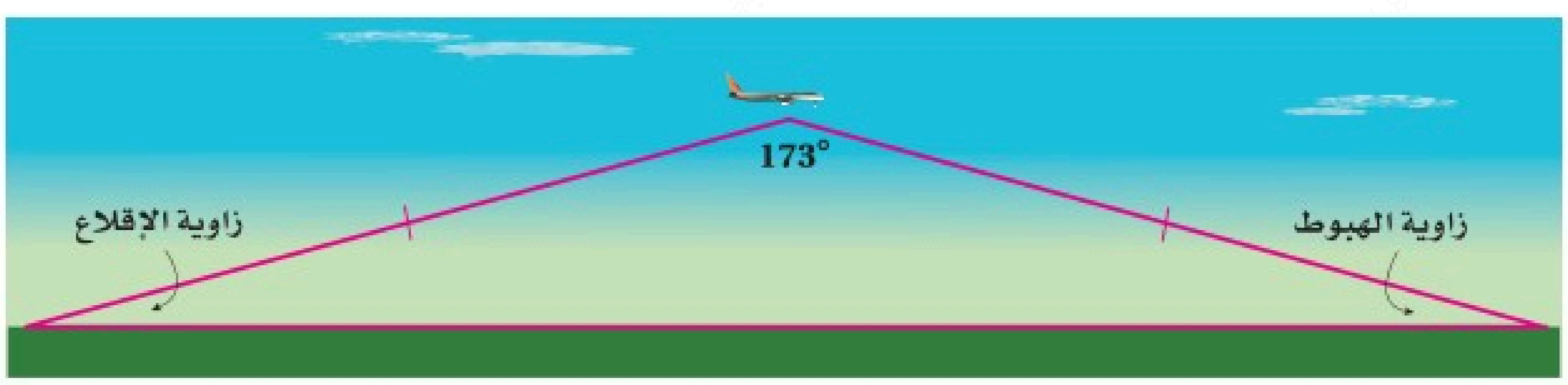
المثال 1 أوجد قياس الزوايا المرقّمة في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

(10

(11



(12 **طائرات:** يمكن تمثيل خطّ الطيران في رحلةٍ ما باستعمال ضلعَي مثلث كما في النموذج أدناه، علمًا بأن المسافة التي تقطعها الطائرة صعودًا تساوي المسافة التي تقطعها هبوطًا.

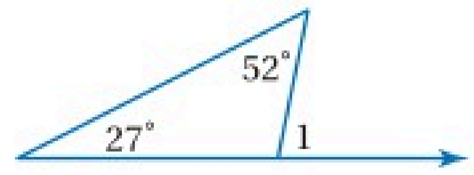


a) صنِّف النموذج بحسب الأضلاع والزوايا.

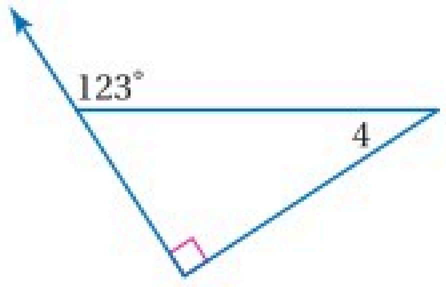
b) إذا كانت زاويتا الإقلاع والهبوط متطابقتين، فأوجد قياس كلٍّ منهما.

المثال 2 أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

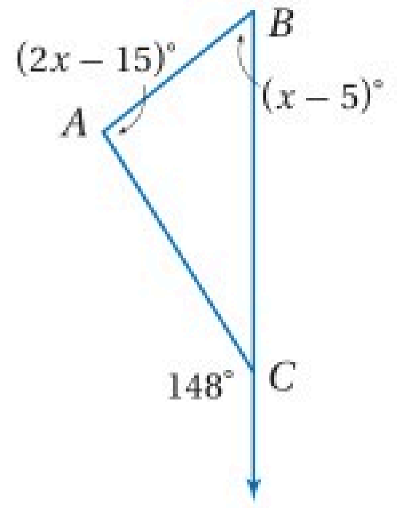
13) $m\angle 1$



14) $m\angle 4$



15) $m\angle ABC$



المثال 3 أوجد كلًّا من القياسات الآتية:

16) $m\angle 1$

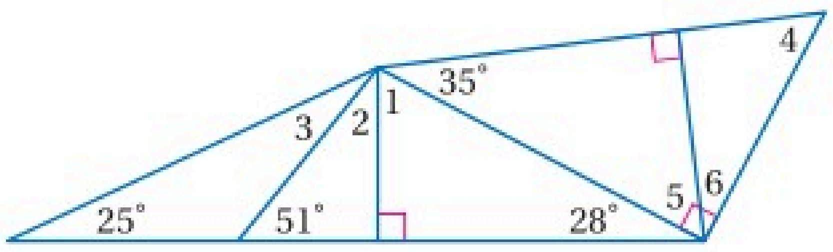
17) $m\angle 2$

18) $m\angle 3$

19) $m\angle 5$

20) $m\angle 4$

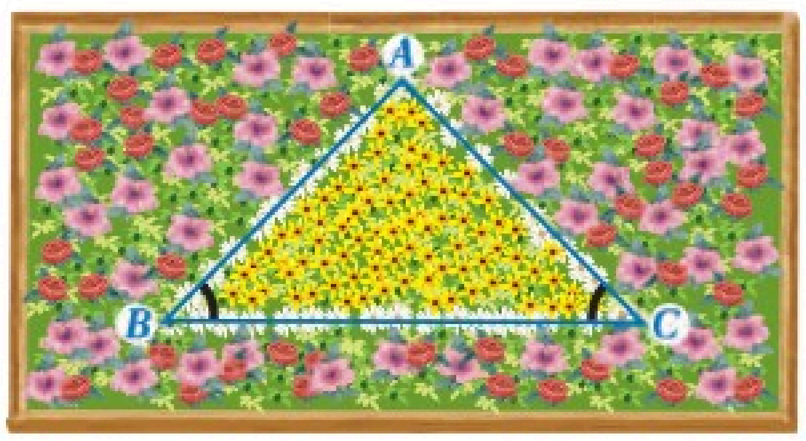
21) $m\angle 6$



الربط مع الحياة

يصل طول ساق زهرة الأقحوان إلى 30in، وتنقسم هذه النباتات إلى 13 صنفًا بحسب أشكال أزهارها.

22) **بستنة:** استَنْبَتَ مهندس زراعيّ زهور أقحوان في حوض على شكل مثلث متطابق الضلعين. إذا رغب المهندس في أن يكون قياس $\angle A$ ثلاثة أمثال قياس كلٍّ من $\angle B$, $\angle C$، فما قياس كل زاوية في هذا المثلث؟



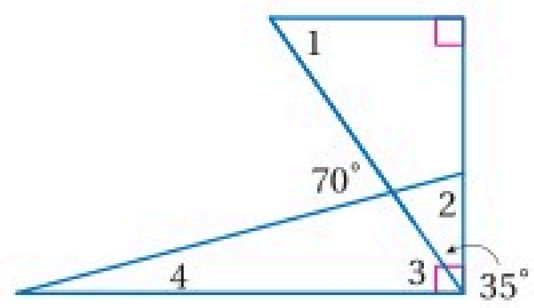
براهين: برهن كلًّا مما يأتي مستعملًا طريقة البرهان المذكورة.

23) النتيجة 3.1 باستعمال البرهان التسلسلي

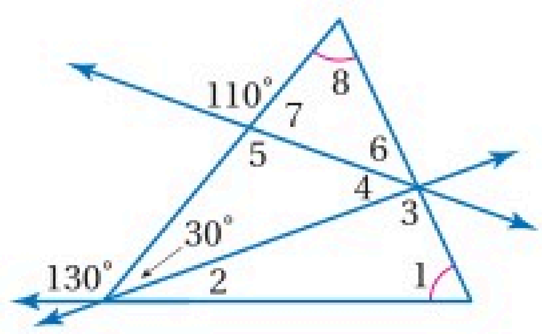
24) النتيجة 3.2 باستعمال البرهان الحر

أوجد قياس كلٍّ من الزوايا المرقّمة فيما يأتي:

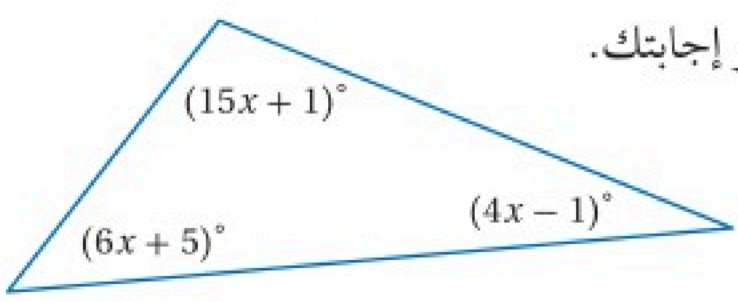
25)



26)

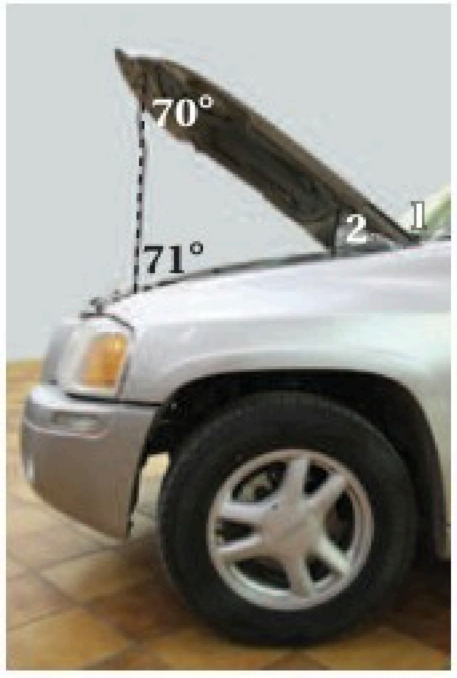


27) **جبر:** صنِّف المثلث في الشكل المجاور وفقًا لزواياه. وفسِّر إجابتك.



28) قرِّر ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحةً أم خطأً، واذكر مثالًا مضادًّا لها إذا كانت خطأً، ودعِّم استنتاجك إذا كانت صحيحة:

" إذا كان مجموع زاويتين حادتين في مثلث أكبر من 90، فإن المثلث حادّ الزوايا ".



29) **سيارات:** انظر إلى الصورة المجاورة:

a) أوجد $m\angle 1 , m\angle 2$.

b) إذا قلَّ ارتفاع غطاء السيارة عن الارتفاع الذي يظهر في الصورة، فما أثر ذلك في $m\angle 1$ ؟ فسِّر إجابتك.

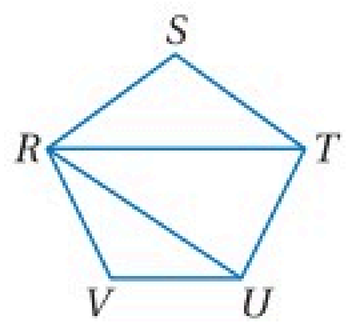
c) إذا قلَّ ارتفاع غطاء السيارة عن الارتفاع الذي يظهر في الصورة، فما أثر ذلك في $m\angle 2$ ؟ فسِّر إجابتك.

برهان: برهن كلًّا مما يأتي باستعمال طريقة البرهان المذكورة:

30) برهان ذو عمودين

المعطيات: $RSTUV$ شكل خماسيّ.

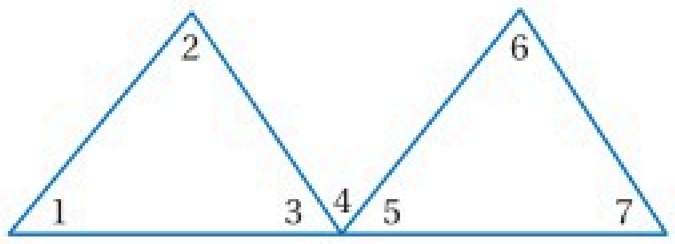
المطلوب:
$m\angle S + m\angle STU + m\angle TUV + m\angle V + m\angle VRS = 540°$



31) برهان تسلسلي

المعطيات: $\angle 3 \cong \angle 5$

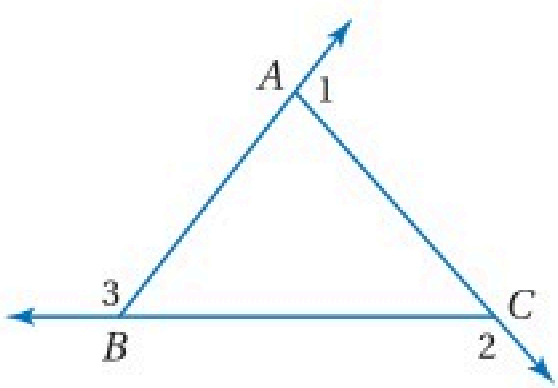
المطلوب: $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 6 + m\angle 7$



تنبيه !

قياس الزوايا
عند استعمال المنقلة لقياس زاوية ما، اجعل خطَّ التدريج 0 منطبقًا على أحد ضلعي الزاوية، ومركز المنقلة منطبقًا على رأس الزاوية.

32) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستستكشف مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمثلث.



a) **هندسيًّا:** ارسم خمسة مثلثات مختلفة، ومُدّ الأضلاع وسمِّ الزوايا كما في الشكل المجاور، على أن يكون ضمن المثلثات التي رسمتها على الأقل مثلث منفرج الزاوية، وآخر قائم الزاوية، ومثلث حادّ الزوايا.

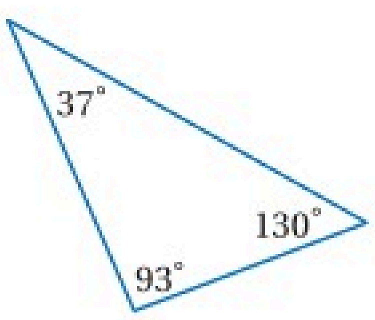
b) **جدوليًّا:** قِسِ الزوايا الخارجية لكل مثلثٍ. وسجِّل القياسات ومجموعها لكل مثلثٍ في جدول.

c) **لفظيًّا:** خمِّن مجموع الزوايا الخارجية للمثلث، واكتب تخمينك.

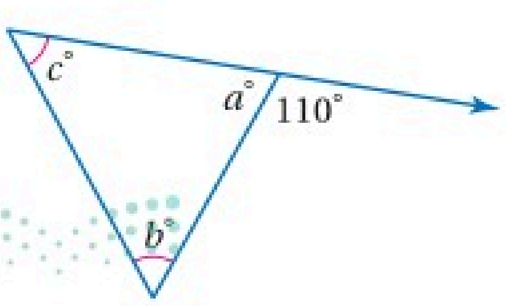
d) **جبريًّا:** عبِّر عن التخمين الذي وصلتَ إليه في الجزء c جبريًّا.

e) **تحليليًّا:** اكتب برهانًا حرًّا لإثبات التخمين الذي توصلتَ إليه.

مسائل مهارات التفكير العليا

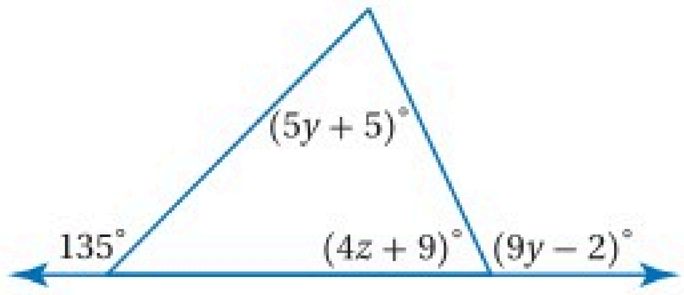


33) **اكتشف الخطأ:** قام خالد بقياس زوايا المثلث وكتبها كما في الشكل. فقال عادل: إنّ هناك خطأً في هذه القياسات. وضِّح بطريقتين مختلفتين على الأقل كيف توصّل عادل إلى هذه النتيجة.



34) **اكتب:** فسِّر كيف يمكنك إيجاد القياسات المجهولة في الشكل المجاور؟

35) تحدٍّ: أوجد قيمة كلٍّ من y, z في الشكل المجاور.



36) تبرير: إذا كانت الزاوية الخارجية المجاورة لِـ $\angle A$ حادة، فهل $\triangle ABC$ حادّ الزوايا أم قائم الزاوية أم منفرج الزاوية أم أنه لا يمكن تحديد نوعه؟ وضح إجابتك.

تدريب على اختبار

37) جبر: أيُّ المعادلات الآتية تكافئ المعادلة $7x - 3(2 - 5x) = 8x$؟

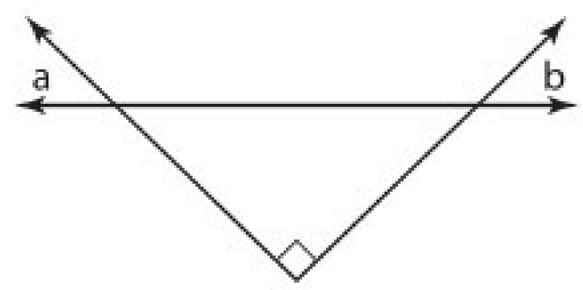
A $2x - 6 = 8$

B $22x - 6 = 8x$

C $-8x - 6 = 8x$

D $22x + 6 = 8x$

38) أيُّ العبارات التالية تصف العلاقة الصحيحة بين الزاويتين a, b في الشكل أدناه؟



A $a + b < 90^\circ$

B $a + b > 90^\circ$

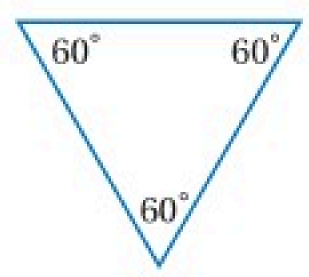
C $a + b = 90^\circ$

D $a + b = 45^\circ$

مراجعة تراكمية

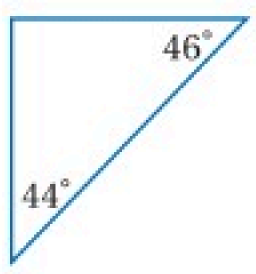
صنِّف كلًّا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية: (مهارة سابقة)

39)



40)

41)



هندسة إحداثية: أوجد المسافة بين النقطة P والمستقيم ℓ في كلٍّ من السؤالين الآتيين. (مهارة سابقة)

42) المستقيم ℓ يمرّ بالنقطتين $(1, 3)$, $(-2, 0)$، وإحداثيَّا النقطة P هما $(-4, 4)$.

43) المستقيم ℓ يمرّ بالنقطتين $(3, 0)$, $(-3, 0)$، وإحداثيَّا النقطة P هما $(4, 3)$.

استعد للدرس اللاحق

اكتب الخاصية المستعملة (الانعكاس، التماثل، التعدي) في كل عبارة مما يلي:

44) $\overline{AB} \cong \overline{AB}$

45) إذا كان $\angle 1 \cong \angle 2$ ، فإن $\angle 2 \cong \angle 1$.

46) إذا كانت $\angle 4 \cong \angle 2$, $\angle 2 \cong \angle 3$ ، فإن $\angle 4 \cong \angle 3$.

3-3 المثلثات المتطابقة
Congruent triangles

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:
درست الزوايا المتطابقة واستعمالاتها.

(مهارة سابقة)

والآن:
- أُسمّي العناصر المتناظرة في المضلعات المتطابقة وأستعملها.
- أُثْبت تطابق مثلثين باستعمال تعريف التطابق.

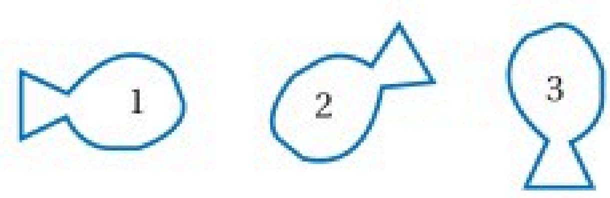
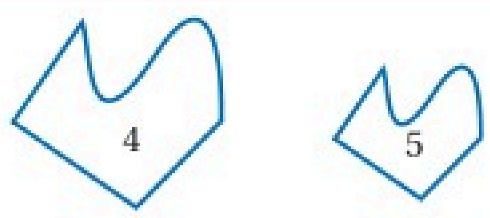
المفردات
التطابق
Congruent

المضلعات المتطابقة
Congruent Polygons

العناصر المتناظرة
Corresponding Parts

لماذا؟
تقوم عدّة مصانع بصنع مسجّلات سيارات بواجهات متحركة يصعب نزعها لحمايتها من السرقة، علمًا بأن شكل هذه الواجهات وأبعادها تطابق شكل المكان الذي تثبت فيه وأبعاده تمامًا؛ وذلك لتثبيتها في لوحة أجهزة السيارة بدقة.

التطابق والعناصر المتناظرة: إذا كان لشكلين هندسيين الشكل نفسه والقياسات نفسها فإنّهما **متطابقان**.

متطابقة	غير متطابقة
 الأشكال 3 ,2 ,1 لها الشكل نفسه والقياسات نفسها، على الرغم من أنها في أوضاع مختلفة.	 الشكلان 5 ,4 لهما الشكل نفسه، لكنهما مختلفان في القياسات.

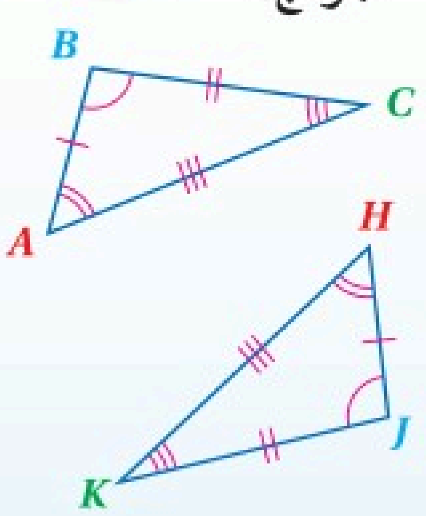
في أيِّ **مضلعين متطابقين** تتطابق **العناصر المتناظرة**، والعناصر المتناظرة تتضمن الزوايا والأضلاع.

مفهوم أساسي — تعريف المضلعات المتطابقة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يتطابق مضلعان إذا وفقط إذا كانت عناصرهما المتناظرة متطابقة.

نموذج:



مثال:

الزوايا المتناظرة

$\angle A \cong \angle H$ $\quad \angle B \cong \angle J$ $\quad \angle C \cong \angle K$

الأضلاع المتناظرة

$\overline{AB} \cong \overline{HJ}$ $\quad \overline{BC} \cong \overline{JK}$ $\quad \overline{CA} \cong \overline{KH}$

عبارة التطابق

$\triangle ABC \cong \triangle HJK$

هناك عباراتُ تطابقٍ أخرى للمثلثين أعلاه، وعبارات التطابق الصحيحة للمضلعات المتطابقة تظهر الرؤوس المتناظرة بالترتيب نفسه.

عبارة صحيحة

$\triangle BCA \cong \triangle JKH$

عبارة غير صحيحة

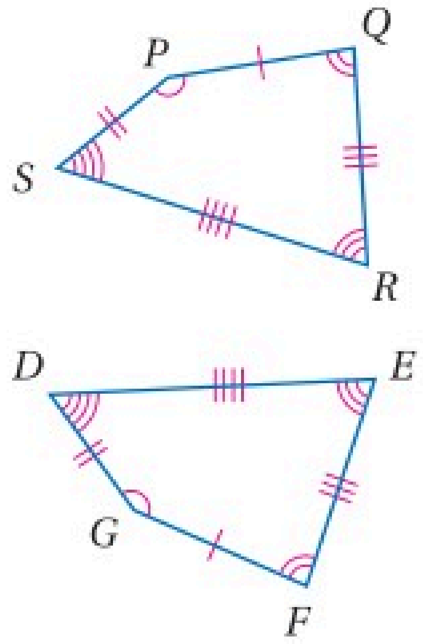
$\triangle ABC \cong \triangle HKJ$

🌎 تاريخ الرياضيات

جوهان كارل فردريك جاوس (1777م – 1855م)
قدّم جاوس رمز التطابق ليبيّن أن طرفي المعادلة متساويان حتّى ولو كانا مختلفين شكلًا. وقد حقق إنجازات عديدة في الرياضيات والفيزياء تتضمن برهانًا للنظرية الأساسية في الجبر.

مثال 1 تعرف العناصر المتناظرة المتطابقة

بيّن أنّ المضلَّعين المجاورين متطابقان، بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة. ثمّ اكتب عبارة التطابق.



الزوايا: $\angle P \cong \angle G, \angle Q \cong \angle F,$

$\angle R \cong \angle E, \angle S \cong \angle D$

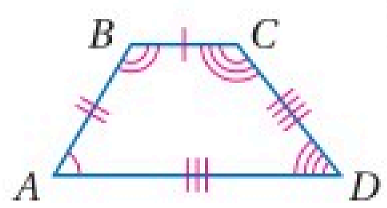
الأضلاع: $\overline{PQ} \cong \overline{GF}, \overline{QR} \cong \overline{FE},$

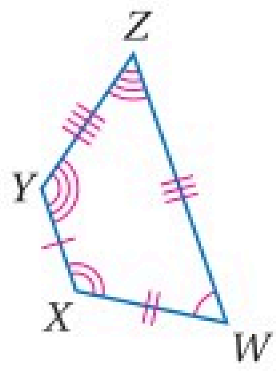
$\overline{RS} \cong \overline{ED}, \overline{SP} \cong \overline{DG}$

وبما أنّ جميع العناصر المتناظرة للمضلعين متطابقة، فإنّ المضلع $PQRS \cong$ المضلع $GFED$.

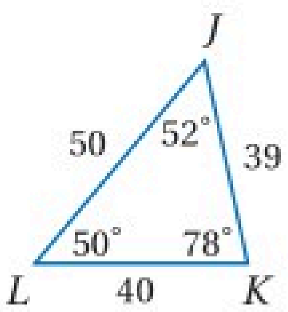
✅ تحقق من فهمك

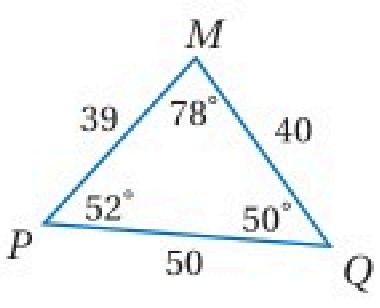
1A)





1B)

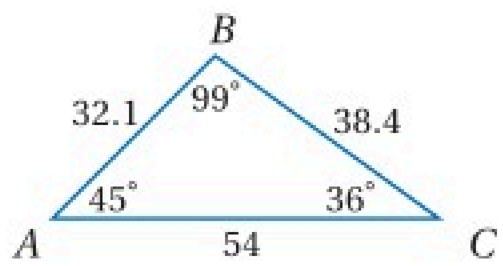


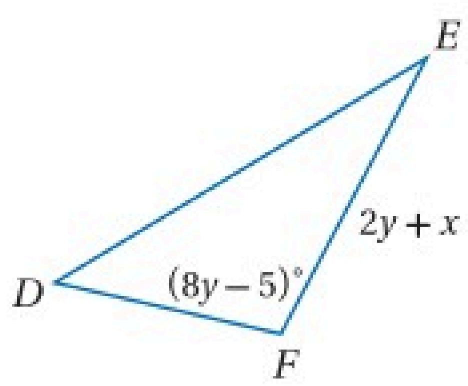


أداة الربط "إذا وفقط إذا" التي وردت في تعريف المضلعات المتطابقة تعني أن كلًّا من العبارة الشرطيّة وعكسها صحيحتان؛ لذا إذا كان المضلعان متطابقين، فإنّ عناصرهما المتناظرة متطابقة. وإذا كانت العناصر المتناظرة متطابقة فإن المضلعين متطابقان.

مثال 2 تعيين العناصر المتناظرة المتطابقة

في الشكل المجاور إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle DFE$ ، فأوجد قيمة كلٍّ من x, y

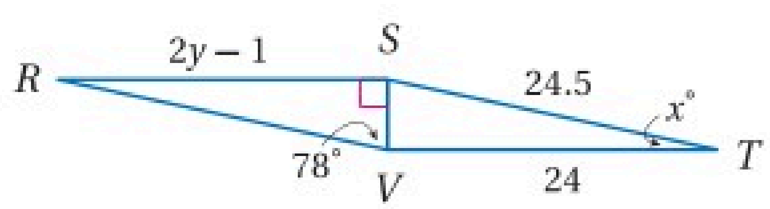




$\angle F \cong \angle B$	العناصر المتناظرة متطابقة
$m\angle F = m\angle B$	تعريف التطابق
$8y - 5 = 99$	عوّض
$8y = 104$	اجمع 5 إلى الطرفين
$y = 13$	اقسم الطرفين على 8
$\overline{FE} \cong \overline{BC}$	العناصر المتناظرة متطابقة
$FE = BC$	تعريف التطابق
$2y + x = 38.4$	عوّض
$2(13) + x = 38.4$	عوّض
$26 + x = 38.4$	بسّط
$x = 12.4$	اطرح 26 من الطرفين

✅ تحقق من فهمك

2) في الشكل المجاور إذا كان $\triangle RSV \cong \triangle TVS$، فأوجد قيمة كلٍّ من x, y .



إرشادات للدراسة

استعمال عبارة التطابق يمكنك استعمال عبارة التطابق لمساعدتك على معرفة الأضلاع المتناظرة.

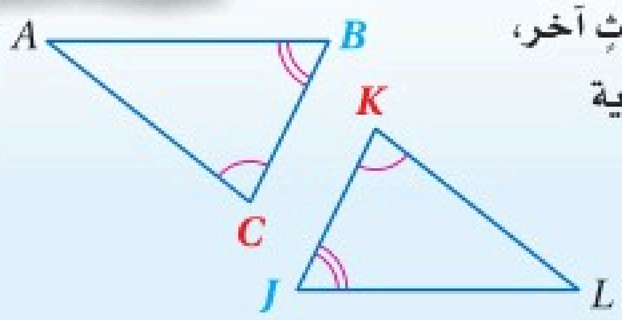
$\triangle ABC \cong \triangle DFE$

$\overline{BC} \cong \overline{FE}$

إثبات تطابق المثلثات إن نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث التي تعلمتها في الدرس 2–3 تقود إلى نظرية أخرى حول الزوايا في مثلثين.

نظرية 3.3 نظريّة الزاوية الثالثة

أضف إلى مطويتك

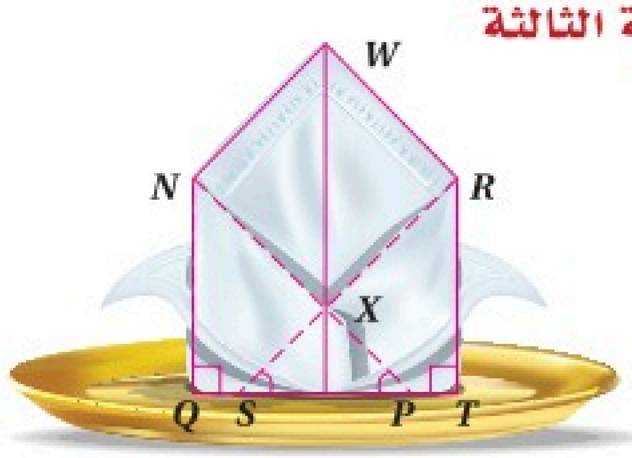


التعبير اللفظي: إذا تطابقت زاويتان في مثلثٍ مع زاويتين في مثلثٍ آخر، فإنّ الزاوية الثالثة في المثلث الأول تطابق الزاوية الثالثة في المثلث الثاني.

مثال: إذا كانت: $\angle C \cong \angle K, \angle B \cong \angle J$ ،
فإنّ: $\angle A \cong \angle L$.

ستبرهن هذه النظرية في السؤال 17

مثال 3 من واقع الحياة استعمال نظرية الزاوية الثالثة



تنظيم الحفلات: قرّر منظّمو حفلة مدرسيّة أن يطووا مناديل الطعام على صورة جيب مثلثي حتى يتمكنوا من وضع هدية بسيطة فيه.
إذا كانت: $\angle NPQ \cong \angle RST, m\angle NPQ = 40°$ ، فأوجد $m\angle SRT$.

بما أنّ $\angle NPQ \cong \angle RST$ ، ولأن جميع الزوايا القائمة متطابقة ($\angle NQP \cong \angle RTS$) ، فإنّ $\angle QNP \cong \angle SRT$ بحسب نظرية الزاوية الثالثة؛ إذن $m\angle QNP = m\angle SRT$.

$m\angle QNP + m\angle NPQ = 90°$ الزاويتان الحادّتان في المثلث القائم الزاوية متتامّتان

$m\angle QNP + 40° = 90°$ عوّض

$m\angle QNP = 50°$ اطرح $40°$ من الطرفين

وبالتعويض فإن: $m\angle SRT = m\angle QNP = 50°$.

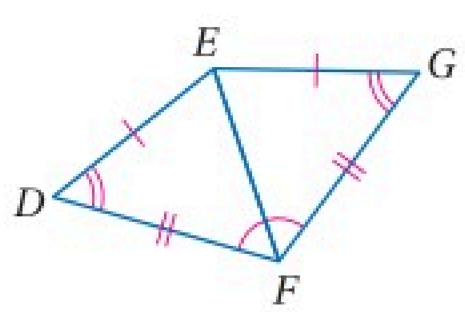
الربط مع الحياة

استعمال بعض المهارات الأساسية عند طي مناديل المائدة يُضفي لمسةً من الجمال والأناقة على أي حفلة. وكثير من هذه الطيات تأخذ شكل المثلث.

تحقق من فهمك

3) في الشكل أعلاه، إذا كانت $\angle WNX \cong \angle WRX$، وكان $\overline{WX}$ منصّفًا لـ $\angle NXR$ ، وكان $m\angle WNX = 88°, m\angle NXW = 49°$ ، فأوجد $m\angle NWR$. وفسّر إجابتك.

مثال 4 إثبات تطابق مثلثين



اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{DE} \cong \overline{GE}, \overline{DF} \cong \overline{GF}, \angle D \cong \angle G$
$\angle DFE \cong \angle GFE$

المطلوب: $\triangle DEF \cong \triangle GEF$

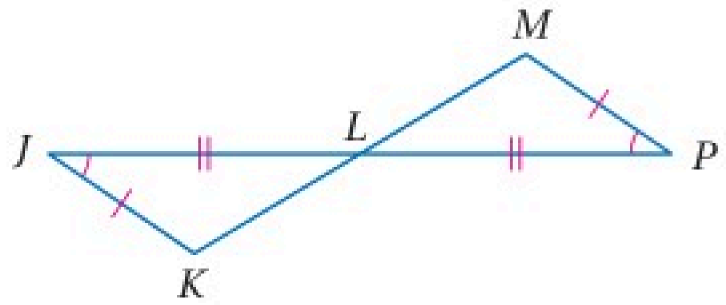
البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{DE} \cong \overline{GE}, \overline{DF} \cong \overline{GF}$	1) معطيات
2) $\overline{EF} \cong \overline{EF}$	2) خاصية الانعكاس للتطابق
3) $\angle D \cong \angle G, \angle DFE \cong \angle GFE$	3) معطيات
4) $\angle DEF \cong \angle GEF$	4) نظرية الزاوية الثالثة
5) $\triangle DEF \cong \triangle GEF$	5) تعريف المضلعات المتطابقة

إرشادات للدراسة

خاصيّة الانعكاس
عندما يشترك مثلثان في ضلع، استعمل خاصيّة الانعكاس للتطابق؛ لتثبت أن الضلع المشترك يطابق نفسه.

تحقق من فهمك



4) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\angle J \cong \angle P$, $\overline{JK} \cong \overline{PM}$

$\overline{JL} \cong \overline{PL}$ ، L **تنصف** $\overline{KM}$

المطلوب: $\triangle JLK \cong \triangle PLM$

علاقة تطابق المثلثات علاقة انعكاس وتماثل وتعدٍّ كما في تطابق القطع المستقيمة والزوايا.

النظرية 3.4 خصائص تطابق المثلثات

أضف إلى مطويتك

خاصيّة الانعكاس للتطابق

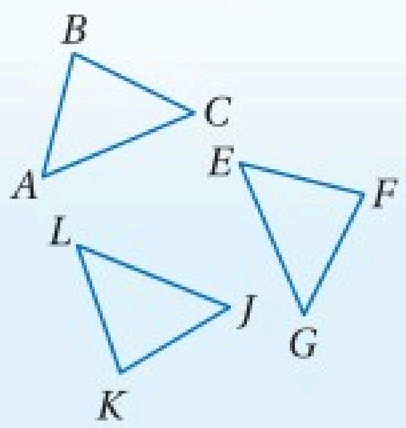
$\triangle ABC \cong \triangle ABC$

خاصية التماثل للتطابق

إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle EFG$ ، فإنّ $\triangle EFG \cong \triangle ABC$.

خاصيّة التعدّي للتطابق

إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle EFG, \triangle EFG \cong \triangle JKL$ ، فإنّ $\triangle ABC \cong \triangle JKL$.

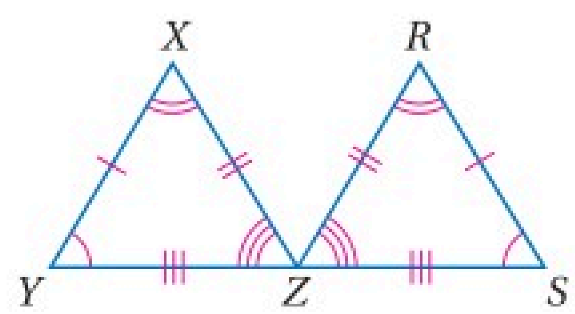


ستبرهن عناصر هذه النظرية في الأسئلة 21 , 20 , 18

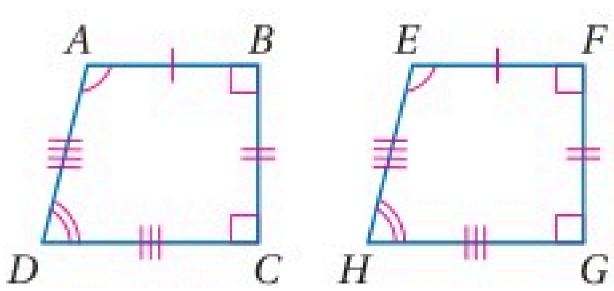
تأكد

المثال 1 في كلٍّ من السؤالين الآتيين، بيّن أنّ المضلعين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة، ثمّ اكتب عبارة التطابق:

1)



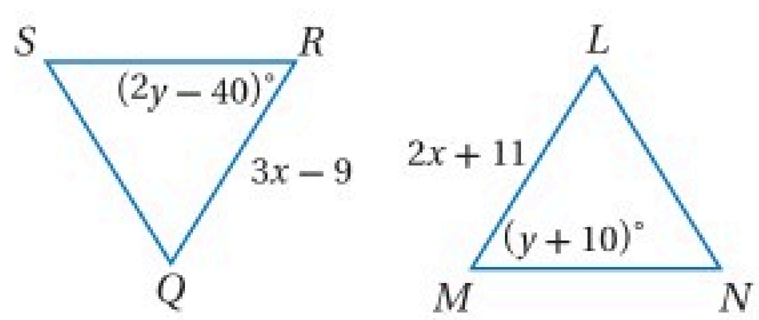
2)



المثال 2 في الشكلين المجاورين، إذا كان $\triangle LMN \cong \triangle QRS$ فأوجد:

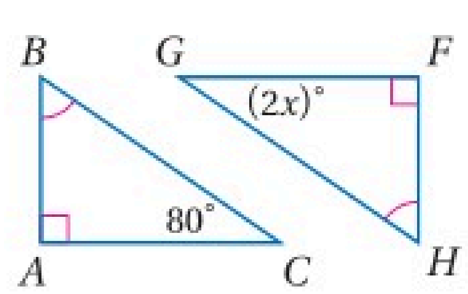
3) قيمة x.

4) قيمة y.

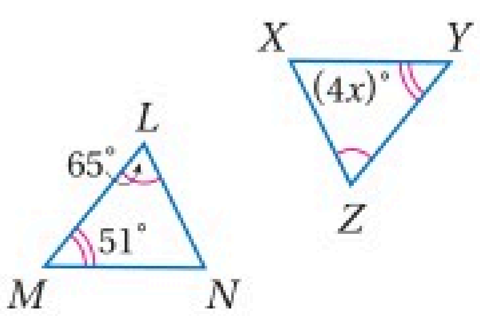


المثال 3 في كلٍّ من السؤالين الآتيين، أوجد قيمة x، وفسّر إجابتك.

5)



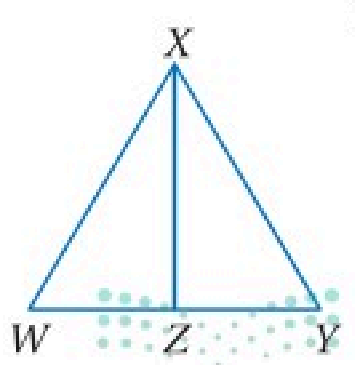
6)



المثال 4 **7) برهان:** اكتب برهانًا حرًّا.

المعطيات: $\angle WXZ \cong \angle YXZ, \angle XZW \cong \angle XZY , \overline{WX} \cong \overline{YX} ,\ \overline{WZ} \cong \overline{YZ}$

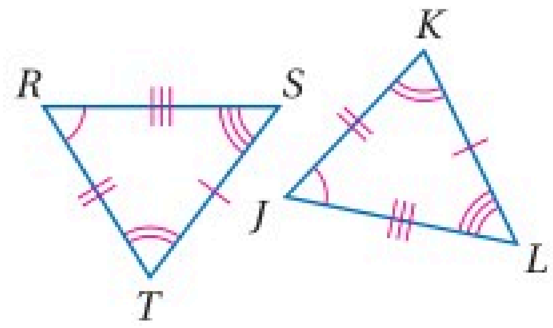
المطلوب: $\triangle WXZ \cong \triangle YXZ$



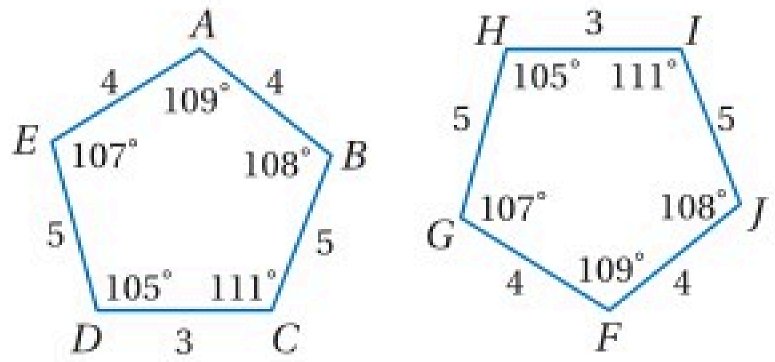
تدرب وحل المسائل

المثال 1 في كل من السؤالين الآتيين، بيّن أن المضلعين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة، ثمّ اكتب عبارة التطابق.

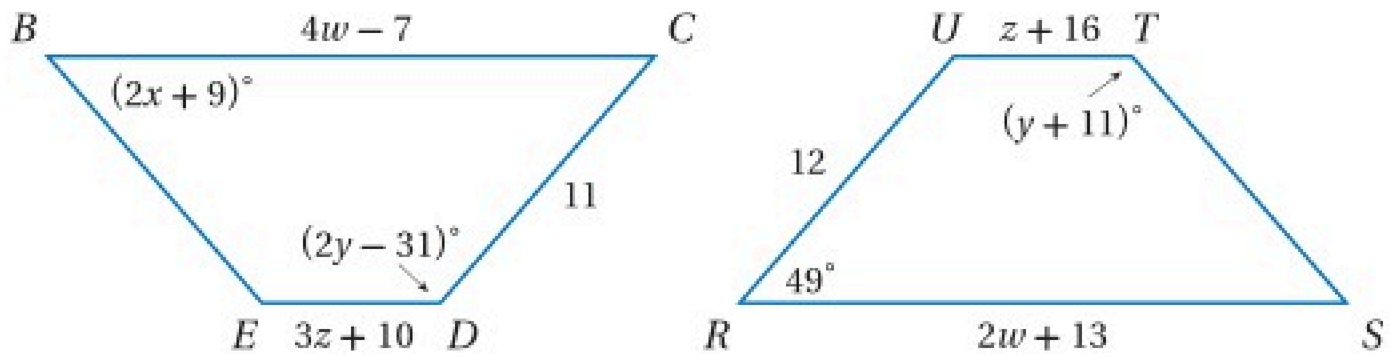
8)



9)



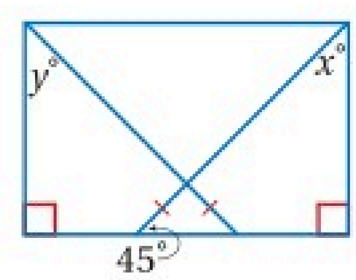
المثال 2 إذا كان المضلع $BCDE \cong$ المضلع $RSTU$، فأوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:



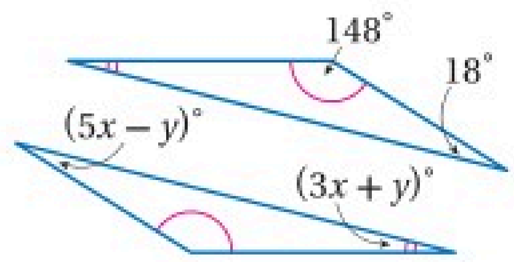
10) x **11)** y **12)** z **13)** w

المثال 3 أوجد قيمة كلٍّ من x, y في الأسئلة الآتية:

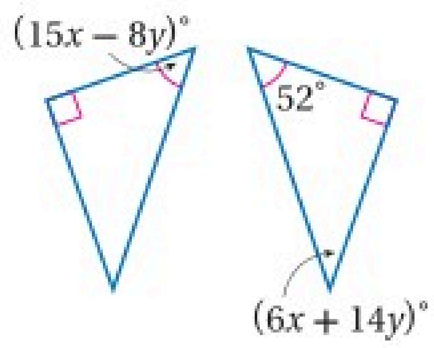
14)



15)



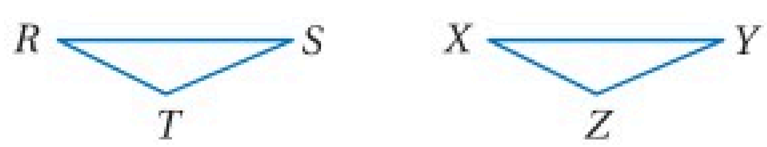
16)



المثال 4 **17)** **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 3.3.

18) **برهان:** رتِّب العبارات المستعملة في برهان العبارة الآتية ترتيبًا صحيحًا. وقدّم تبريرًا لكل عبارة.

"تطابق المثلثات علاقة تماثل". (النظرية 3.4)



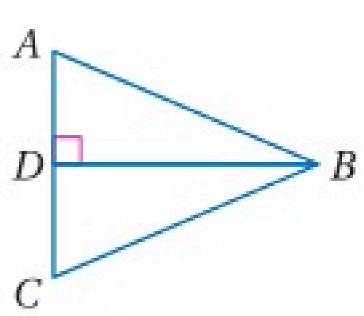
المعطيات: $\triangle RST \cong \triangle XYZ$

المطلوب: $\triangle XYZ \cong \triangle RST$

البرهان:

$\angle X \cong \angle R, \angle Y \cong \angle S,$ $\angle Z \cong \angle T,$ $\overline{XY} \cong \overline{RS}, \overline{YZ} \cong \overline{ST},$ $\overline{XZ} \cong \overline{RT}$	$\angle R \cong \angle X, \angle S \cong \angle Y,$ $\angle T \cong \angle Z,$ $\overline{RS} \cong \overline{XY}, \overline{ST} \cong \overline{YZ},$ $\overline{RT} \cong \overline{XZ}$	$\triangle RST \cong \triangle XYZ$	$\triangle XYZ \cong \triangle RST$
?	?	?	?

19) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين:



المعطيات: $\overline{BD}$ تنصّف $\angle B$.
$\overline{BD} \perp \overline{AC}$

المطلوب: $\angle A \cong \angle C$

برهان: اكتب برهانًا من النوع المذكور لكل جزء من النظرية 3.4.

20) تطابق المثلثات علاقة تعدٍّ. (برهان حرّ)

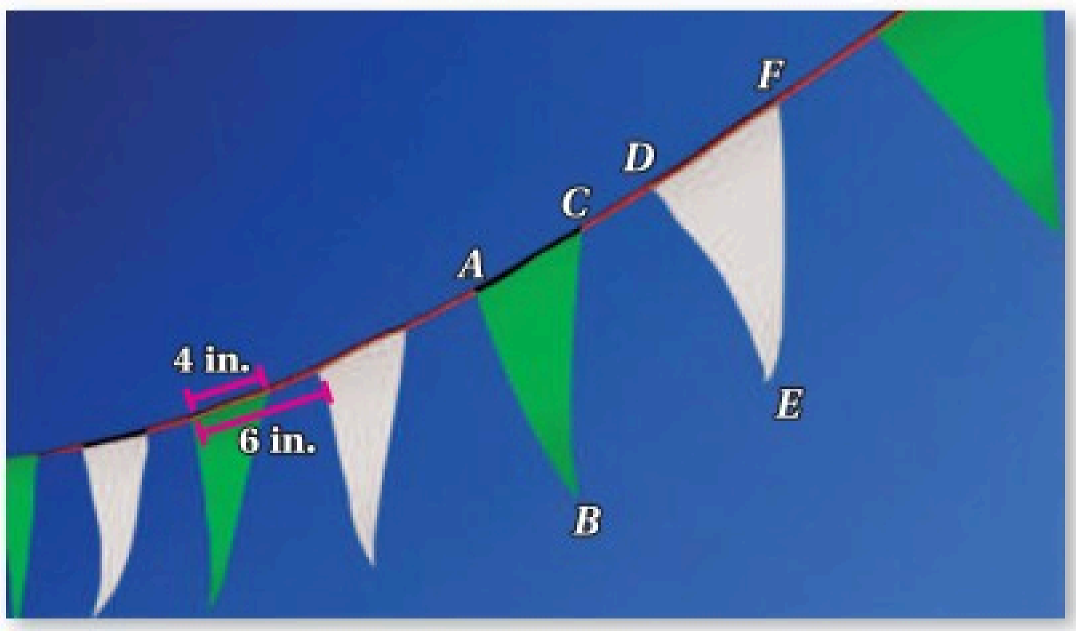
21) تطابق المثلثات علاقة انعكاس. (برهان تسلسلي)

جبر: ارسم شكلًا يمثّل المثلثين المتطابقين في كلٍّ من السؤالين الآتيين وسمِّه، ثم أوجد قيمة x , y:

22) $\triangle ABC \cong \triangle DEF, AB = 7 , BC = 25 , AC = 11 + x , DF = 3x - 13 , DE = 2y - 5$

23) $\triangle LMN \cong \triangle RST, m\angle L = 49^\circ , m\angle M = (10y)^\circ , m\angle S = 70^\circ , m\angle T = (4x + 9)^\circ$

24) **رايات:** في مهرجان رياضي، كان سعيد مسؤولًا عن إحاطة منطقة مساحتها 100 ft^2 مخصصة لجلوس المُعلقين والإعلاميين، فاستعمل حبلًا وثبّت عليه رايات على شكل مثلثات متطابقة، كلٌّ منها متطابق الضلعين.
إرشاد: $1 \text{ ft} = 12 \text{ in}$



a) اكتب سبعة أزواج من القطع المستقيمة المتطابقة في الصورة.

b) إذا كانت المنطقة التي حوَّطها سعيد بحبل الرايات مربّعة الشكل، فكم سيكون طول الحبل؟

c) ما عدد الرايات المثبتة بالحبل؟

25) **تمثيلات متعدّدة:** في هذه المسألة ستكتشف العلاقة بين مساحات المضلعات المتطابقة:

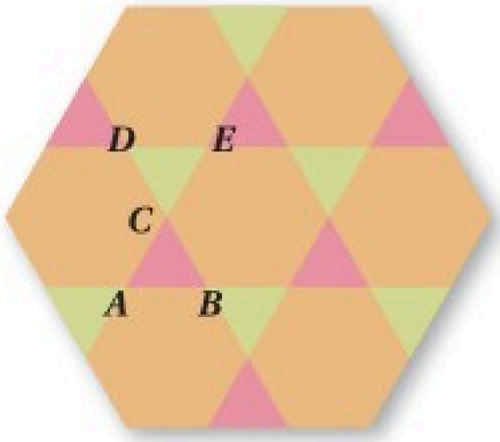
a) **لفظيًّا:** اكتب عبارة شرطيّة تمثل العلاقة بين مساحتَي مثلثين متطابقين.

b) **لفظيًّا:** اكتب عكس عبارتك الشرطيّة. وهل العبارة العكسيّة صحيحة أم خطأ؟ وضّح تبريرك.

c) **هندسيًّا:** ارسم - إنْ أمكن - مستطيلين لهما المساحة نفسها، ولكنّهما غير متطابقين، وإذا كان ذلك غير ممكن فوضح السبب.

d) **هندسيًّا:** ارسم - إنْ أمكن - مربعين لهما المساحة نفسها، ولكنّهما غير متطابقين، وإذا كان ذلك غير ممكن فوضح السبب.

26) **أنماط:** صُمّم النمط المجاور باستعمال مضلعات منتظمة.



a) ما المضلعان المنتظمان اللذان استُعملا في التصميم؟

b) سمِّ زوجًا من المثلثات المتطابقة.

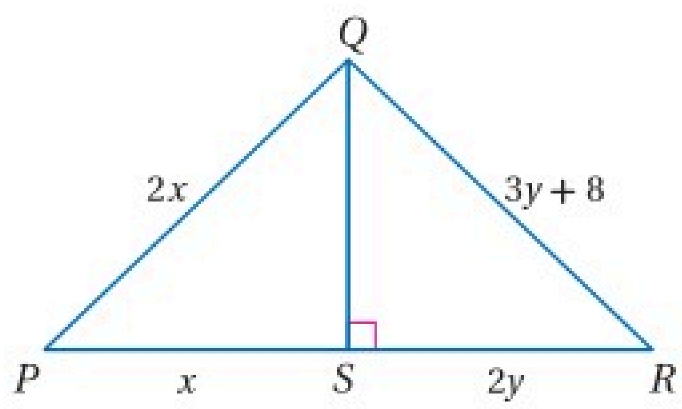
c) سمِّ زوجًا من الزوايا المتطابقة.

d) إذا كان $CB = 2$ in ، فكم يكون AE؟ وضح إجابتك.

e) ما قياس $\angle EDC$؟ وضح إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

27) **تحدٍّ:** إذا كان $\triangle PQS \cong \triangle RQS$. فأوجد قيمة كلٍّ من x, y.

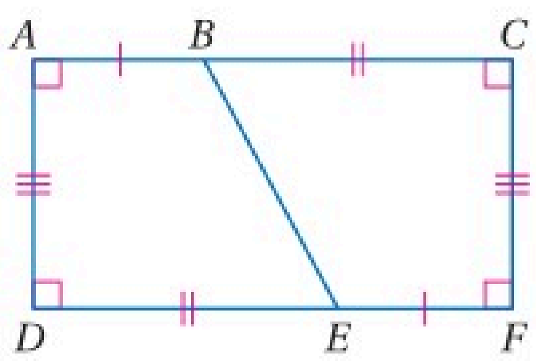


تبرير: حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة أم خطأً. وإذا كانت خطأً، فأعطِ مثالًا مضادًّا. أما إذا كانت صحيحة، فوضح إجابتك.

28) إذا تطابق زوجان من الزوايا المتناظرة لمثلثين، وتطابقت الأزواج الثلاثة من أضلاعهما المتناظرة، فإنّ المثلثين متطابقان.

29) إذا كانت أزواج الزوايا المتناظرة الثلاثة لمثلثين متطابقة، فإنّ المثلثين متطابقان.

30) **تحدٍّ:** اكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن المضلع $ABED \cong$ المضلع $FEBC$.



31) **اكتب:** حدِّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحةً دائمًا أو صحيحةً أحيانًا أو ليست صحيحةً أبدًا. ووضح إجابتك.

"المثلثان المتطابقا الأضلاع يكونان متطابقين"

تدريب على اختبار

32) إذا علمت أن: $\triangle ABC \cong \triangle HIJ$ ، ورؤوس $\triangle ABC$ هي: $A(-1, 2), B(0, 3), C(2, -2)$، فما طول الضلع HJ ؟

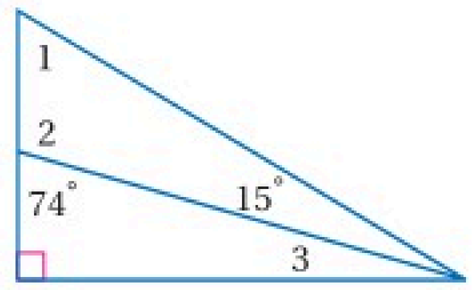
A 5
B $\sqrt{29}$
C $\sqrt{2}$
D 25

33) **جبر:** أيٌّ مما يأتي عامل لِـ $x\ 2 + 19x - 42$؟

A $x + 14$
B $x + 2$
C $x - 2$
D $x - 14$

مراجعة تراكمية

في الشكل المجاور أوجد كلًّا من القياسات الآتية: (الدرس 2-3)



34) $m\angle 2$

35) $m\angle 1$

36) $m\angle 3$

37) **هندسة إحداثيّة:** أوجد أطوال أضلاع $\triangle JKL$ الذي رؤوسه هي $J(-7, 10), K(15, 0), L(-2, -1)$، وصنّفه وفقًا لأطوال أضلاعه. (الدرس 1-3)

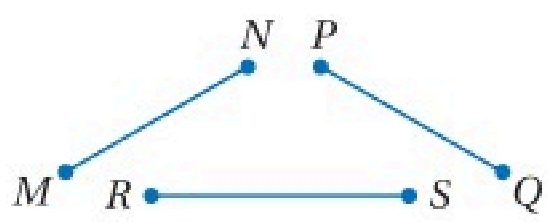
حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحةً دائمًا أو أحيانًا أو ليست صحيحةً أبدًا: (مهارة سابقة)

38) تكون الزاويتان المتجاورتان على خط مستقيم متكاملتين.

39) إذا كانت الزاويتان متكاملتين فإن إحداهما تكون منفرجة.

استعد للدرس اللاحق

40) انقل البرهان الآتي وأكمله:



المعطيات: $\overline{MN} \cong \overline{PQ}, \overline{PQ} \cong \overline{RS}$

المطلوب: $\overline{MN} \cong \overline{RS}$

البرهان:

العبارات	المبررات
a) ؟	**a)** معطيات
b) $MN = PQ, PQ = RS$	**b)** ؟
c) ؟	**c)** ؟
d) $\overline{MN} \cong \overline{RS}$	**d)** تعريف القطع المستقيمة المتطابقة

3-4 إثبات تطابق المثلثات SSS , SAS
Proving Triangles Congruent-SSS, SAS

فيما سبق:

درست إثبات تطابق المثلثات باستعمال تعريف التطابق.

(الدرس 3-3)

والآن:

- أستعمل المسلمة SSS لاختبار تطابق المثلثات.
- أستعمل المسلمة SAS لاختبار تطابق المثلثات.

المفردات:

الزاوية المحصورة
Included Angle

لماذا؟

تُعدّ السبورة المزدوجة التي على شكل الحرف A طريقة مناسبة لعرض المعلومات، لا لأنها تُطوى عند التخزين فقط، ولكن لأنّها تكون ثابتةً تمامًا عند وضع الذراعين الجانبيَّين في موقعيهما. وعندما يكون للذراعين الطول نفسه، ويتم تثبيتهما على أبعاد متساوية من القمة على الجانبين، فإن السبورة المفتوحة تشكّل مثلثين متطابقين هما $\triangle ABC, \triangle XYZ$.

مسلمة التطابق بثلاثة أضلاع SSS : في هذا الدرس ستكتشف أنه ليس من الضروري أن تبين تطابق الأضلاع المتناظرة وتطابق الزوايا المتناظرة في مثلثين لتثبت أنهما متطابقان.

تبيّن السبورة المزدوجة أنّه إذا كانت أطوال الأضلاع المتناظرة لمثلثين متساوية، فإن المثلثين متطابقان. وهذا ما تنصّ عليه المسلمة الآتية:

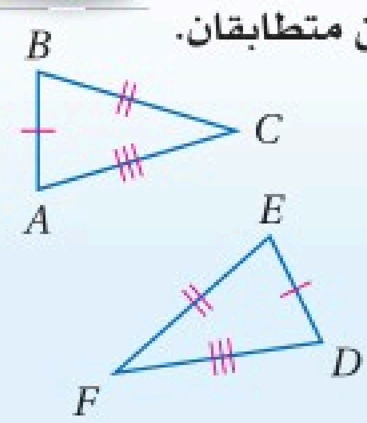
مسلمة 3.1 التطابق بثلاثة أضلاع (SSS)

أضف إلى مطويتك

إذا تطابقت أضلاع مثلثٍ مع الأضلاع المناظرة لها في مثلثٍ آخر، فإنّ المثلثين متطابقان.

مثال إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

فإنَّ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

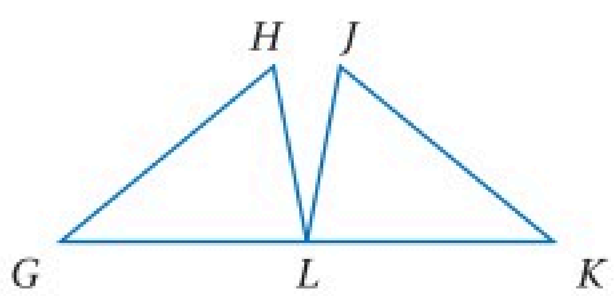


قراءة الرياضيات

اختصارات رياضية
S اختصار لِـ side أو ضلع، و A اختصار لِـ Angle أو زاوية.

مثال 1 استعمال المسلمة SSS لإثبات تطابق مثلثين

اكتب برهانًا تسلسليًّا.



المعطيات: $\overline{GH} \cong \overline{KJ}$, $\overline{HL} \cong \overline{JL}$ ، L نقطة منتصف $\overline{GK}$.

المطلوب: إثبات أن $\triangle GHL \cong \triangle KJL$

البرهان:

$\overline{GH} \cong \overline{KJ}$ (معطى)

$\overline{HL} \cong \overline{JL}$ (معطى)

L هي نقطة منتصف $\overline{GK}$ (معطى) ← $\overline{GL} \cong \overline{KL}$ (تعريف نقطة المنتصف)

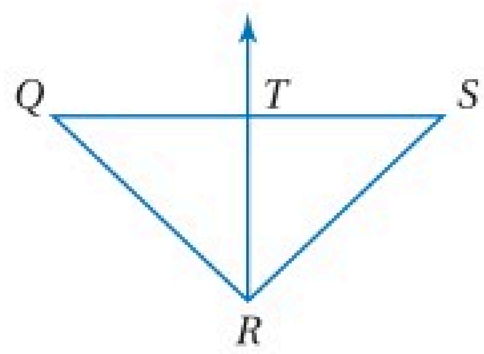
$\triangle GHL \cong \triangle KJL$ (SSS)

إرشادات للدراسة

منصف قطعة مستقيمة عبارة عن قطعة أو مستقيم أو مستوى يقطع القطعة عند منتصفها.

✓ تحقق من فهمك

1) اكتب برهانًا تسلسليًّا.



المعطيات: $\triangle QRS$ متطابق الضلعين، فيه، $\overline{QR} \cong \overline{SR}$.
$\overline{RT}$ تنصّف $\overline{QS}$ عند النقطة T.

المطلوب: إثبات أنّ $\triangle QRT \cong \triangle SRT$

مثال 2 على اختبار معياري

إجابة مطولة: إحداثيات رؤوس المثلث ABC هي: $A(1, 1), B(0, 3), C(2, 5)$.
ورؤوس المثلث EFG هي: $E(1, -1), F(2, -5), G(4, -4)$.

a) مثِّل كلا المثلثين في مستوى إحداثيٍّ واحدٍ.

b) استعمل هذا التمثيل؛ لتخمين ما إذا كان المثلثان متطابقين أم لا. وفسِّر إجابتك.

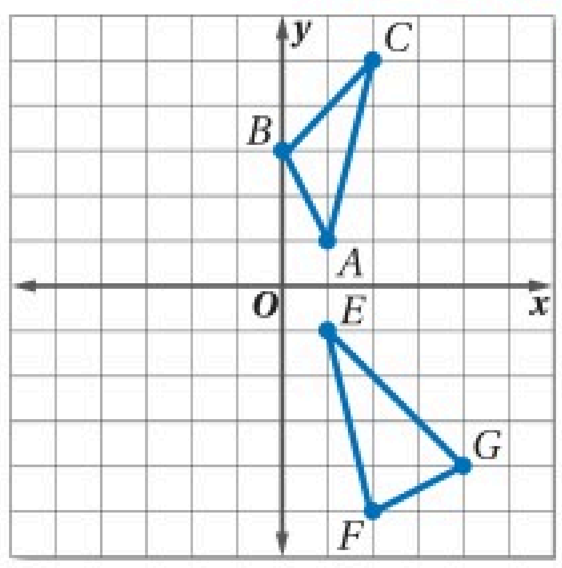
c) اكتب برهانًا منطقيًّا باستعمال الهندسة الإحداثية لتدعم تخمينك في الجزء b.

اقرأ سؤال الاختبار:

في هذه المسألة يُطلب إليك عمل ثلاثة أشياء؛ إذ يتعين عليك في الجزء a أن ترسم كلًّا من $\triangle ABC$, $\triangle EFG$ في مستوى إحداثيٍّ واحد. وفي الجزء b أن تضع تخمينًا يبين ما إذا كان $\triangle EFG \cong \triangle ABC$ أم لا، اعتمادًا على الرسم. وأخيرًا عليكَ في الجزء c أن تثبت صحّة تخمينك.

حل سؤال الاختبار:

a)



b) يتضح من الرسم أن المثلثين مختلفان في الشكل؛ لذا يمكن أن نخمِّن أنهما ليسا متطابقين.

c) استعمل صيغة المسافة لبيان أن أطوال بعض الأضلاع المتناظرة غير متساوية.

$$EF = \sqrt{(2-1)^2 + [-5-(-1)]^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$AB = \sqrt{(0-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$FG = \sqrt{(4-2)^2 + [-4-(-5)]^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(2-0)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$EG = \sqrt{(4-1)^2 + [-4-(-1)]^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

$$AC = \sqrt{(2-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

وبما أن $AB = FG, AC = EF$، في حين أن $BC \neq EG$، فإن شروط مسلمة التطابق SSS غير متحققة؛ إذن $\triangle ABC \ncong \triangle EFG$.

قراءة الرياضيات

الرموز
تقرأ العبارة $\triangle ABC \ncong \triangle EFG$ المثلث ABC لا يطابق المثلث EFG.

تحقق من فهمك

2) إحداثيات رؤوس المثلث JKL هي $J(2, 5), K(1, 1), L(5, 2)$. ورؤوس المثلث NPQ هي $N(-3, 0), P(-7, 1), Q(-4, 4)$.

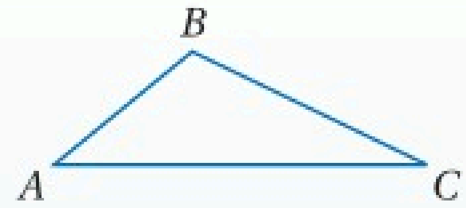
A) مثِّل كلا المثلثين في مستوى إحداثيٍّ واحدٍ.

B) استعمل هذا التمثيل؛ لتخمين ما إذا كان المثلثان متطابقين أم لا. وفسِّر إجابتك.

C) اكتب برهانًا منطقيًّا باستعمال الهندسة الإحداثية لتدعم تخمينك في الجزء B.

إنشاء هندسي

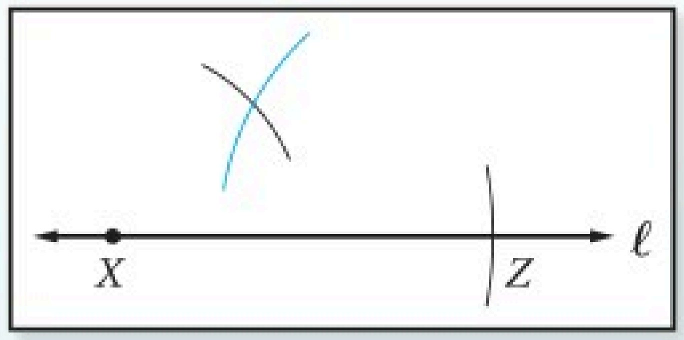
إنشاء مثلث يطابق مثلثًا مرسومًا باستعمال المسلّمة (SSS)



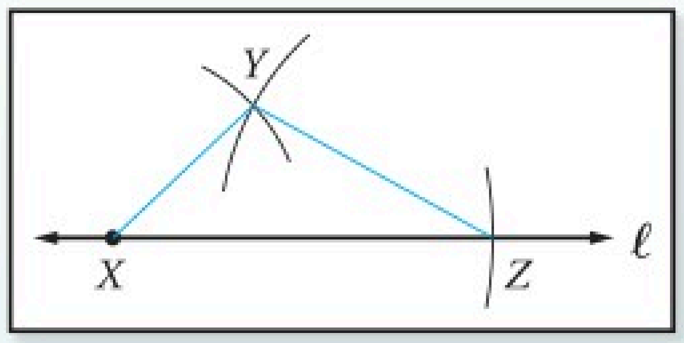
ارسم مثلثًا وسمّه $\triangle ABC$، ثم استعمل المسلمة SSS لتنشئ $\triangle XYZ$ الذي يطابق $\triangle ABC$.

الخطوة 1 عيّن النقطة X على المستقيم ℓ. ثم أنشئ $\overline{XZ} \cong \overline{AC}$ على ℓ كما يأتي:

- ركز رأس الفرجار في النقطة A ، وافتحه حتى يصل القلم إلى النقطة C.
- باستعمال فتحة الفرجار نفسها، ركِّز رأس الفرجار في X، وارسم قوسًا يقطع المستقيم ℓ وسمِّ نقطة التقاطع Z.

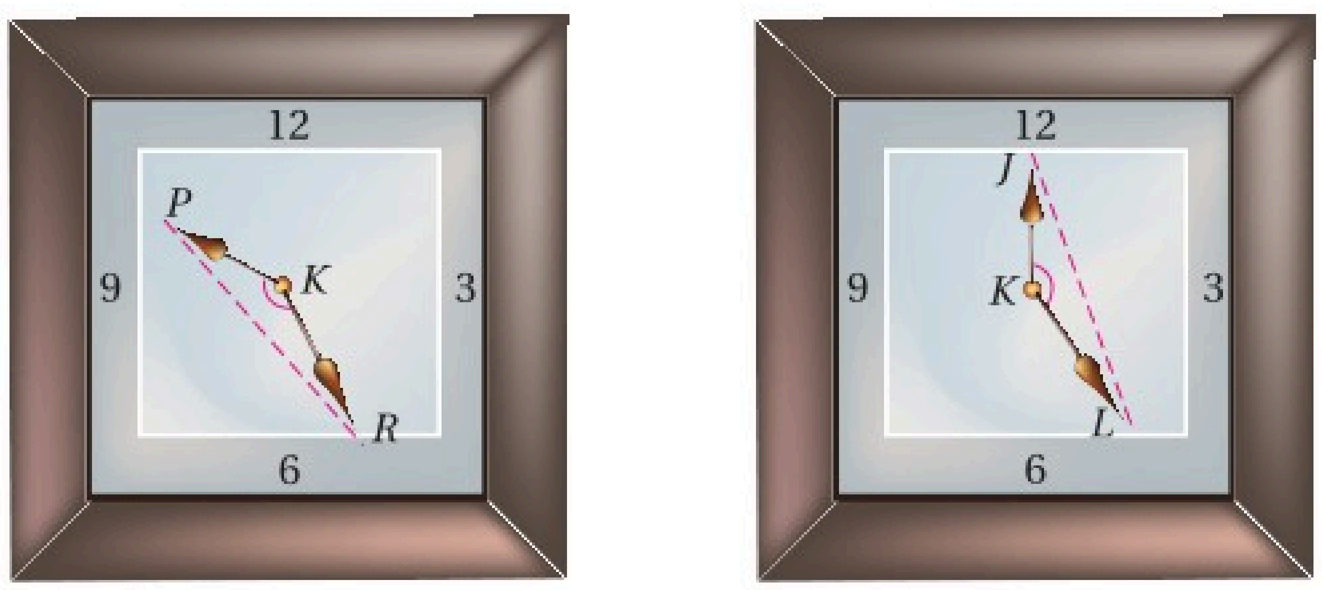


الخطوة 2 أنشئ قوسًا طول نصف قطره AB، ومركزه X ، وقوسًا آخر طول نصف قطره BC، ومركزه Z (مستعملًا الفرجار كما في الخطوة 1).



الخطوة 3 سمِّ نقطة تقاطع القوسين Y . وارسم $\overline{XY}, \overline{ZY}$ لتشكل $\triangle XYZ$.

مسلمة التطابق: ضلعان والزاوية المحصورة بينهما SAS: تُسمّى الزاوية المتكونة من ضلعين متجاورين لمضلع **زاوية محصورة**. تأمّل الزاوية المحصورة والمتكونة من عقربَي الساعة في كلا الوضعين الموضَّحين أدناه، ولاحظ أنه كلما شكّل العقربان زاويةً لها القياس نفسه، فستكون المسافتان بين طرفَي العقربين $\overline{PR}$, $\overline{JL}$ متساويتين.



$\triangle PKR \cong \triangle JKL$

أيُّ مثلثين يتكونان من زوجين من الأضلاع المتساوية في الطول وزاويتين محصورتين متساويتين في القياس يكونان متطابقين. وهذا يوضح المسلمة الآتية:

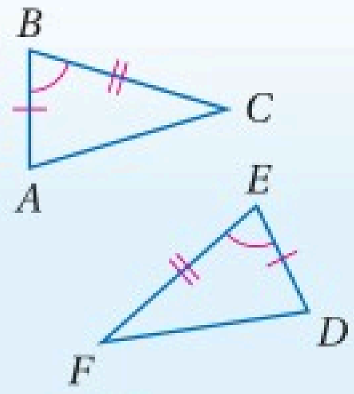
مسلمة 3.2

مسلمة التطابق: ضلعان والزاوية المحصورة بينهما (SAS)

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: **إذا طابق ضلعان وزاوية محصورة بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر، فإنّ المثلثين متطابقان.**

مثال: **إذا كان** $\overline{AB} \cong \overline{DE}$,
$\angle B \cong \angle E$,
$\overline{BC} \cong \overline{EF}$,
فإنّ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

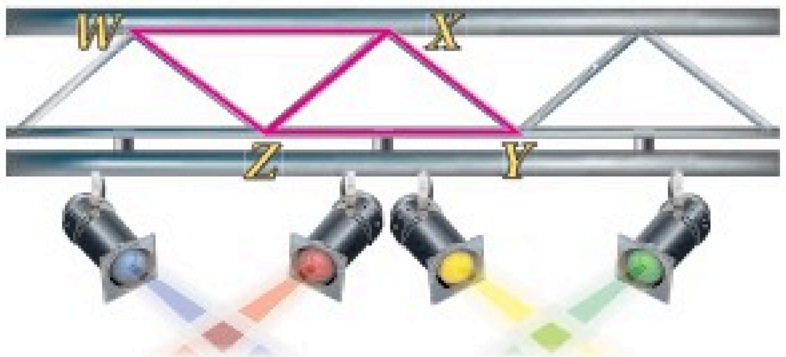


الربط مع الحياة

فنيو الإضاءة: في صناعة الصور المتحركة، يقوم فنيُّو الإضاءة بتحديد مواقع المصابيح التي يتطلبها الفيلم. ويقوم هؤلاء الفنيون بالتأكد من أن الزوايا التي يشكلها الضوء في مواضعها الصحيحة.

مثال 3 من واقع الحياة

استعمال SAS لإثبات تطابق المثلثات



إضاءة: تبدو دعامات السقّالة حاملة المصابيح الظاهرة في الصورة وكأنّها مكونة من مثلثات متطابقة. فإذا كان $\overline{WX} \cong \overline{ZY}, \overline{WX} \parallel \overline{ZY}$ ، فاكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن: $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$.

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$	1) معطى
2) $\overline{WX} \parallel \overline{ZY}$	2) معطى
3) $\angle WXZ \cong \angle XZY$	3) نظرية الزوايا الداخلية المتبادلة
4) $\overline{XZ} \cong \overline{ZX}$	4) خاصية الانعكاس للتطابق
5) $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$	5) SAS

تحقق من فهمك

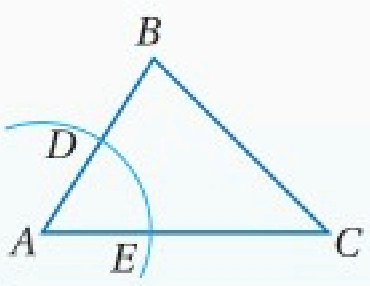
3) **طيران شراعي:** في الصورة المجاورة يبدو جناحا الطائرة الشراعية أنهما مثلثان متطابقان. فإذا كانت $\overline{FG} \cong \overline{GH}$ ، $\overline{JG}$ تنصّف $\angle FGH$ ، فأثبت أنّ $\triangle FGJ \cong \triangle HGJ$.

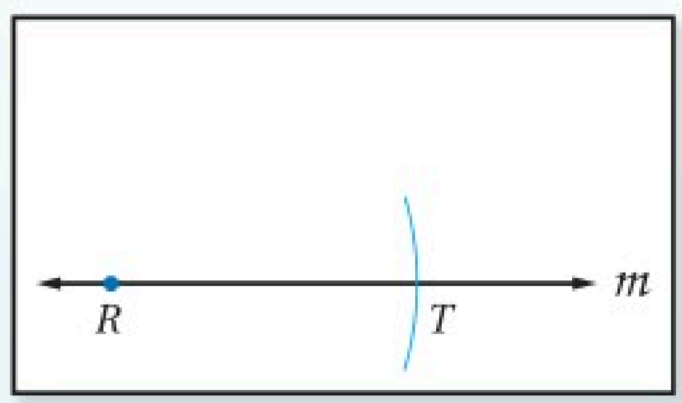
يمكنك أيضًا أن تنشئ مثلثات متطابقة إذا عُلم طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

إنشاء هندسي

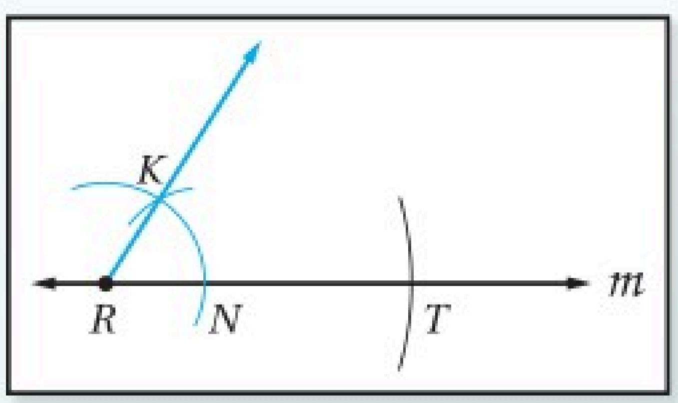
إنشاء مثلث يطابق مثلثًا مرسومًا باستعمال مسلمة التطابق "ضلعان والزاوية المحصورة بينهما (SAS) "

ارسم مثلثًا وسمِّه $\triangle ABC$ ، ثم استعمل المسلمة SAS لتنشئ $\triangle RST$ الذي يطابق $\triangle ABC$.



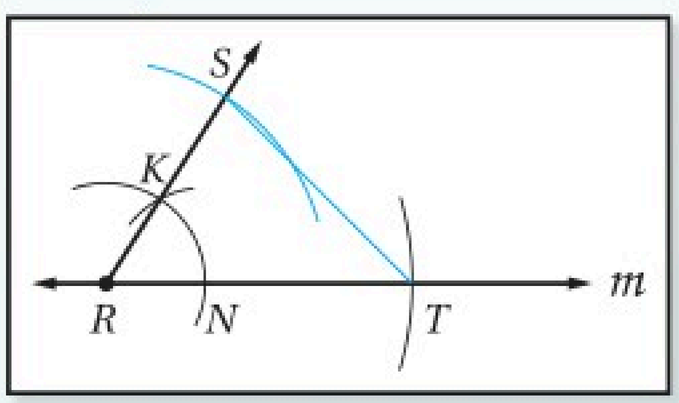


الخطوة 1: عيِّن النقطة R على المستقيم m . ثم أنشئ $\overline{RT} \cong \overline{AC}$ على m .



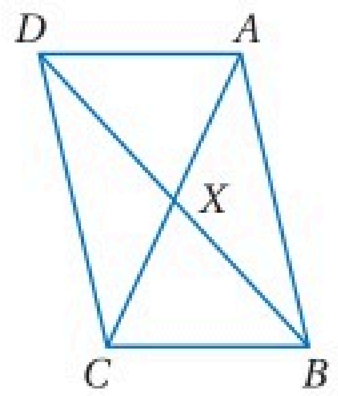
الخطوة 2: أنشئ $\angle R \cong \angle A$ ، باستعمال $\overline{RT}$ ضلعًا للزاوية، والنقطة R رأسًا لها كما يأتي:

- ضع رأس الفرجار على النقطة A ، وارسم قوسًا يقطع ضلعَي $\angle A$. سمِّ نقطتَي التقاطع D, E .
- باستعمال فتحة الفرجار نفسها، ضع رأس الفرجار عند R وارسم قوسًا يبدأ فوق المستقيم m ويقطعه، سمِّ نقطة التقاطع N .
- ضع رأس الفرجار عند E وعدِّل الفتحة حتى يصل رأس القلم إلى D.
- دون تغيير فتحة الفرجار، ضع رأس الفرجار عند النقطة N ، وارسم قوسًا يقطع القوس الذي رسمته سابقًا في النقطة K، ثم ارسم $\overline{RK}$.



الخطوة 3: أنشئ $\overline{RS} \cong \overline{AB}$ ، ثم ارسم $\overline{ST}$ لتشكّل $\triangle RST$.

مثال 4 استعمال تطابق المثلثين بضلعين وزاوية محصورة SAS في البراهين

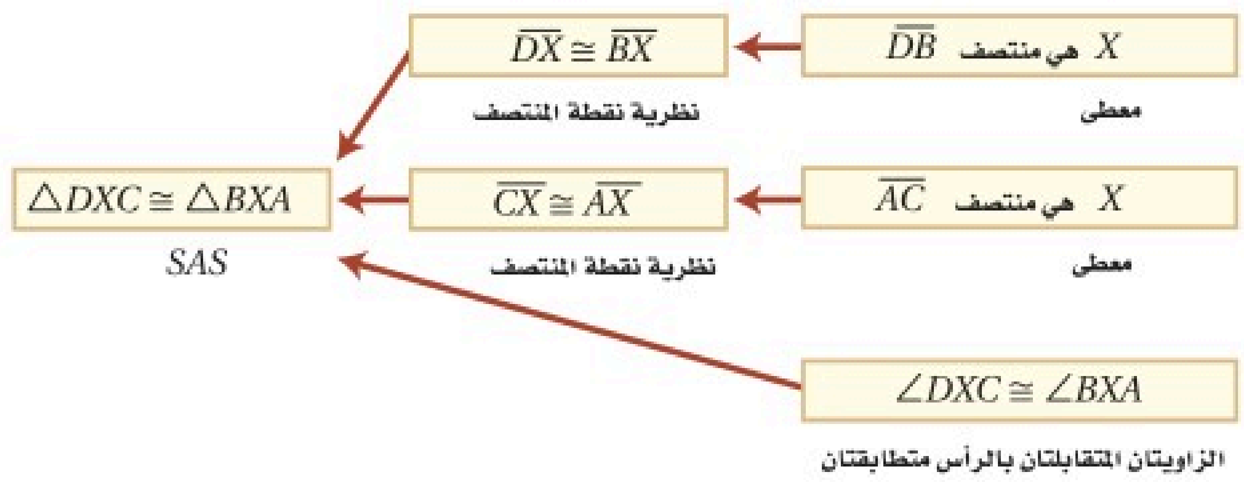


اكتب برهانًا تسلسليًّا لما يأتي.

المعطيات: X منتصف $\overline{DB}$
و X منتصف $\overline{AC}$

المطلوب: $\triangle DXC \cong \triangle BXA$

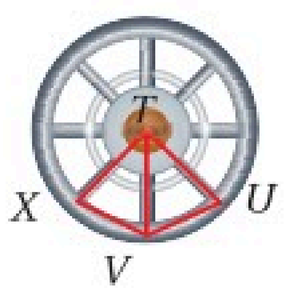
البرهان:



إرشادات للدراسة

البراهين التسلسلية
يمكن كتابة البراهين التسلسلية إما رأسيًّا وإما أفقيًّا.

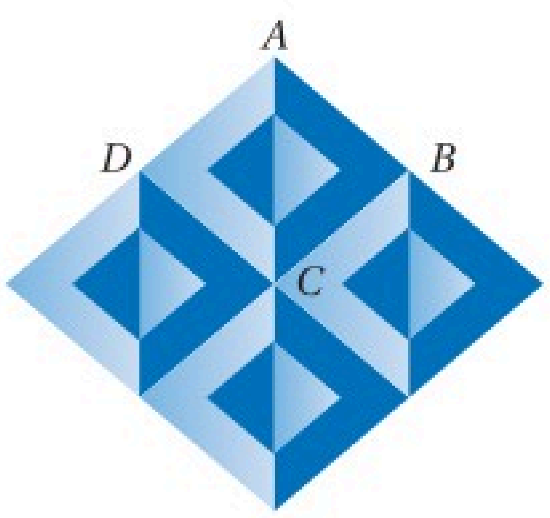
تحقق من فهمك



4) قضبان الإطار الداخلية تقسمه إلى ثمانية أجزاء. إذا كان:
$\overline{TU} \cong \overline{TX}$ وَ $\angle XTV \cong \angle UTV$، فبين أن $\triangle XTV \cong \triangle UTV$.

تأكد

المثال 1



1) **الخداع البصري:** في الشكل المقابل المربع $ABCD$ يطابق المربعات الثلاثة الأخرى التي تشكّل النمط.

a) ما عدد المثلثات المختلفة القياس التي استُعملت لعمل هذا النمط؟

b) استعمل مسلمة التطابق SSS لإثبات أن $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

المثال 2

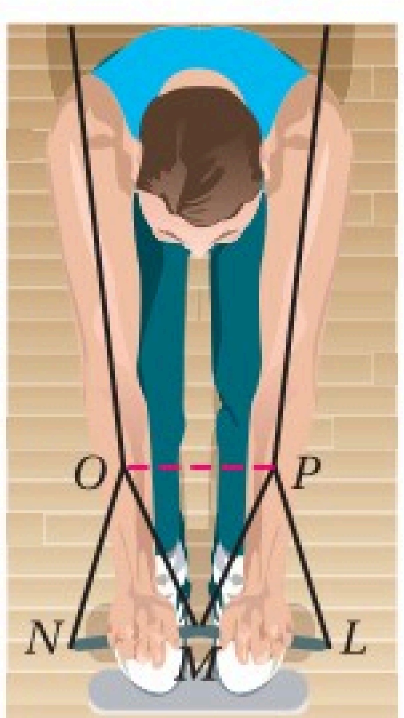
2) **إجابة مطولة:** إحداثيات رؤوس $\triangle ABC$ هي:
$A(-3, -5), B(-1, -1), C(-1, -5)$. ورؤوس $\triangle XYZ$ هي
$X(5, -5), Y(3, -1), Z(3, -5)$.

a) مثِّل كلا المثلثين في مستوى إحداثيٍّ واحدٍ.

b) استعمل هذا التمثيل لتخمين ما إذا كان المثلثان متطابقين أم لا. وفسِّر إجابتك.

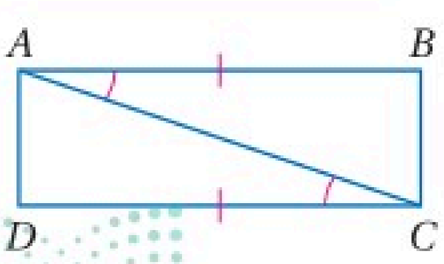
c) اكتب برهانًا منطقيًّا باستعمال الهندسة الإحداثية يدعم تخمينك في الفرع **b**.

المثال 3



3) **رياضة:** في الشكل المجاور، إذا كان:
$\overline{LP} \cong \overline{NO}, \angle LPM \cong \angle NOM$، $\triangle MOP$ متطابق الأضلاع، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أنّ $\triangle LMP \cong \triangle NMO$.

المثال 4



4) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{BA} \cong \overline{DC}, \angle BAC \cong \angle DCA$

المطلوب: $\overline{BC} \cong \overline{DA}$

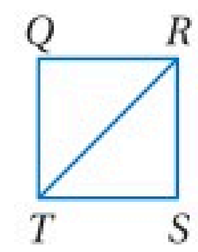
تدرب وحل المسائل

المثال 1 **برهان:** اكتب برهانًا من النوع المذكور في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

5) برهان حرٌّ

المعطيات: $\overline{QR} \cong \overline{SR}$,
$\overline{ST} \cong \overline{QT}$

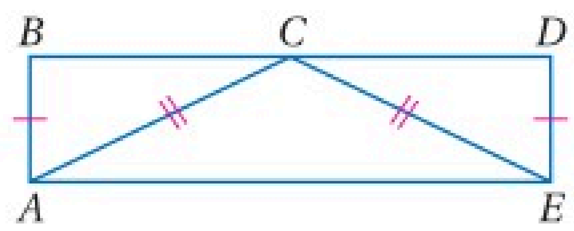
المطلوب: $\triangle QRT \cong \triangle SRT$



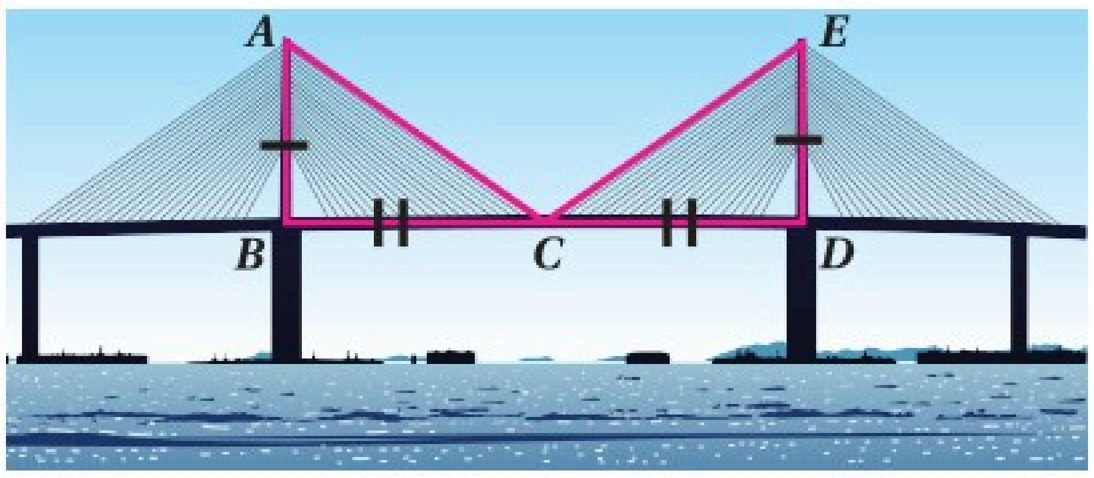
6) برهان ذو عمودين

المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{ED}$, $\overline{CA} \cong \overline{CE}$
$\overline{BD}$ تنصّف $\overline{AC}$

المطلوب: $\triangle ABC \cong \triangle EDC$



7) **جسور:** جسر الرياض المعلق طوله 763 m، وهو مثبت بحبال معدنيّة معلقة بِدعامتين خرسانيتين. كما هو مبين بالشكل، بحيث يلتقي الحبلان المعدنيان العلويان في النقطة C عند منتصف المسافة بين الدعامتين، إذا كانت $AB = ED$: فأثبت أن المثلثين المبيّنين في الشكل المجاور متطابقان.



المثال 2 **حدّد ما إذا كان $\triangle MNO \cong \triangle QRS$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين، ووضّح إجابتك:**

8) $M(2, 5), N(5, 2), O(1, 1), Q(-4, 4), R(-7, 1), S(-3, 0)$

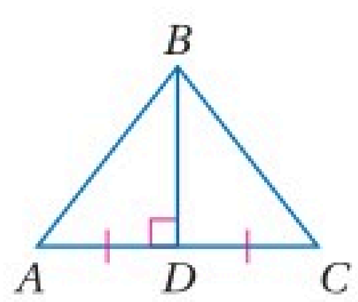
9) $M(0, -1), N(-1, -4), O(-4, -3), Q(3, -3), R(4, -4), S(3, 3)$

المثال 3 **برهان:** اكتب برهانًا من النوع المحدد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

10) برهان ذو عمودين

المعطيات: $\overline{BD} \perp \overline{AC}$,
$\overline{BD}$ تنصّف $\overline{AC}$

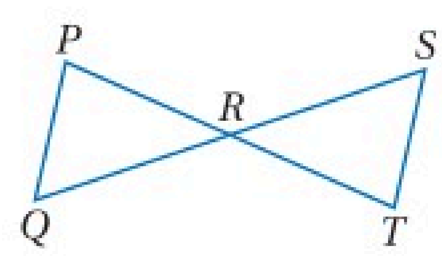
المطلوب: $\triangle ABD \cong \triangle CBD$



11) برهان حرٌّ

المعطيات: R نقطة المنتصف لكلٍّ من $\overline{QS}$, $\overline{PT}$

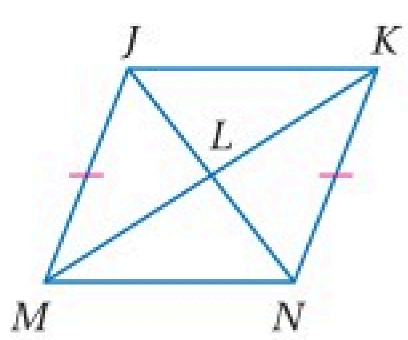
المطلوب: $\triangle PRQ \cong \triangle TRS$



المثال 4 **12)** **برهان:** اكتب برهانًا تسلسليًّا

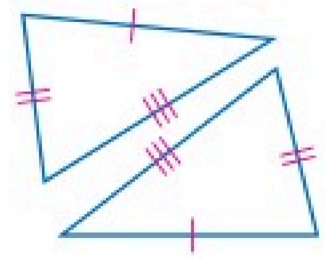
المعطيات: $\overline{JM} \cong \overline{NK}$ ؛ L نقطة المنتصف لكلٍّ من $\overline{JN}$, $\overline{KM}$

المطلوب: $\angle MJL \cong \angle KNL$

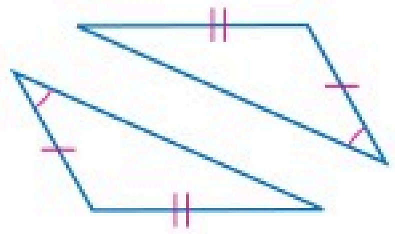


حدّد ما إذا كان المثلثان في كلٍّ من الأسئلة الآتية متطابقين أم لا. وضح إجابتك.

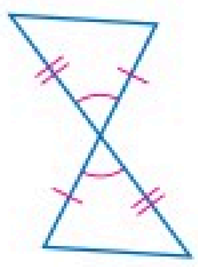
13)



14)



15)



إرشادات للدراسة

تطابق ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما في مثلث مع نظائرها في مثلث آخر، لا يكفي لإثبات أن المثلثين متطابقان.

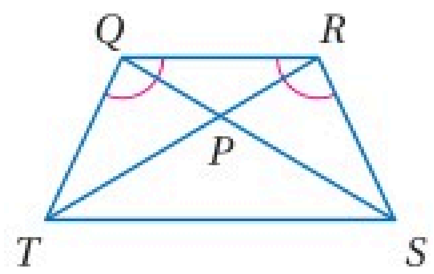
16) إشارة تحذيرية: استعمل الشكل المجاور.

a) ما اسم المجسم الذي تمثّله إشارة التحذير.

b) إذا كان $\overline{CB} \cong \overline{CD}$ ، $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ ، فأثبت أنّ $\triangle ACB \cong \triangle ACD$.

c) لماذا يبدو المثلثان غير متطابقين في الشكل؟

17) برهان: اكتب برهانًا تسلسليًّا.

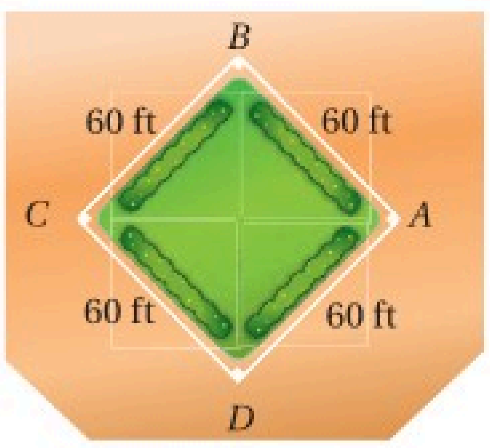


المعطيات: $\triangle TPQ \cong \triangle SPR$

$\angle TQR \cong \angle SRQ$

المطلوب: $\triangle TQR \cong \triangle SRQ$

18) في الشكل المجاور ABCD مزرعة مربعة الشكل، ويريد أخوان فصلها باستعمال سياج على أحد القطرين.



a) اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن $BD = AC$.

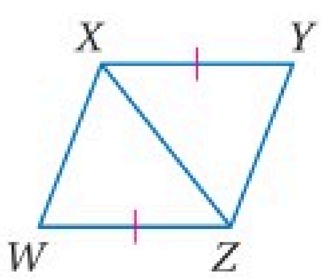
b) اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أنّ $\angle BDC \cong \angle BDA$.

إرشادات للدراسة

الأشكال

عند كتابة البراهين أو حل المسائل التي تتضمن مثلثات متطابقة، من المفيد أن ترسم شكلاً خاصًا بك، وتعيّن عليه الأضلاع والزوايا المتطابقة التي تجدها.

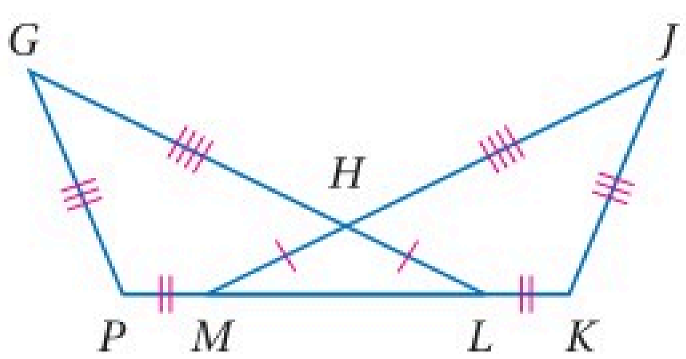
19) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $\overline{YX} \cong \overline{WZ}, \overline{YX} \parallel \overline{ZW}$

المطلوب: $\triangle YXZ \cong \triangle WZX$

20) برهان: اكتب برهانًا حرًّا.



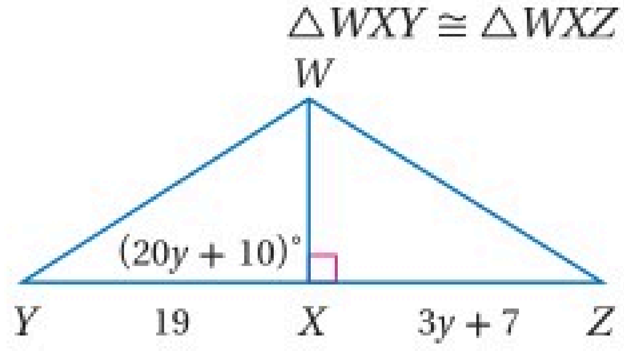
المعطيات: $\overline{HL} \cong \overline{HM}, \overline{PM} \cong \overline{KL},$

$\overline{PG} \cong \overline{KJ}, \overline{GH} \cong \overline{JH}$

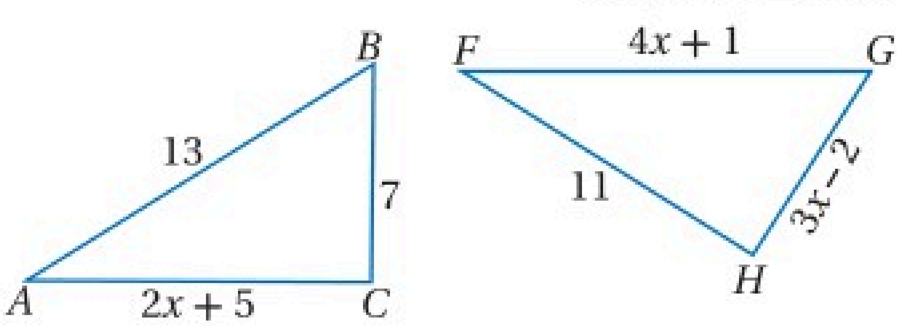
المطلوب: $\angle G \cong \angle J$

جبر: أوجد قيمة المتغير التي تجعل المثلثين متطابقين في كلٍّ من السؤالين الآتيين، وفسّر إجابتك:

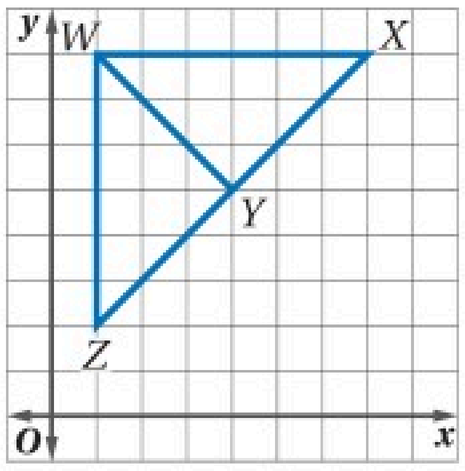
21) $\triangle WXY \cong \triangle WXZ$



22) $\triangle ABC \cong \triangle FGH$



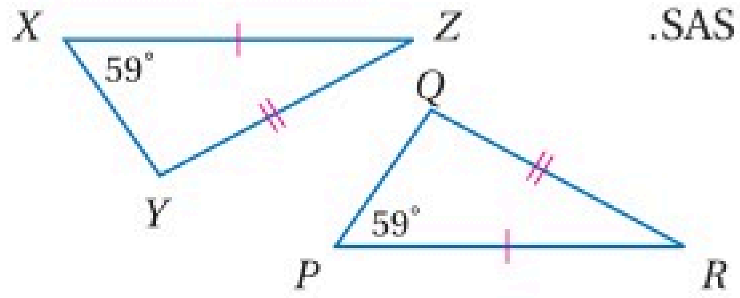
مسائل مهارات التفكير العليا



23) **تحدٍّ:** في الشكل المجاور:

a) صف طريقتين يمكنك استعمالهما لإثبات أنّ $\triangle WYZ$ يطابق $\triangle WYX$. علمًا بأنه لا يُسمح باستعمال المسطرة أو المنقلة. وأيّ طريقة تعتقد أنها فعّالة أكثر؟ وضح إجابتك.

b) أثبت أن $\triangle WYZ \cong \triangle WYX$ ووضّح إجابتك.

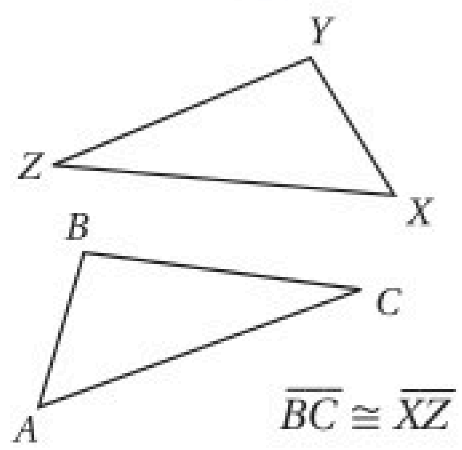


24) **اكتشف الخطأ:** قال أحمد: إنّ $\triangle PRQ \cong \triangle XYZ$ بحسب SAS. فاعترض خالد وقال: لا توجد معلومات كافية لإثبات أن المثلثين متطابقان. أيُّهما كانت إجابته صحيحة؟ وضح إجابتك.

25) **اكتب:** إذا كان زوجان من الأضلاع المتناظرة لمثلثين قائمَي الزاوية متطابقين، فهل المثلثان متطابقان؟ وضح إجابتك.

تدريب على اختبار

26) في الشكلين المجاورين، $\overline{AC} \cong \overline{XZ}$ و $\angle C \cong \angle Z$. ما المعلومة الإضافية التي يمكن استعمالها لإثبات أن $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$؟



A $\overline{BC} \cong \overline{YZ}$

B $\overline{AB} \cong \overline{XY}$

C $\overline{BC} \cong \overline{XZ}$

D $\overline{XZ} \cong \overline{XY}$

27) إذا كان $-2a + b = -7$، فما قيمة a إذا علمت أن $b = -1$؟

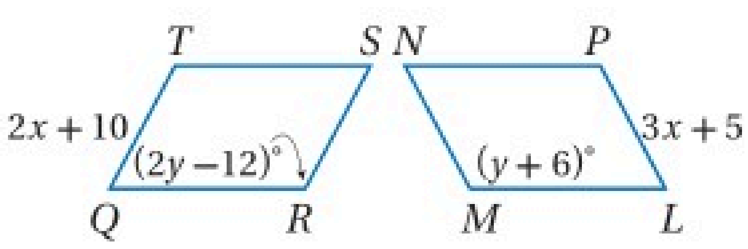
A -1

B 2

C 3

D 4

مراجعة تراكمية



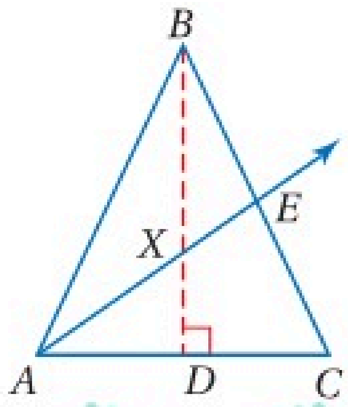
في الشكلين المجاورين، إذا علمت أن متوازي الأضلاع $LMNP$ ≅ متوازي الأضلاع $QRST$، فأوجد: (الدرس 3-3)

28) قيمة x.

29) قيمة y.

30) اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي للعبارة: "الزاويتان المتجاورتان على مستقيم متكاملتان". وحدّد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أو خاطئة. وإذا كانت خاطئة، فأعط مثالًا مضادًّا. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق



إذا علمت أن $\overline{AE}$, $\overline{BD}$ ينصِّفان الزاويتين والضلعين اللذين يقطعانهما، فاذكر القطع المستقيمة والزوايا المشار إليها فيما يأتي:

31) قطعة مستقيمة تطابق $\overline{EC}$

32) زاوية تطابق $\angle ABD$

33) زاوية تطابق $\angle BDC$

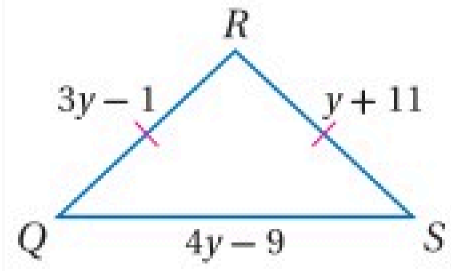
34) قطعة مستقيمة تطابق $\overline{AD}$

اختبار منتصف الفصل

الدروس من 3-1 إلى 3-4

1) **هندسة إحداثيّة:** صنّف $\triangle ABC$ الذي رؤوسه $A(-2, -1), B(-1, 3), C(2, 0)$ إلى مختلف الأضلاع أو متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين. (مهارة سابقة)

2) **اختيار من متعدد:** أيٌّ مما يأتي يمثل أطوال أضلاع المثلث المتطابق الضلعين QRS؟ (مهارة سابقة)



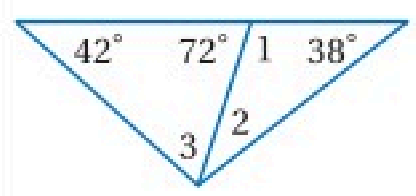
A 17, 17, 15

B 15, 15, 16

C 14, 15, 14

D 14, 14, 16

أوجد كلًّا من قياسات الزوايا الآتية: (الدرس 3-2)

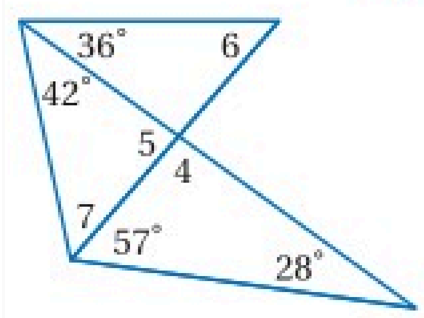


3) $m\angle 1$

4) $m\angle 2$

5) $m\angle 3$

أوجد كلًّا من قياسات الزوايا الآتية: (الدرس 3-2)



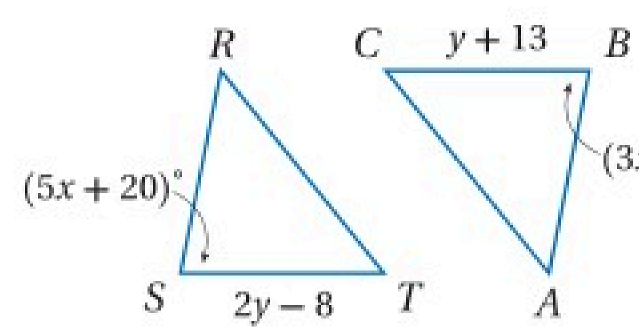
6) $m\angle 4$

7) $m\angle 5$

8) $m\angle 6$

9) $m\angle 7$

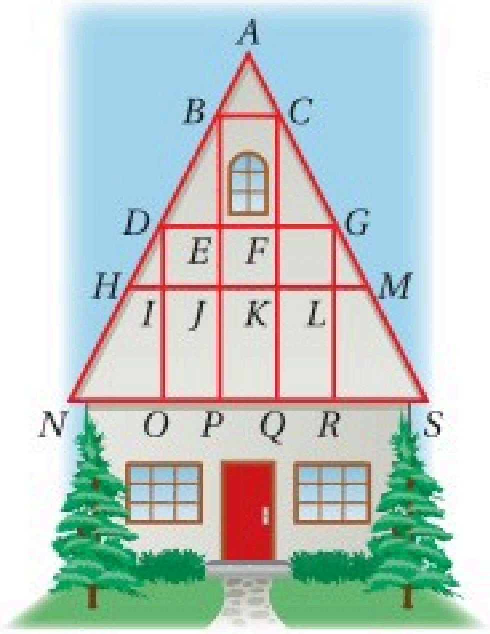
في الشكلين أدناه، إذا علمت أن $\triangle RST \cong \triangle ABC$ فأوجد: (الدرس 3-3)



10) قيمة x.

11) قيمة y.

12) **فن العمارة:** يبيّن الشكل المجاور بيتًا واجهته على شكل الحرف A، وتظهر عليه نقاط مختلفة. افترض أن القطع المستقيمة والزوايا التي تبدو أنها متطابقة هي متطابقة فعلًا. اكتب المثلثات المتطابقة. (الدرس 3-3)



13) **اختيار من متعدد:** إذا كان $\triangle SML \cong \triangle CBX$، فأي عبارة ممّا يأتي صحيحة؟ (الدرس 3-3)

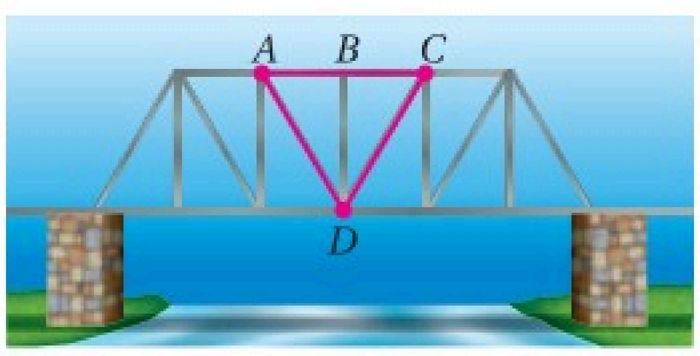
A $\overline{CB} \cong \overline{ML}$

B $\overline{XC} \cong \overline{ML}$

C $\angle X \cong \angle S$

D $\angle XCB \cong \angle LSM$

14) **جسور:** يُظهر الجسر في الشكل أدناه أن $\overline{AC} \perp \overline{BD}$، وأن B نقطة منتصف $\overline{AC}$. ما الطريقة التي يمكن استعمالها لإثبات أنّ $\triangle ABD \cong \triangle CBD$؟ (الدرس 3-4)



حدّد ما إذا كان $\triangle PQR \cong \triangle XYZ$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين: (الدرس 3-4)

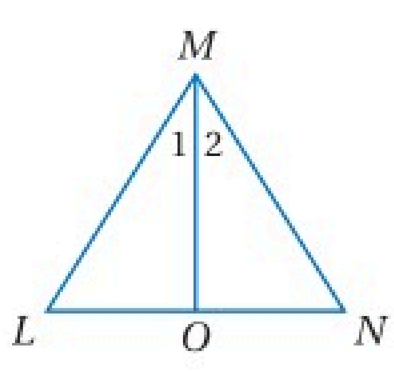
15) $P(3, -5), Q(11, 0), R(1, 6), X(5, 1), Y(13, 6), Z(3, 12)$

16) $P(-3, -3), Q(-5, 1), R(-2, 6), X(2, -6), Y(3, 3), Z(5, -1)$

17) اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 3-4)

المعطيات: $\triangle LMN$ متطابق الضلعين. فيه، $\overline{LM} \cong \overline{NM}$ ، $\overline{MO}$ تنصّف $\angle LMN$.

المطلوب: $\triangle MLO \cong \triangle MNO$



رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

3-5

إثبات تطابق المثلثات ASA , AAS
Proving Triangles Congruent-ASA, AAS

فيما سبق:

درست إثبات تطابق مثلثين باستعمال SAS , SSS .

(الدرس 3-4)

والآن:

- أستعمل المسلمة ASA لاختبار التطابق.
- أستعمل النظرية AAS لاختبار التطابق.

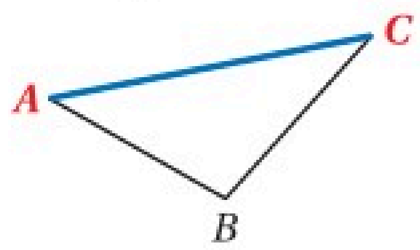
المفردات:

الضلع المحصور
Included Side

لماذا؟

تتضمن مسابقات التجديف شخصين أو أكثر يجلسون ووجوههم نحو مؤخرة القارب، ولكلٍّ منهم مجداف. ويتطلب السباق عادة مسطّحًا من الماء طوله 1500 متر على الأقل، ويمكن استعمال المثلثات المتطابقة لقياس المسافات التي يصعب قياسها مباشرة. مثل طول مضمار سباق الزوارق.

مسلّمة التطابق بزاويتين وضلع محصور بينهما ASA: الضلع الواقع بين زاويتين متتاليتين لمضلعٍ يُسمى **الضلع المحصور**، ففي $\triangle ABC$ المجاور، $\overline{AC}$ هو الضلع المحصور بين $\angle A$, $\angle C$.



مسلمة 3.3 التطابق بزاويتين وضلع محصور بينهما (ASA)

أضف إلى مطويتك

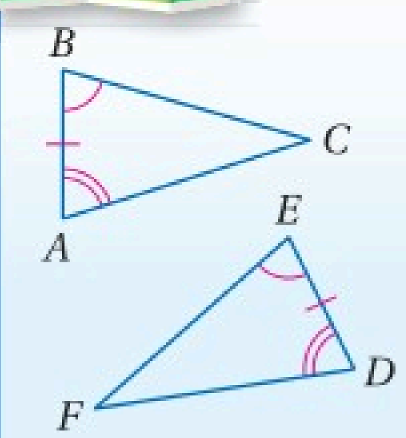
إذا طابقت زاويتان والضلع المحصور بينهما في مثلث نظائرهما في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان.

مثال: إذا كانت $\angle A \cong \angle D$,

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$,

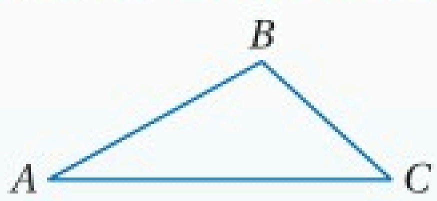
$\angle B \cong \angle E$,

فإنّ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

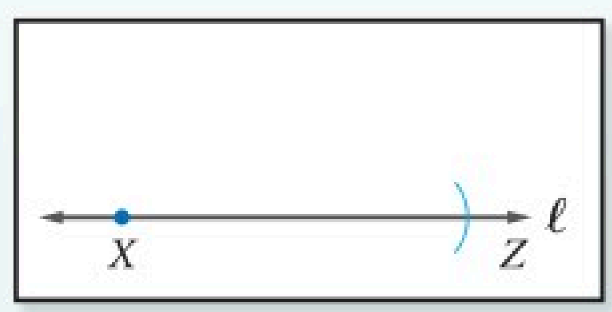


إنشاء هندسي
إنشاء مثلث يطابق مثلثًا مرسومًا باستعمال مسلمة التطابق بزاويتين وضلع محصور بينهما (ASA)

ارسم مثلثًا وسمِّه $\triangle ABC$، ثم استعمل المسلّمة ASA لتنشئ $\triangle XYZ$ الذي يطابق $\triangle ABC$.

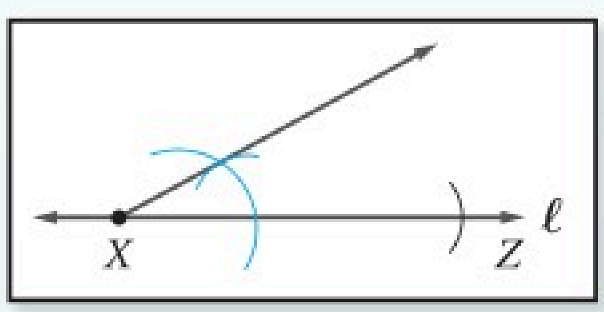


الخطوة 1:



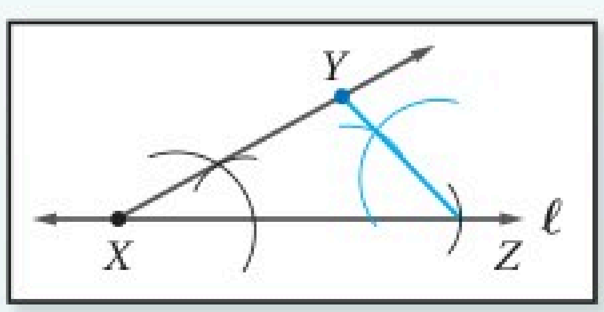
ارسم مستقيمًا ℓ ، واختر عليه النقطة X. وأنشئ $\overline{XZ}$ على أن تكون $\overline{XZ} \cong \overline{AC}$.

الخطوة 2:



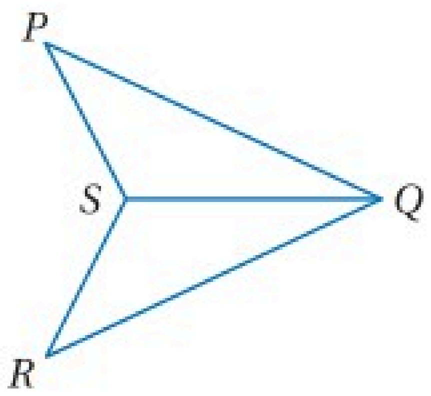
أنشئ زاوية مطابقة لِـ $\angle A$ عند النقطة X باستعمال $\overline{XZ}$ ضلعًا للزاوية.

الخطوة 3:



أنشئ زاوية مطابقة لِـ $\angle C$ عند النقطة Z باستعمال $\overline{XZ}$ ضلعًا للزاوية، وسمِّ نقطة تقاطع الضلعين الجديدين للزاويتين Y.

مثال 1 استعمال ASA لإثبات تطابق مثلثين



اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{QS}$ تنصّف $\angle PQR$

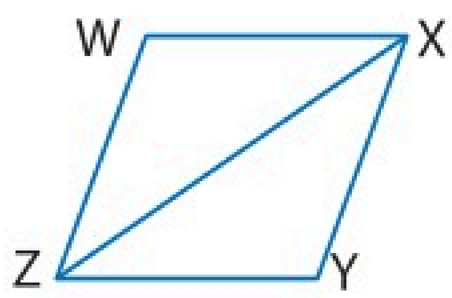
$\angle PSQ \cong \angle RSQ$.

المطلوب: $\triangle PQS \cong \triangle RQS$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{QS}$ تنصّف $\angle PQR$، $\angle PSQ \cong \angle RSQ$.	1) معطيات
2) $\angle PQS \cong \angle RQS$	2) تعريف منصّف الزاوية
3) $\overline{QS} \cong \overline{QS}$	3) خاصية الانعكاس للتطابق
4) $\triangle PQS \cong \triangle RQS$	4) ASA

تحقق من فهمك



1) اكتب برهاناً حرًّا.

المعطيات: $\overline{ZX}$ تنصّف $\angle WZY$ ، $\overline{XZ}$ تنصّف $\angle YXW$.

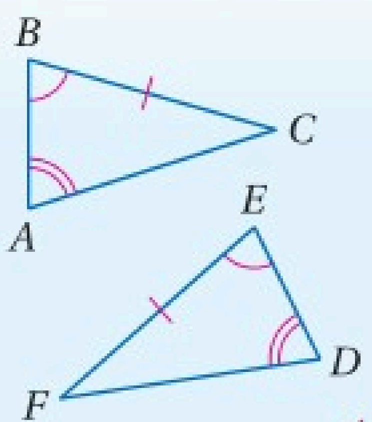
المطلوب: $\triangle WXZ \cong \triangle YXZ$

نظريّة التطابق بزاويتين وضلع غير محصور بينهما AAS: تطابقُ زاويتين وضلع غير محصور يكفي لإثبات أنّ المثلثين متطابقان. وتُعدّ علاقة التطابق هذه نظرية؛ لأنه يمكن إثبات صحتها باستعمال نظرية الزاوية الثالثة.

نظريّة 3.5 التطابق بزاويتين وضلع غير محصور بينهما (AAS)

أضف إلى مطويتك

إذا طابقتْ زاويتان وضلع غير محصور بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر يكون المثلثان متطابقين.



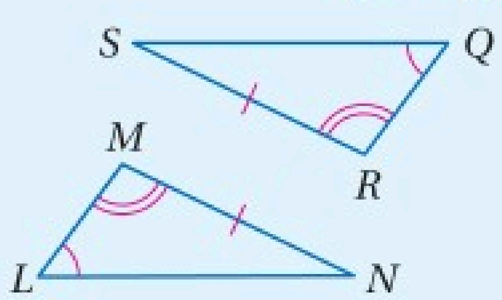
مثال إذا كانت $\angle A \cong \angle D,$

$\angle B \cong \angle E,$

$\overline{BC} \cong \overline{EF},$

فإنّ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

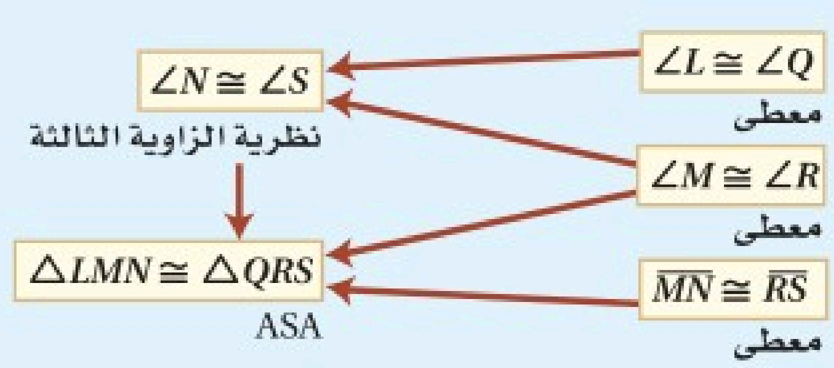
برهان نظرية التطابق بزاويتين وضلع غير محصور بينهما (AAS)



المعطيات: $\angle L \cong \angle Q,\ \angle M \cong \angle R,\ \overline{MN} \cong \overline{RS}$

المطلوب: $\triangle LMN \cong \triangle QRS$

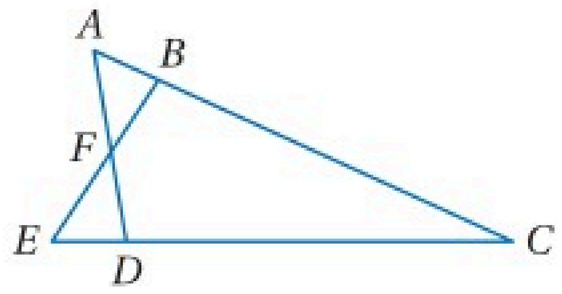
البرهان:



إرشادات للدراسة

SSA تطابق ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما: بالرغم من أن تطابق ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما لا يكفي لإثبات أن المثلثين متطابقان؛ لكن تطابق زاويتين وضلع سواءً أكان محصورًا بينهما أو غير محصور بينهما كافٍ لإثبات تطابق مثلثين.

مثال 2 استعمال AAS لإثبات تطابق مثلثين



اكتب برهانًا حرًّا.

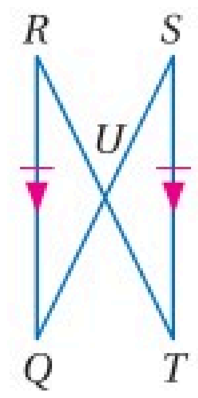
المعطيات: $\angle DAC \cong \angle BEC$,
$\overline{DC} \cong \overline{BC}$

المطلوب: $\triangle ACD \cong \triangle ECB$

البرهان: بما أن: $\angle DAC \cong \angle BEC$ ، $\overline{DC} \cong \overline{BC}$ ، وأن $\angle C \cong \angle C$ بحسب خاصية الانعكاس،
إذن $\triangle ACD \cong \triangle ECB$ بحسب النظرية AAS .

تحقق من فهمك

2) اكتب برهانًا تسلسليًّا:



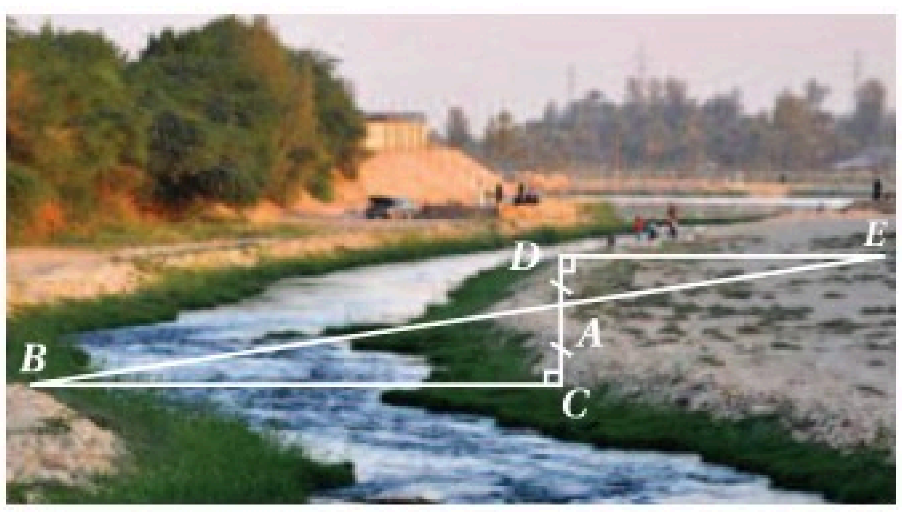
المعطيات: $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$, $\overline{RQ} \parallel \overline{ST}$

المطلوب: $\triangle RUQ \cong \triangle TUS$

يمكنك استعمال المثلثات المتطابقة لقياس المسافات التي يصعب قياسها مباشرة.

مثال 3 من واقع الحياة

مسافات: أراد أكرم أن يحسب المسافة بين النقطتين C , B، فقام بتعيين نقطة أخرى D ليستعملها نقطةً مرجعيةً، بحيث تكون العلاقات بين القطع المستقيمة كما في الشكل أدناه. إذا علمت أن طول DE يساوي 8 ft، فاحسب المسافة بين النقطتين C , B.



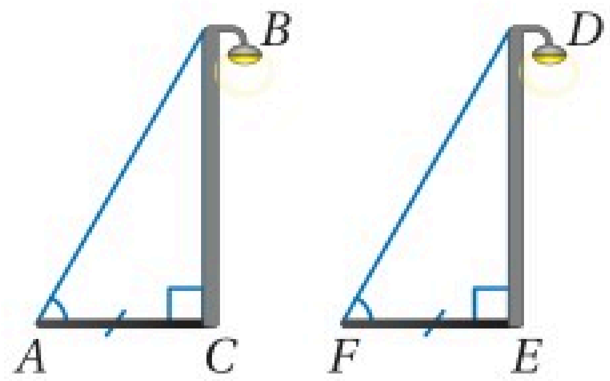
لتحديد طول $\overline{CB}$ ، يجب أولًا أن نثبت أن المثلثين اللذين أنشأهما أكرم متطابقان.

- بما أن $\overline{CD}$ عمودية على كلٍّ من $\overline{DE}$, $\overline{CB}$ كما هو مبيّن في الشكل، وجميع الزوايا القوائم متطابقة.
إذن $\angle BCA \cong \angle EDA$.
- $\overline{AC} \cong \overline{AD}$
- $\angle BAC$, $\angle EAD$ زاويتان متقابلتان بالرأس إذن هما متطابقتان، وبحسب ASA ينتج أن $\triangle BAC \cong \triangle EAD$

وبما أن $\triangle BAC \cong \triangle EAD$ فإن $\overline{CB} \cong \overline{DE}$ ؛ لأن العناصر المتناظرة متطابقة. وبما أن طول $\overline{DE}$ يساوي 8 ft فإن طول $\overline{CB}$ يساوي 8 ft أيضًا، وهي المسافة بين النقطتين C, B .

إرشادات للدراسة

زاوية-زاوية-زاوية
$\angle B$, $\angle E$ في المثال 3 متطابقتان بحسب نظرية الزاوية الثالثة. إن تطابق الزوايا الثلاث المتناظرة غير كافٍ لإثبات تطابق مثلثين.



تحقق من فهمك

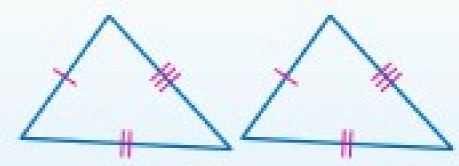
3) استعمل الشكل المجاور الذي يمثل عمودَي كهرباء وظلَّيهما لكتابة برهان حرٍّ يبيِّن أن $\overline{BC} \cong \overline{DE}$

تعلمت طرائق عديدة لإثبات تطابق المثلثات.

ملخص المفاهيم — إثبات تطابق المثلثات

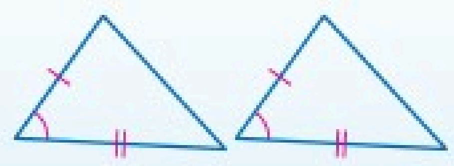
أضف إلى مطويتك

SSS



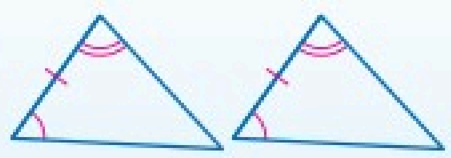
يتطابق مثلثان إذا كانت أضلاعُهما المتناظرة متطابقة.

SAS



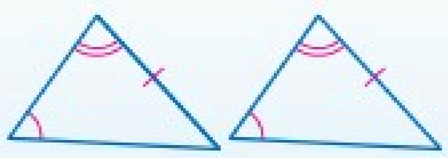
يتطابق المثلثان إذا طابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.

ASA



يتطابق مثلثان إذا طابقت زاويتان والضلع المحصور بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.

AAS



يتطابق مثلثان إذا طابقت زاويتان وضلع غير محصور بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.

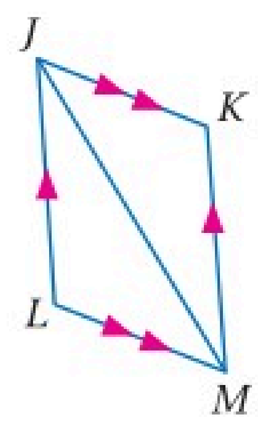
تأكد

المثالان 1, 2 **برهان:** برهن كلًّا مما يأتي باستعمال طريقة البرهان المذكورة:

1) برهان تسلسلي

المعطيات: $\overline{JK} \parallel \overline{LM}$, $\overline{JL} \parallel \overline{KM}$

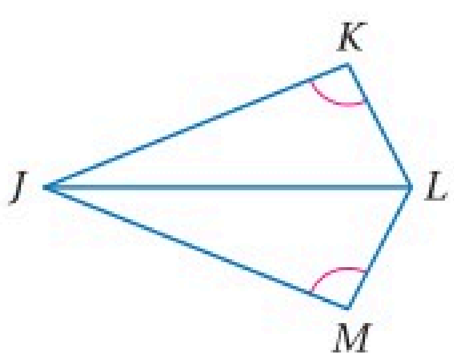
المطلوب: إثبات أن: $\triangle JML \cong \triangle MJK$



2) برهان حرّ

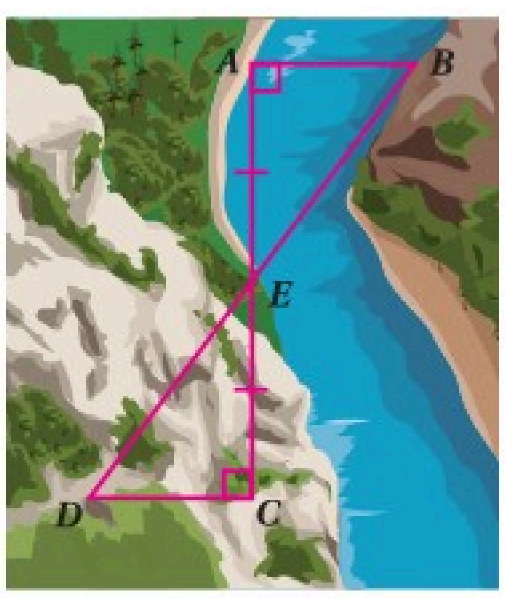
المعطيات: $\angle K \cong \angle M$, $\overline{JL}$ تنصف $\angle KLM$.

المطلوب: إثبات أن: $\triangle JKL \cong \triangle JML$



المثال 3

3) **بناء جسور:** يحتاج مسّاح إلى إيجاد المسافة بين النقطتين A, B المبينتين في الشكل المجاور لبناء جسر فوق النهر. فوضعَ وتدًا عند A، ووضع زميله وتدًا عند B في الجهة المقابلة، ثمّ عيّن المسّاح النقطة C في جهة A، بحيث كانت $\overline{CA} \perp \overline{AB}$. ووضع وتدًا رابعًا عند E، التي هي نقطة منتصف $\overline{CA}$. وأخيرًا وضع وتدًا عند النقطة D، بحيث كان $\overline{CD} \perp \overline{CA}$ ، والنقاط D, E, B تقع على مستقيمٍ واحدٍ.

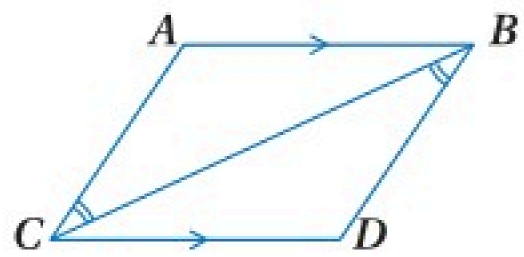


a) وضّح كيف يمكن أن يستعمل المسّاح المثلثين المتكونين لإيجاد المسافة بين النقطتين A, B.

b) إذا كان: $AC = 160\,m$, $DC = 60\,m$, $DE = 100\,m$، فأوجد المسافة بين النقطتين A, B . ووضّح إجابتك.

تدرب وحل المسائل

المثال 1 **برهان:** على الشكل المقابل:

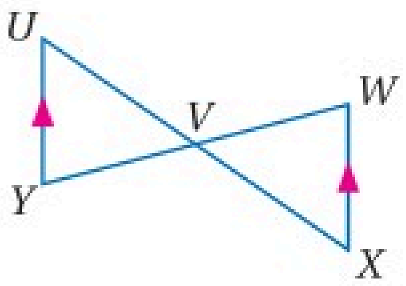


4) **المعطيات:** $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

$\angle CBD \cong \angle BCA$

المطلوب: $\triangle CAB \cong \triangle BDC$

المثال 2 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

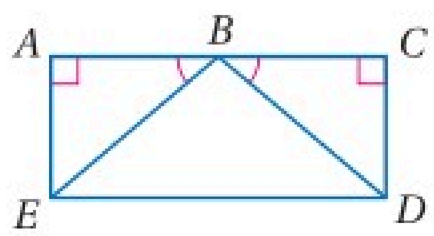


5) **المعطيات:** V نقطة منتصف $\overline{WY}$

$\overline{XW} \parallel \overline{UY}$

المطلوب: $\triangle UVY \cong \triangle XVW$

6) **برهان:** اكتب برهانًا تسلسليًّا.

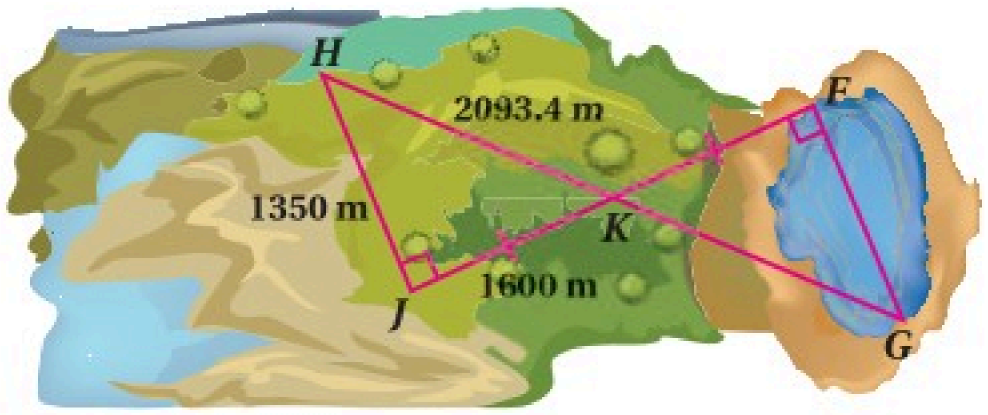


المعطيات: $\angle A, \angle C$ زاويتان قائمتان.

$\angle ABE \cong \angle CBD$, $\overline{AE} \cong \overline{CD}$

المطلوب: $\overline{BE} \cong \overline{BD}$

المثال 3 **7)** **سباق زوارق:** يرغب المشرفون في إقامة سباق تجديفٍ في بحيرة، لكنهم غير متأكدين ممَّا إذا كان طول البحيرة كافيًا لإجراء السباق أم لا، ولقياس طول البحيرة حدّدوا رؤوس المثلثين المبينين في الشكل أدناه، ووجدوا أطوال أضلاع $\triangle HJK$ ، استعمل المعلومات الواردة في فقرة لماذا للإجابة عن الفقرتين a, b

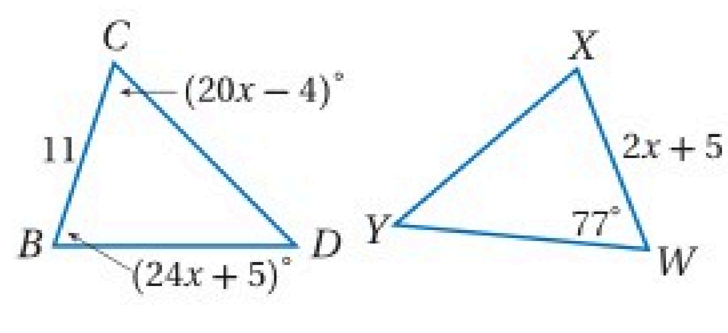


a) وضّح كيف يستعمل المشرفون على السباق المثلثين المتكونين لتقدير المسافة FG عبر البحيرة.

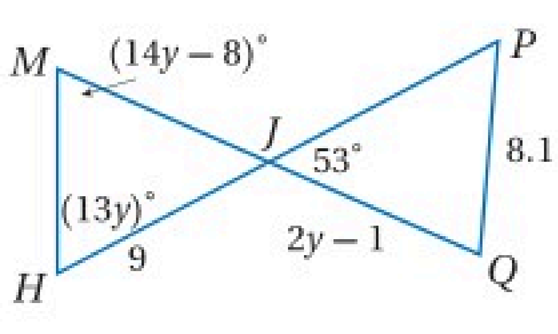
b) هل طول البحيرة كافٍ لإجراء سباق الزوارق باستعمال القياسات المعطاة؟ وضّح إجابتك.

جبر: أوجد قيمة المتغير التي تجعل المثلثين متطابقين في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

8) $\triangle BCD \cong \triangle WXY$



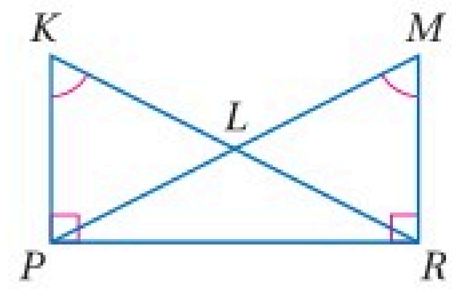
9) $\triangle MHJ \cong \triangle PQJ$



برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين

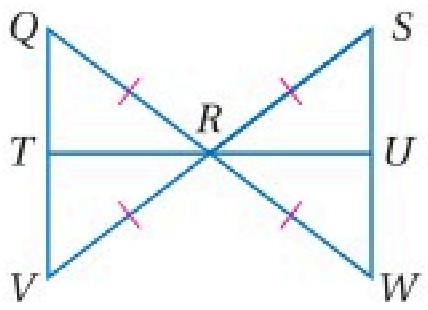
10) **المعطيات:** $\angle K \cong \angle M$, $\overline{KP} \perp \overline{PR}$, $\overline{MR} \perp \overline{PR}$

المطلوب: $\angle KPL \cong \angle MRL$



11) **المعطيات:** $\overline{QR} \cong \overline{SR} \cong \overline{WR} \cong \overline{VR}$

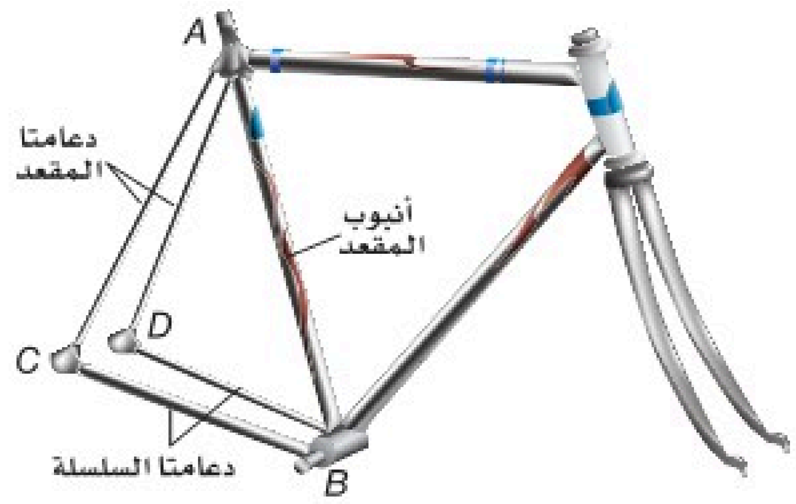
المطلوب: $\overline{QT} \cong \overline{WU}$



الربط مع الحياة

يعتمد حجم الدراجة الهوائية على طول أنبوب المقعد فيها. ويتراوح هذا الطول في الدراجات الهوائية للشباب ما بين $12\,in$ إلى $26\,in$. وتعتبر ملائمة للراكب إذا استطاع أن يركب الدراجة بسهولة وهو واقف على الأرض.

12) **دراجات هوائية:** يشكّل أنبوب مقعد الدراجة مثلثًا مع كلٍّ من دعامتَي السلسلة والمقعد. إذا كانت كل دعامة مقعد تشكّل زاوية قياسها $68°$ مع دعامة السلسلة المناظرة لها، وكل دعامة سلسلة تشكل زاوية قياسها $44°$ مع أنبوب المقعد، فبيّنْ أن دعامتَي المقعد لهما الطول نفسه.



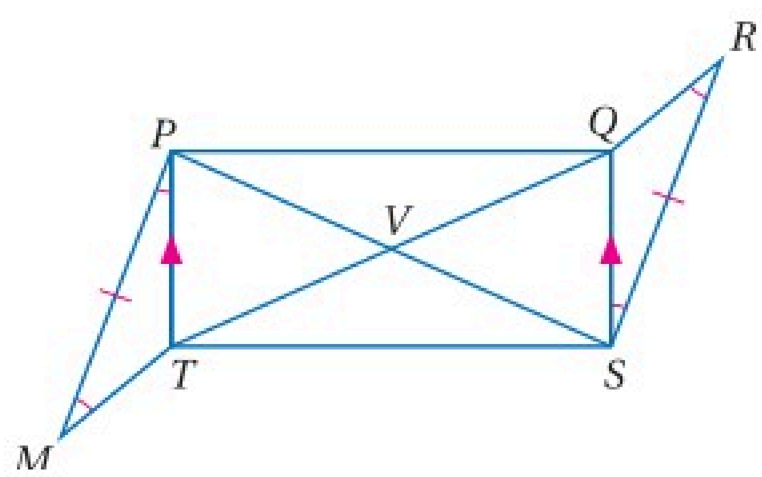
مسائل مهارات التفكير العليا

13) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثين يمكن إثبات تطابقهما باستعمال مسلّمة ASA، وسمِّهما.

14) **اكتشف الخطأ:** يقول عمر إنه لا يمكن إثبات تطابق مثلثين بتطابق ثلاث زوايا AAA، بينما يقول حسن إنه بإمكانه إثبات هذا التطابق، أيُّهما كانت إجابته صحيحة؟ وضح إجابتك.

15) **تبرير:** أوجد مثالًا مضادًّا يوضّح لماذا لا تستعمل حالة تطابق ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما SSA؛ لإثبات تطابق مثلثين.

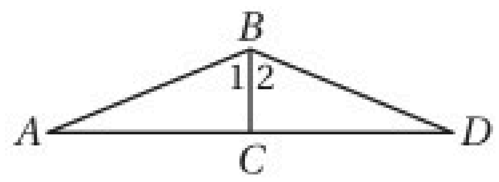
16) **تحدٍّ:** باستعمال المعلومات المعطاة في الشكل المجاور، اكتب برهانًا تسلسليًّا لإثبات أن $\triangle PVQ \cong \triangle SVT$.



17) **اكتب:** لخّص الطرائق الواردة في الدروس من 3–3 إلى 3–5؛ لإثبات تطابق المثلثات في جدول موضحًا متى تُستعمل كل طريقة.

تدريب على اختبار

18) في الشكل أدناه، $\overline{BC} \perp \overline{AD}$, $\angle 1 \cong \angle 2$.



أي نظرية أو مسلّمة مما يأتي يمكن استعمالها لإثبات أن $\triangle ABC \cong \triangle DBC$؟

A) AAS
B) ASA
C) SAS
D) SSS

19) ما قيمة $\sqrt{121 + 104}$ ؟

A) 15
B) 21
C) 125
D) 225

مراجعة تراكمية

20) إذا علمت أن: $A(6, 4), B(1, -6), C(-9, 5), X(0, 7), Y(5, -3), Z(15, 8)$ ، فبيّن ما إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ أم لا. ووضّح إجابتك. (الدرس 4-3)

21) **جبر:** إذا كان: $\triangle RST \cong \triangle JKL, RS = 7, ST = 5, RT = 9 + x, JL = 2x - 10, JK = 4y - 5$ ، فارسم شكلًا يمثّل المثلثين المتطابقين، وسمّه. ثمّ أوجد قيمة كلٍّ من x, y . (الدرس 3-3)

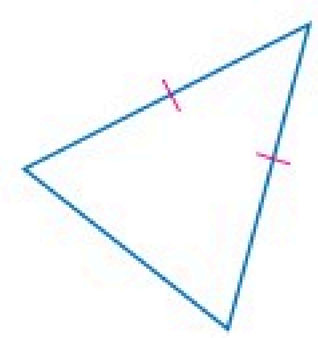
22) أكمل جدول الصواب المجاور (مهارة سابقة)

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
F	T		
T	T		
F	F		
T	F		

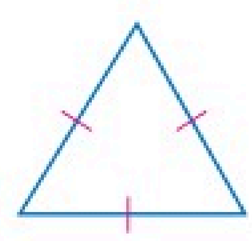
استعد للدرس اللاحق

صنف كلًّا من المثلثين الآتيين وفقًا لأضلاعه:

23)



24)



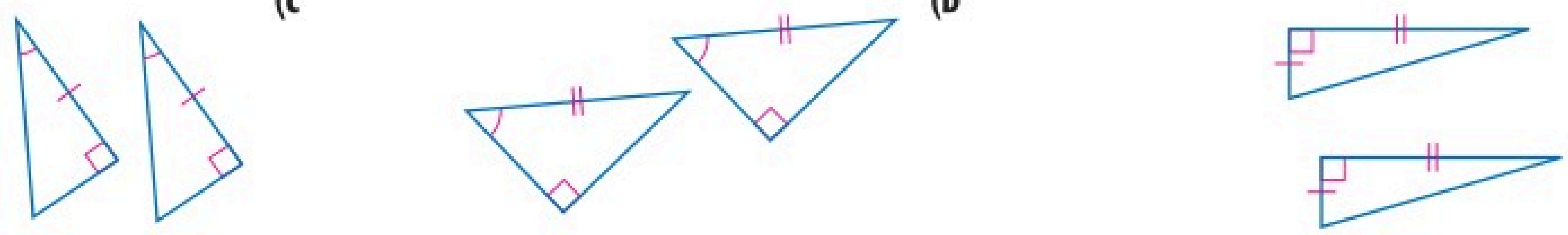
توسّع **3-5** معمل الهندسة

تطابق المثلثات القائمة
Congruence in Right Triangles

في الدرسين 5 - 3 ,4 - 3 تعلمت نظريات ومسلّمات تُثبت تطابق المثلثات، فكيف تطبّق هذه النظريات والمسلّمات على المثلثات القائمة؟

ادرس كل زوج من المثلثات القائمة الآتية:

a) b) c)



حلّل:

1) هل يتطابق كل زوج من المثلثات؟ إن كان ذلك صحيحًا، فأي نظرية تطابق أو مسلمة استعملت؟

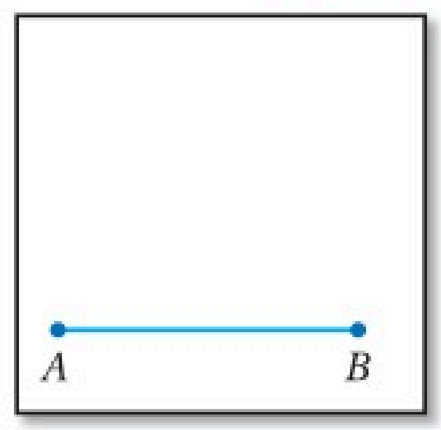
2) أعد كتابة قواعد التطابق في التمرين 1 باستعمال الساق (L)، أو الوتر (H) ليحل محل الضلع (S). واحذف A لكل زاوية قائمة؛ لأن كل مثلث قائم الزاوية يحوي زاوية قائمة. وجميع الزوايا القوائم متطابقة.

3) **خمّن:** إذا علمت أن ضلعَي الزاوية القائمة المتناظرين في المثلثات القائمة متطابقان، فما المعلومات الأخرى الضرورية حتى تؤكد تطابق المثلثات؟ وضّح إجابتك.

في الدرس 5–3 درست أن الحالة SSA ليست كافية لتحديد تطابق مثلثين، فهل يمكن استعمالها لبرهنة تطابق مثلثين قائمين؟

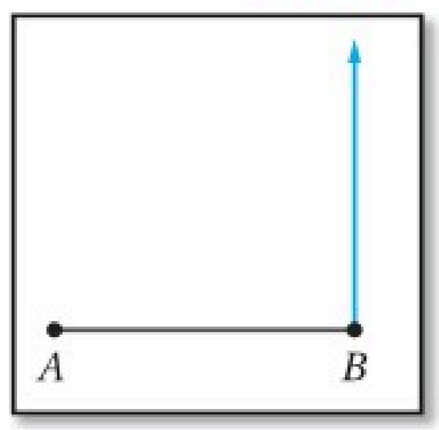
نشاط SSA والمثلثات القائمة

الخطوة 1:



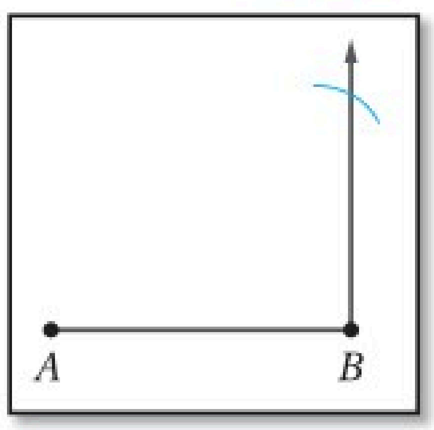
ارسم $\overline{AB}$ على أن يكون $AB = 6$ cm

الخطوة 2:



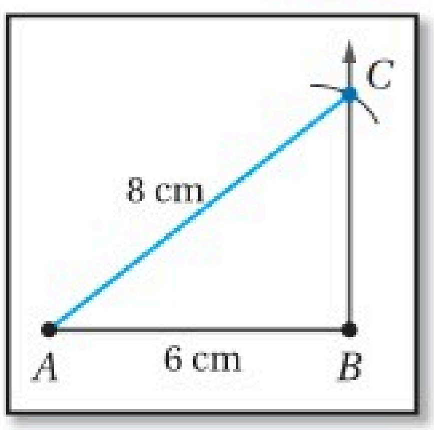
استعمل المنقلة لرسم نصف مستقيم من B عمودي على $\overline{AB}$.

الخطوة 3:



افتح الفرجار فتحة تساوي 8 cm وركِّزه عند النقطة A، ثمّ ارسم قوسًا يقطع نصف المستقيم.

الخطوة 4:



سمّ نقطة التقاطع C، ثم ارسم $\overline{AC}$ لإكمال $\triangle ABC$.

حلّل:

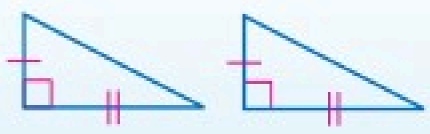
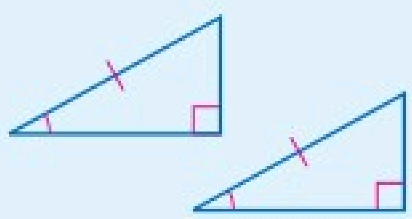
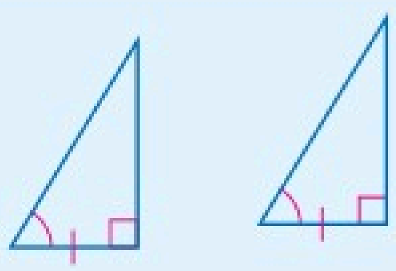
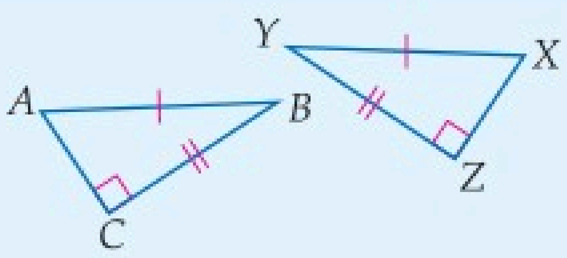
4) هل يؤدي النموذج إلى رسم مثلث وحيد؟

5) هل يمكنك استعمال طولَي الوتر والضلع لتبيّن تطابق مثلثين قائمين؟

6) خمّن حالة SSA الخاصة بالمثلثات القائمة الزاوية.

النشاط السابق يبيّن أربع طرائق لإثبات تطابق المثلثات القائمة وهي:

نظريات ومسلّمات — **تطابق المثلثات القائمة** — أضف إلى مطويتك

نظرية 3.6: تطابق الساقين LL إذا طابق ساقان في مثلث قائم نظيرَيهما في مثلث قائم آخر، فإن المثلثين متطابقان.	
نظرية 3.7: تطابق وتر وزاوية حادة HA إذا طابق وتر وزاوية حادة في مثلث قائم الوتر والزاوية الحادة المناظرة في مثلث قائم آخر، فإن المثلثين متطابقان.	
نظرية 3.8: تطابق ساق وزاوية حادة LA إذا طابق ساق وزاوية حادة في مثلث قائم الساق المناظرة والزاوية الحادة المناظرة في مثلث قائم آخر، فإن المثلثين متطابقان.	
نظرية 3.9: تطابق وتر وساق HL إذا طابق وتر وساق في مثلث قائم وترًا وساقًا في مثلث قائم آخر، فإن المثلثين متطابقان.	

قراءة الرياضيات

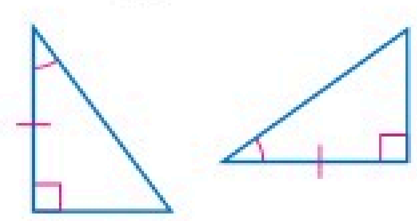
اختصارات رياضية

L هي اختصار لِـ leg أو ساق، وَ H اختصار لِـ Hypotenuse أو وتر، وَ A اختصار لِـ Angle أو زاوية.

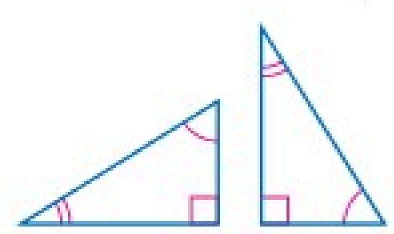
تمارين:

حدّد ما إذا كان كل زوج من المثلثات الآتية متطابقين أم لا، وإذا كانت الإجابة "نعم"، فاذكر المسلمة أو النظرية التي استعملتها:

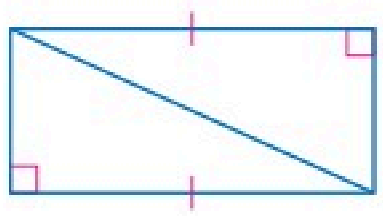
7)



8)



9)



برهان: اكتب برهانًا لكلٍّ مما يأتي:

10) النظرية 3.7

11) النظرية 3.8 (إرشاد: توجد حالتان ممكنتان)

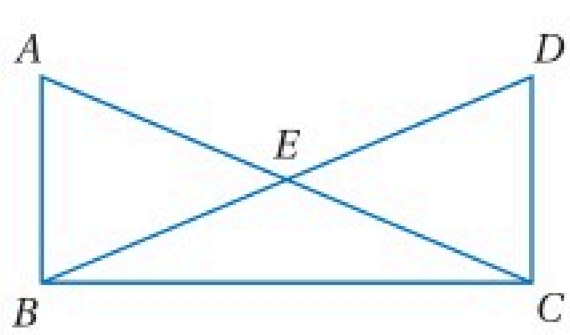
12) النظرية 3.9 (إرشاد: استعمل نظرية فيثاغورس)

استعمل الشكل المجاور للإجابة عن السؤال 13.

13) **المعطيات:** $\overline{AB} \perp \overline{BC}, \overline{DC} \perp \overline{BC}$

$\overline{AC} \cong \overline{BD}$

المطلوب: $\overline{AB} \cong \overline{DC}$



رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

3-6 المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع
Isosceles and Equilateral Triangles

فيما سبق:

درست المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع.

(الدرس 3-1)

والآن:

- أستعمل خصائص المثلثات المتطابقة الضلعين.
- أستعمل خصائص المثلثات المتطابقة الأضلاع.

المفردات:

ساقا المثلث المتطابق الضلعين
legs of an isosceles triangle

زاوية الرأس
vertex angle

زاويتا القاعدة
base angles

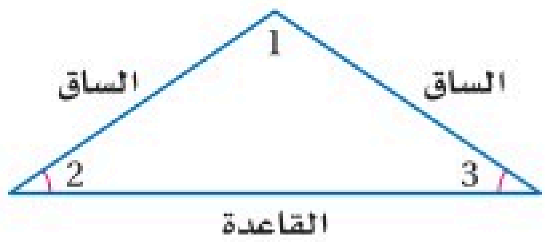
لماذا؟

للعبة القطار السريع في مدينة الألعاب دعائم مثلثية بين المسارات لتقويتها وتثبيتها، والدعائم المثلثية الظاهرة في الصورة عبارة عن مثلثات متطابقة الضلعين.

خصائص المثلث المتطابق الضلعين: تذكّر أن المثلثات المتطابقة الضلعين لها ضلعان متطابقان على الأقل، وأن لعناصرها أسماءً خاصة.

حيث يُسمّى الضلعان المتطابقان **الساقين**، والزاوية التي ضلعاها الساقان تُسمّى **زاوية الرأس**. ويُسمى ضلع المثلث المقابل لزاوية الرأس القاعدةَ. والزاويتان المكونتان من القاعدة والضلعين المتطابقين تُسميان **زاويتَي القاعدة**.

ففي الشكل المجاور، $\angle 1$ هي زاوية الرأس، وزاويتا القاعدة هما $\angle 3$ ، $\angle 2$.



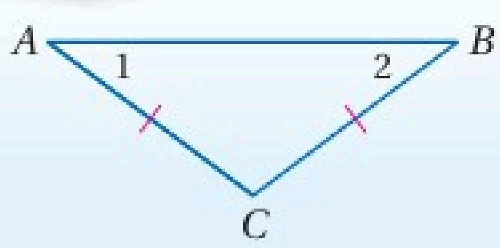
نظريات — المثلث المتطابق الضلعين

أضف إلى مطويتك

3.10 نظرية المثلث المتطابق الضلعين

إذا تطابق ضلعان في مثلث، فإن الزاويتين المقابلتين لهما متطابقتان.

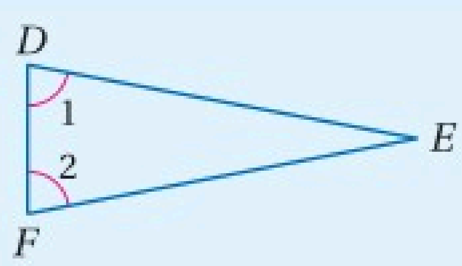
مثال: إذا كان $\overline{AC} \cong \overline{BC}$، فإن $\angle 2 \cong \angle 1$.



3.11 عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين

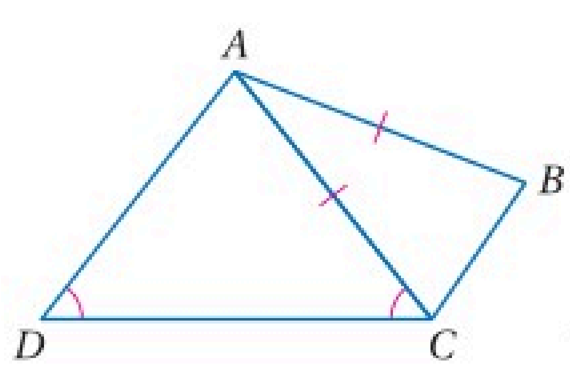
إذا تطابقت زاويتان في مثلث، فإن الضلعين المقابلين لهما متطابقان.

مثال: إذا كان $\angle 2 \cong \angle 1$ ، فإن $\overline{FE} \cong \overline{DE}$



ستبرهن النظرية 3.11 في السؤال 24

مثال 1 القطع المستقيمة المتطابقة والزوايا المتطابقة



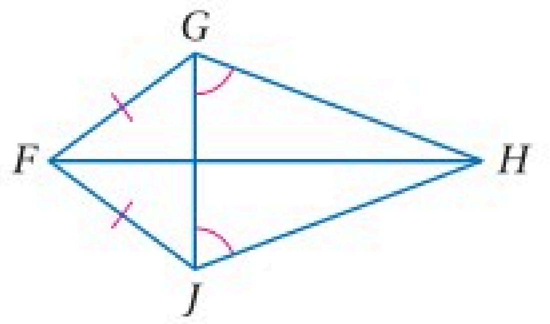
a) سمِّ زاويتين متطابقتين غير المشار إلى تطابقهما في الشكل.

$\angle ACB$ تقابل $\overline{AB}$، $\angle B$ تقابل $\overline{AC}$ ؛

لذا فإن $\angle ACB \cong \angle B$.

b) سمِّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين غير المشار إلى تطابقهما في الشكل.

$\overline{AD}$ تقابل $\angle ACD$، $\overline{AC}$ تقابل $\angle D$ ، لذا فإن $\overline{AD} \cong \overline{AC}$.



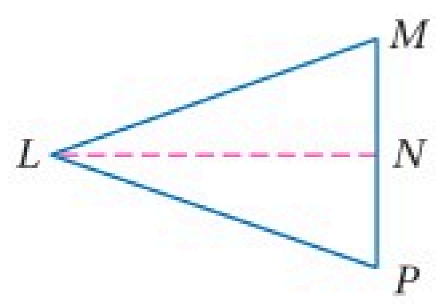
تحقق من فهمك

1A) سمّ زاويتين متطابقتين غير مشار إلى تطابقهما في الشكل.

1B) سمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين غير المشار إلى تطابقهما في الشكل.

لإثبات نظرية المثلث المتطابق الضلعين، ارسم مستقيمًا مساعدًا، ثم استعمل المثلثين الناتجين.

البرهان نظرية المثلث المتطابق الضلعين



المعطيات: في $\triangle LMP$ ، $\overline{LM} \cong \overline{LP}$

المطلوب: إثبات أن: $\angle M \cong \angle P$

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) افترض أن N نقطة منتصف $\overline{MP}$.	**1)** كل قطعة مستقيمة لها نقطة منتصف واحدة.
2) ارسم قطعة مساعدة $\overline{LN}$.	**2)** كل نقطتين تحدِّدان مستقيمًا.
3) $\overline{PN} \cong \overline{NM}$	**3)** نظرية نقطة المنتصف.
4) $\overline{LN} \cong \overline{LN}$	**4)** خاصية الانعكاس في التطابق.
5) $\overline{LM} \cong \overline{LP}$	**5)** معطًى.
6) $\triangle LMN \cong \triangle LPN$	**6)** مسلّمة التطابق بثلاثة أضلاع.
7) $\angle M \cong \angle P$	**7)** العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقةً.

خصائص المثلث المتطابق الأضلاع: نظرية المثلث المتطابق الضلعين تقود إلى نتيجتين حول زوايا المثلث المتطابق الأضلاع.

مراجعة المفردات

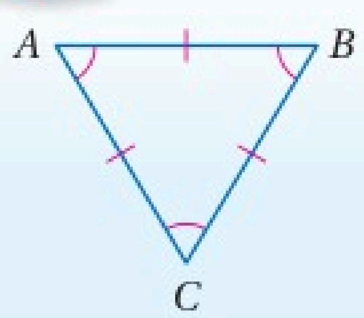
المثلث المتطابق الأضلاع: هو مثلث أضلاعه الثلاثة متطابقة.

نتيجتان المثلث المتطابق الأضلاع

أضف إلى مطويتك

3.3 يكون المثلث متطابق الأضلاع إذا وفقط إذا كان متطابق الزوايا.

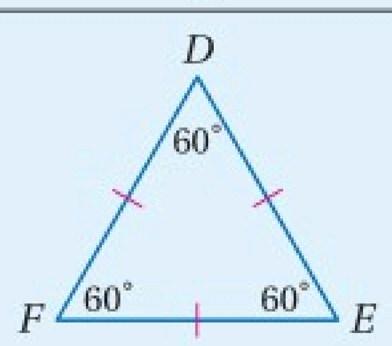
مثال: $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$ ،
إذا وفقط إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$



3.4 قياس كل زاوية في المثلث المتطابق الأضلاع $60°$.

مثال: إذا كان $\overline{DE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FD}$ ،

فإن $m\angle E = m\angle F = m\angle D = 60°$.

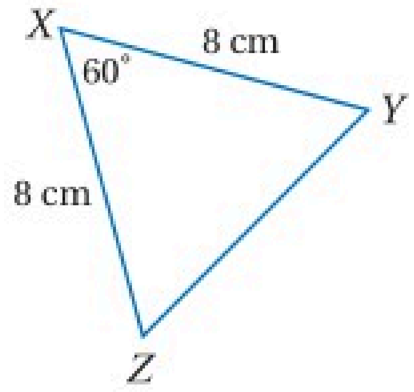


ستبرهن النتيجتين 3.3, 3.4 في السؤالين 22, 23

مثال 2 إيجاد القياسات المجهولة

أوجد كل قياس من القياسات الآتية:

$m\angle Y$ (a

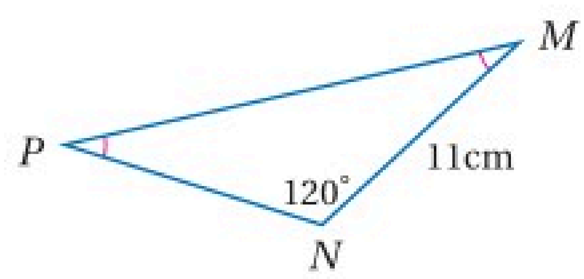


بما أن $XY = XZ$, $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$ ، وباستعمال نظرية المثلث المتطابق الضلعين، تكون زاويتا القاعدة Z, Y متطابقتين؛ لذا فإن $m\angle Z = m\angle Y$. استعمل نظرية مجموع زوايا المثلث لإيجاد $m\angle Y$.

$m\angle X + m\angle Y + m\angle Z = 180°$	نظرية مجموع زوايا المثلث
$60° + m\angle Y + m\angle Y = 180°$	$m\angle X = 60°, m\angle Z = m\angle Y$
$60° + 2(m\angle Y) = 180°$	بسّط
$2(m\angle Y) = 120°$	اطرح 60 من كل طرف
$m\angle Y = 60°$	اقسم كل طرف على 2

YZ (b

$m\angle Z = m\angle Y$ ؛ لذا بالتعويض فإن $m\angle Z = 60°$، وبما أن $m\angle X = 60°$ ، فإن قياس كل زاوية من الزوايا الثلاث $60°$ ؛ لذا فالمثلث متطابق الزوايا. وهو متطابق الأضلاع أيضًا، لذا فإن $XY = XZ = ZY$. وبما أن $XY = 8\,cm$ ، إذن $YZ = 8\,cm$



تحقق من فهمك

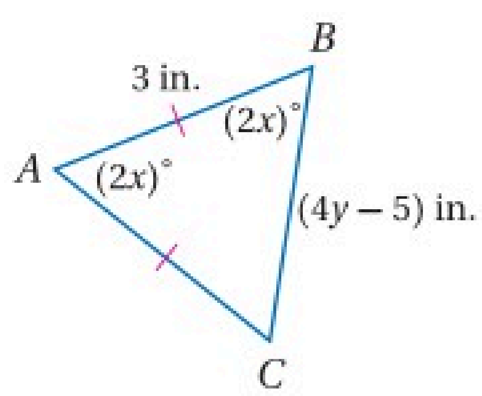
$m\angle M$ (2A

PN (2B

يمكنك استعمل خصائص المثلثات المتطابقة الأضلاع والجبر لتجد القيم المجهولة.

مثال 3 إيجاد القيم المجهولة

جبر: أوجد قيمة كل متغير في الشكل المجاور.

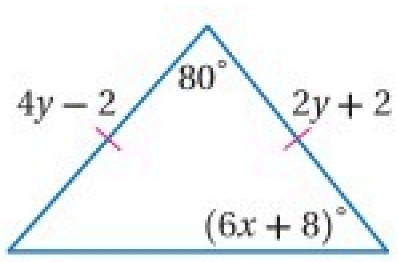


بما أن $m\angle A = m\angle B$؛ أي أن $\angle A \cong \angle B$ فإن $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ باستعمال عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين؛ وبذلك فإن أضلاع المثلث متطابقة. وقياس كل زاوية فيه تساوي $60°$ ؛ لذا فإن $2x = 60$, $x = 30$.

وبما أن المثلث متطابق الأضلاع، إذن جميع الأضلاع متطابقة.

$AB = BC$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$3 = 4y - 5$	عوّض
$8 = 4y$	اجمع 5 إلى كلٍّ من الطرفين
$2 = y$	اقسم كل طرف على 4

تحقق من فهمك



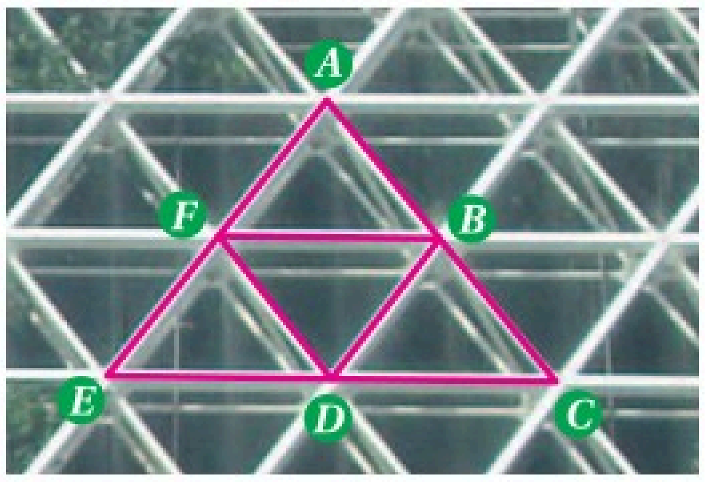
3) أوجد قيمة كلٍّ من المتغيرين في الشكل المجاور .

إرشادات للدراسة

المثلثات المتطابقة الضلعين

كما اكتشفت في المثال 2 ، أي مثلث متطابق الضلعين فيه زاوية قياسها °60 يكون مثلثًا متطابق الأضلاع.

مثال 4 من واقع الحياة **تطبيق تطابق المثلثات**



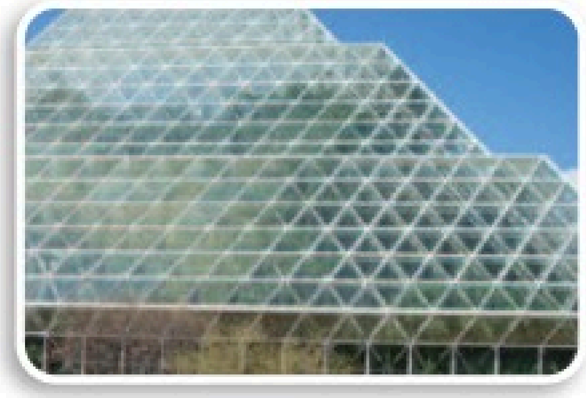
بناء: في الصورة المجاورة. $\triangle ACE$ مثلث متطابق الأضلاع. F نقطة منتصف $\overline{AE}$، D نقطة منتصف $\overline{EC}$، B نقطة منتصف $\overline{CA}$. برهن أن $\triangle FBD$ متطابق الأضلاع.

المعطيات: $\triangle ACE$ متطابق الأضلاع، و F نقطة منتصف $\overline{AE}$، و D نقطة منتصف $\overline{EC}$،و B نقطة منتصف $\overline{CA}$

المطلوب: إثبات أن: $\triangle FBD$ متطابق الأضلاع.

البرهان:

العبارات	المبررات
(1 $\triangle ACE$ متطابق الأضلاع.	(1 معطى
(2 F نقطة منتصف $\overline{AE}$، و D نقطة منتصف $\overline{EC}$، و B نقطة منتصف $\overline{CA}$.	(2 معطى
(3 $\angle A \cong \angle C \cong \angle E$	(3 المثلث المتطابق الأضلاع متطابق الزوايا
(4 $AF = FE, ED = DC, CB = BA$	(4 تعريف نقطة المنتصف
(5 $\overline{CA} \cong \overline{AE} \cong \overline{EC}$	(5 تعريف المثلث المتطابق الأضلاع
(6 $CA = AE = EC$	(6 تعريف التطابق
(7 $\frac{1}{2}CA = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}EC$	(7 خاصية الضرب
(8 $AF = FE = ED = DC = AB = BC$	(8 بالتعويض
(9 $\overline{AF} \cong \overline{ED} \cong \overline{CB}, \overline{FE} \cong \overline{DC} \cong \overline{BA}$	(9 تعريف التطابق
(10 $\triangle AFB \cong \triangle EDF \cong \triangle CBD$	(10 مسلّمة SAS
(11 $\overline{DF} \cong \overline{FB} \cong \overline{BD}$	(11 العناصر المتناظرة متطابقة.
(12 $\triangle FBD$ متطابق الأضلاع.	(12 تعريف المثلث المتطابق الأضلاع



الربط مع الحياة

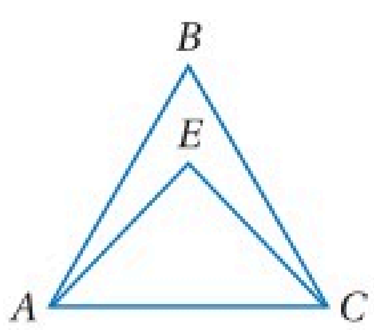
استعمل المهندس المعماري في هذا المبنى قضبانًا حديديَةً تم تثبيتها على شكل مثلثات لتزيد المبنى دعمًا وقوةً مراعيًا في ذلك الجوانب الجمالية للبناء أيضًا.

تحقق من فهمك

4) في الصورة أعلاه إذا علمت أن $\triangle ACE$ متطابق الأضلاع، فيه: $\overline{BC} \parallel \overline{FD}$، $\overline{EF} \parallel \overline{BD}$، و D نقطة منتصف $\overline{EC}$، فأثبت أن $\triangle FED \cong \triangle BDC$.

تأكد

المثال 1 باستعمال الشكل المجاور أجب عن السؤالين الآتيين:

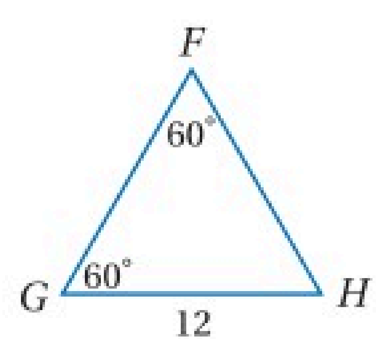


1) إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CB}$، فسمّ زاويتين متطابقتين.

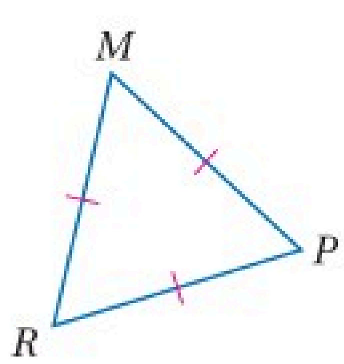
2) إذا كان $\angle EAC \cong \angle ECA$ ، فسمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

المثال 2 أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

3) FH

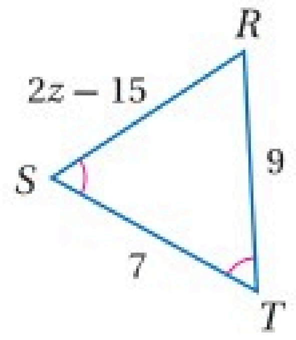


4) $m\angle MRP$

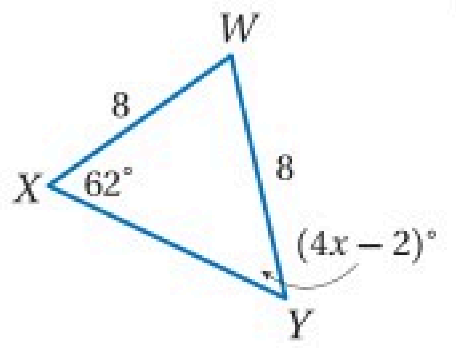


المثال 3 **جبر:** أوجد قيمة المتغير في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

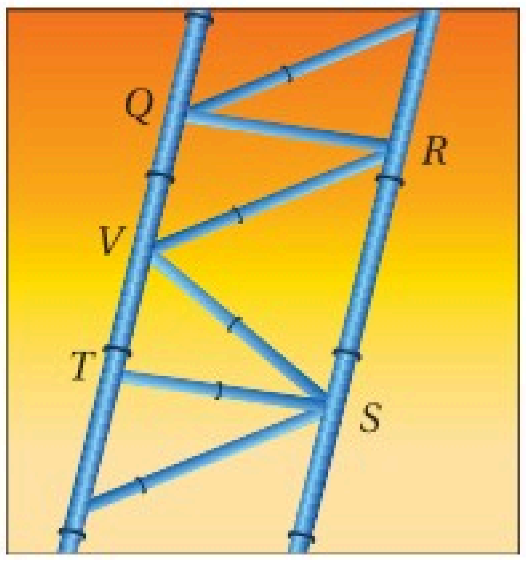
5)



6)



المثال 4 7) **القاطرة السريعة:** الشكل المجاور يظهر جزءًا من سكة القاطرة السريعة المبينة في فقرة "لماذا؟" مكوّنة من مثلثات.

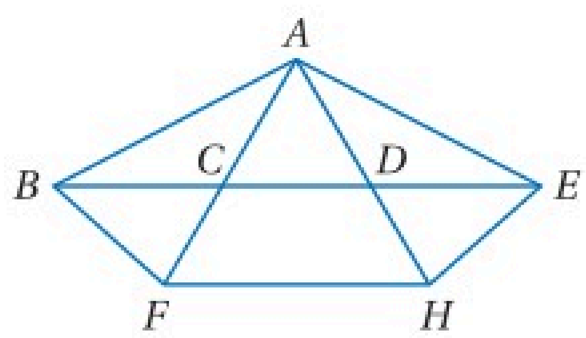


a) إذا كان $\overline{QR}$ ، $\overline{ST}$ عموديَّان على $\overline{QT}$، وَ $\triangle RVS$ متطابق الضلعين قاعدته $\overline{RS}$، $\overline{QT} \parallel \overline{SR}$، فأثبت أن $\triangle RQV \cong \triangle STV$.

b) إذا كان $QR = 2$ m ، $VR = 2.5$ m، فأوجد البعد بين المستقيمين $\overleftrightarrow{ST}$ وَ $\overleftrightarrow{QR}$. برِّر إجابتك.

تدرب وحل المسائل

المثال 1 باستعمال الشكل المجاور أجب عن الأسئلة 11–8 :



8) إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{AE}$ ، فسمّ زاويتين متطابقتين.

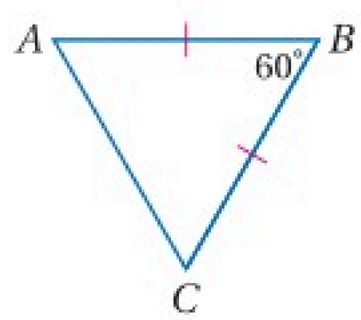
9) إذا كانت $\angle ABF \cong \angle AFB$ ، فسمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

10) إذا كانت $\overline{CA} \cong \overline{DA}$ ، فسمّ زاويتين متطابقتين.

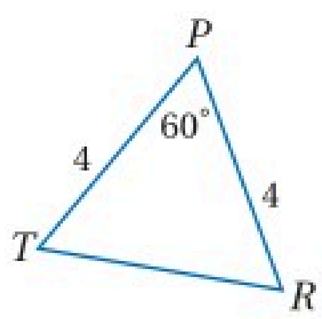
11) إذا كانت $\angle DAE \cong \angle DEA$، فسمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

المثال 2 أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

12) $m\angle BAC$

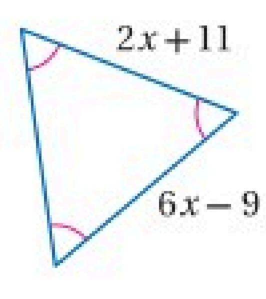


13) TR

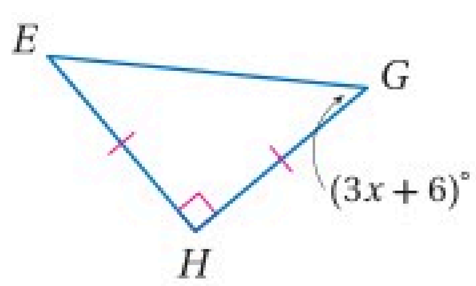


المثال 3 **جبر:** أوجد قيمة المتغير في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

14)



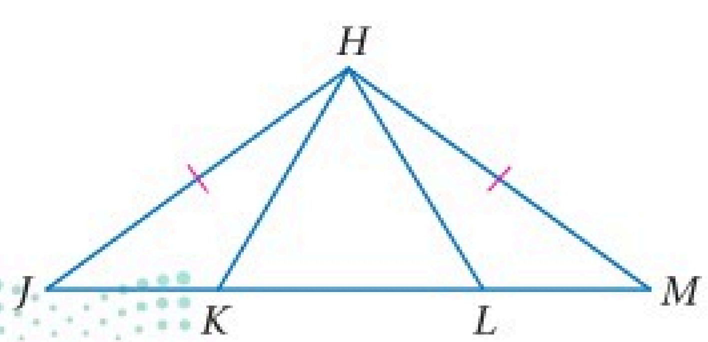
15)

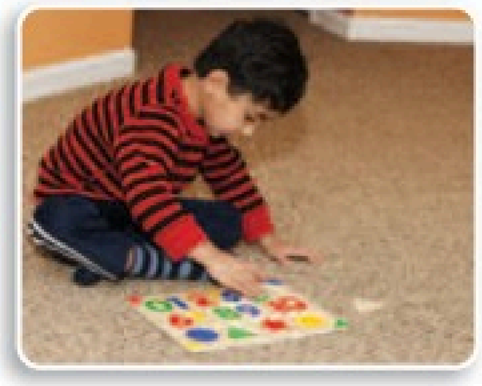


المثال 4 **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا.

16) **المعطيات:** $\triangle HJM$ متطابق الضلعين، $\triangle HKL$ متطابق الأضلاع.

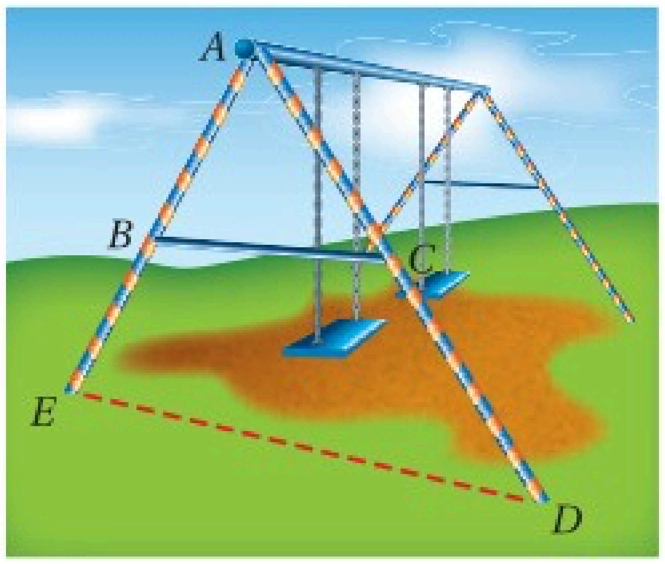
المطلوب إثبات أن: $\angle JHK \cong \angle MHL$





الربط مع الحياة

مهمة الوالدين اختيار الألعاب التي تناسب أعمار أطفالهم.



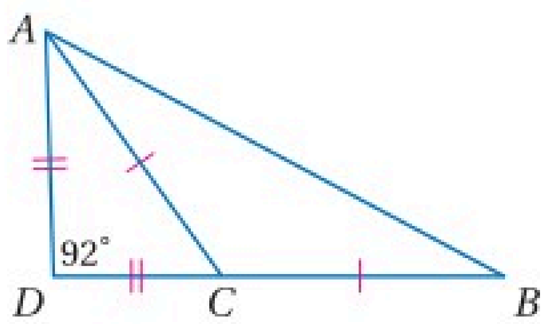
17) **حدائق:** اصطحب خالد أخاه الأصغر إلى حديقة الحي، فلاحظ أن دعائم الأرجوحة الموجودة في الحديقة تشكل مجموعتين من المثلثات، وأن $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ ولكن $\overline{BC} \ncong \overline{AB}$.

a) إذا قدّر خالد أن $m\angle BAC = 50°$، فما قيمة $m\angle ABC$ وفقًا لهذا التقدير؟ وضّح إجابتك.

b) إذا كان $\overline{BE} \cong \overline{CD}$، فبيِّن أن $\triangle AED$ متطابق الضلعين.

c) إذا كان $\overline{BC} \parallel \overline{ED}$, $\overline{ED} \cong \overline{AD}$، فبيّن أن $\triangle AED$ متطابق الأضلاع.

أوجد كلًّا من القياسات الآتية:



18) $m\angle CAD$

19) $m\angle ACD$

20) $m\angle ACB$

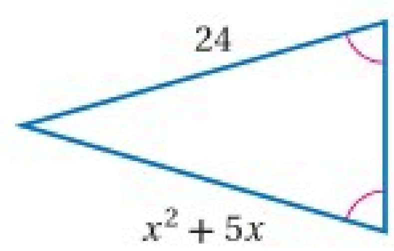
21) $m\angle ABC$

برهان: **اكتب برهانًا ذا عمودين لكل نتيجة أو نظرية مما يأتي:**

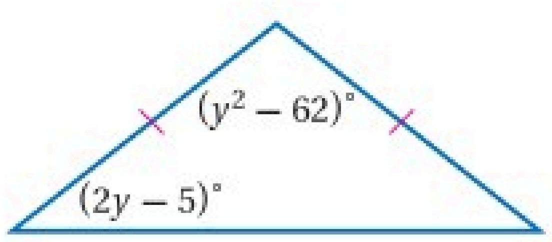
22) النتيجة 3.3 **23)** النتيجة 3.4 **24)** النظرية 3.11

أوجد قيمة المتغير في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

25)



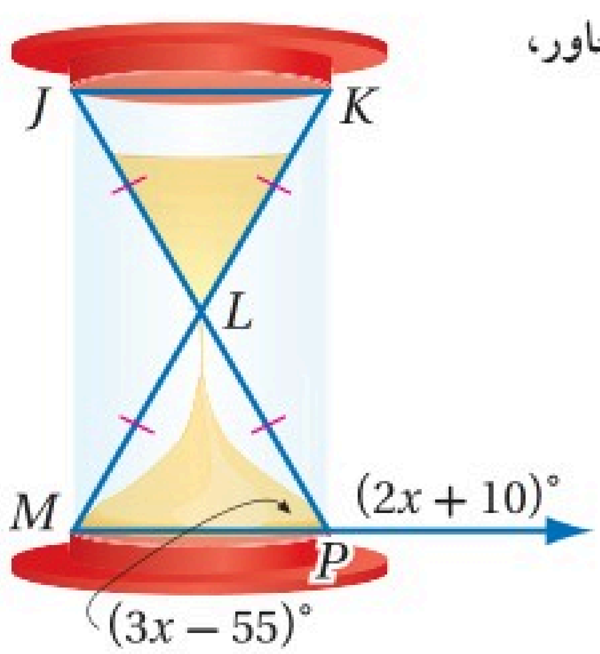
26)



الربط مع الحياة

دقة ساعة الرمل الزجاجية تعتمد على ثبات معدل تدفق الرمل الذي يعتمد على نسبة قطر الثقب إلى قطر حبات الرمل المستعملة.

الساعات الرملية: استعمل الساعة الرملية المبينة في الشكل المجاور، وأوجد كلًّا من القياسات الآتية:



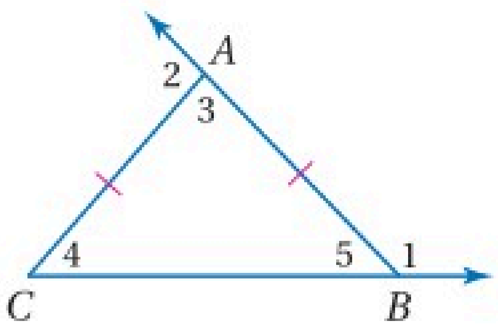
27) $m\angle LPM$

28) $m\angle LMP$

29) $m\angle JLK$

30) $m\angle JKL$

31) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، ستكتشف القياسات الممكنة للزوايا الداخلية للمثلث المتطابق الضلعين، إذا عُلم قياس زاوية خارجية له.



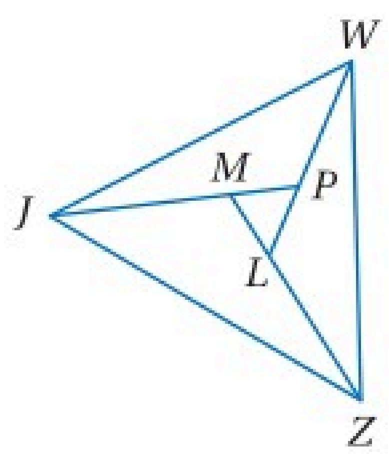
a) **هندسيًّا:** استعمل المسطرة والمنقلة لرسم ثلاثة مثلثات مختلفة، كلٌّ منها متطابق الضلعين. ومُدّ أحد ضلعَي زاوية الرأس ومدّت القاعدة من إحدى جهتيها كما في الشكل المجاور.

b) **جدوليًّا:** استعمل المنقلة لإيجاد $m\angle 1$ لكل مثلث وسجّله في جدول. واستعمل $m\angle 1$ لحساب قياسات $\angle 5$, $\angle 4$,$\angle 3$، ثم أوجد $m\angle 2$ وسجّله في جدول آخر واستعمله لحساب القياسات السابقة نفسها. رتّب نتائجك في جدولين.

c) **لفظيًّا:** وضّح كيف استعملت $m\angle 1$ لإيجاد قياسات $\angle 3, \angle 4, \angle 5$. ثم وضّح كيف استعملت $m\angle 2$ لإيجاد هذه القياسات نفسها.

d) **جبريًّا:** إذا كان $m\angle 1 = x$، فاكتب عبارة جبرية لإيجاد قياس كلٍّ من $\angle 3, \angle 4, \angle 5$، وبالمثل إذا كان $m\angle 2 = x$ ، فاكتب عبارة جبرية لإيجاد قياس كلٍّ من الزوايا نفسها.

مسائل مهارات التفكير العليا



32) **تحدٍّ:** في الشكل المجاور إذا كان $\triangle WJZ$ متطابق الأضلاع، $\angle ZWP \cong \angle WJM \cong \angle JZL$ ، فأثبت أن $\overline{WP} \cong \overline{ZL} \cong \overline{JM}$.

تبرير: حدّد ما إذا كانت كلٌّ من العبارتين الآتيتين صحيحة أحيانًا أو دائمًا أو غير صحيحة أبدًا. ووضّح إجابتك:

33) إذا كان قياس زاوية رأس المثلث المتطابق الضلعين عددًا صحيحًا، فإن قياس كلٍّ من زاويتَي القاعدة عدد صحيح.

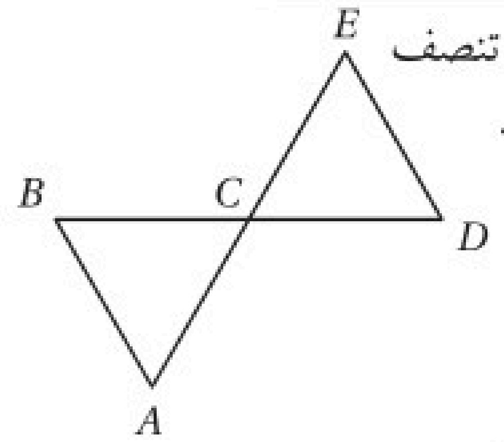
34) إذا كان قياس كلٍّ من زاويتَي القاعدة عددًا صحيحًا، فإن قياس زاوية الرأس عدد فردي.

35) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثًا متطابق الضلعين، فيه زاويتا القاعدة منفرجتان إن أمكنك ذلك، وإلا فوضّح السبب.

36) **اكتب:** وضّح كيف تستعمل قياس زاوية قاعدة المثلث المتطابق الضلعين لإيجاد قياس زاوية الرأس.

تدريب على اختبار

37) في الشكل المجاور، $\overline{AE}$, $\overline{BD}$ تنصف كلٌّ منهما الأخرى في النقطة C.



أي المعلومات الإضافية الآتية تعد كافية لإثبات أن $\overline{DE} \cong \overline{DC}$؟

A $\angle A \cong \angle BCA$

B $\angle B \cong \angle D$

C $\angle ACB \cong \angle EDC$

D $\angle A \cong \angle B$

38) إذا كان $x = -3$ ، فإنّ قيمة $4x^2 - 7x + 5$ تساوي:

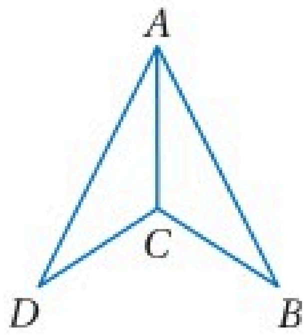
A 2

B 20

C 42

D 62

مراجعة تراكمية



39) إذا كان: $AB = 27\text{ in}$ ، $AD = 27\text{ in}$ ، $DC = 7\text{ in}$ ، $CB = 7\text{ in}$ ،
فحدِّد ما إذا كان $\triangle ADC \cong \triangle ABC$. (الدرس 4-3)

اذكر الخاصية التي تبرر كلًّا من العبارات الآتية: (مهارة سابقة)

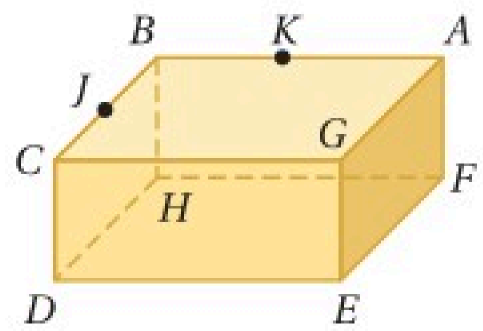
40) إذا كان $x(y + z) = a$ ، فإنّ $xy + xz = a$.

41) إذا كان $n - 17 = 39$ ، فإنّ $n = 56$.

42) إذا كان $m\angle P + m\angle Q = 110°$ وكانت $m\angle R = 110°$ ، فإنّ $m\angle P + m\angle Q = m\angle R$.

43) إذا كان $MD = 15$, $CV = MD$ فإنّ $CV = 15$.

انظر إلى الشكل المجاور. (مهارة سابقة)



44) ما عدد المستويات الظاهرة في هذا الشكل؟

45) سمِّ ثلاث نقاطٍ تقع على استقامةٍ واحدةٍ.

استعد للدرس اللاحق

أوجد إحداثيات نقطة المنتصف للقطعة التي إحداثيات طرفَيها كما يأتي:

46) $A(2, 15)$, $B(7, 9)$

47) $C(-4 , 6)$, $D(2, -12)$

48) $E(3 , 2.5)$, $F(7.5 , 4)$

3-7 المثلثات والبرهان الإحداثي
Triangles and Coordinate Proof

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درست استعمال الهندسة الإحداثية لبرهان تطابق المثلثات.

(مهارة سابقة)

والآن:

- أرسم مثلثات، وأحدد مواقعها لاستعمالها في البرهان الإحداثي.
- أكتب برهانًا إحداثيًا.

المفردات:

البرهان الإحداثي
coordinate proof

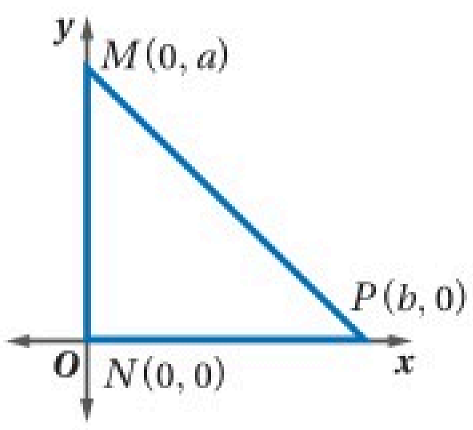
لماذا؟

نظام تحديد الموقع العالمي (GPS) يستقبل البث من الأقمار الاصطناعية، والتي يمكن بواسطتها تحديد موقع السيارة. ويمكن الاستفادة من هذه المعلومات بالإضافة إلى برمجيات أخرى لتوجيه حركة السيارة.

موقع المثلث وتسميته: كما هو الحال في نظام تحديد الموقع العالمي، فإن معرفة إحداثيات رؤوس شكل ما في مستوى إحداثيٍّ، يمكِّنك من اكتشاف خصائصه والتوصل إلى استنتاجات خاصة به. ويستعمل **البرهان الإحداثي** الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر لإثبات صحة المفاهيم الهندسية. فالخطوة الأولى في البرهان الإحداثي هي تمثيل الشكل في المستوى الإحداثي.

مثال 1 تحديد موقع المثلث وتسميته

ارسم المثلث القائم MNP في المستوى الإحداثي، وسمّ رؤوسه على أن يكون طول $\overline{MN}$ يساوي a وحدة، وطول $\overline{NP}$ يساوي b وحدة.



- يُحدّد طول الضلع الذي يقع على أحد المحورين بسهولة؛ لذا من الأفضل وضع ضلعَي القائمة على المحورين x, y.
- اجعل زاوية المثلث القائمة $\angle N$ على نقطة الأصل، فيكون ضلعا القائمة على المحورين هما x, y.
- ارسم المثلث في الربع الأول.
- ارسم M على المحور y، وبما أن طول $\overline{MN}$ يساوي a وحدة، فإن إحداثيها x يساوي صفرًا، وإحداثيها y يساوي a.
- ارسم P على المحور x، وبما أن طول $\overline{NP}$ يساوي b وحدة، فإن إحداثيها y يساوي صفرًا، وإحداثيها x يساوي b.

إرشادات للدراسة

الارتفاع على القاعدة في المثلث المتطابق الضلعين ينصف القاعدة.

تحقق من فهمك

1) ارسم المثلث JKL المتطابق الضلعين في المستوى الإحداثي وسمِّ رؤوسه، على أن يكون طول قاعدته $\overline{JL}$ يساوي a وحدة، ويكون ارتفاعه b وحدة، والرأس K يقع على المحور y.

مفهوم أساسي رسم المثلثات في المستوى الإحداثي

أضف إلى مطويتك

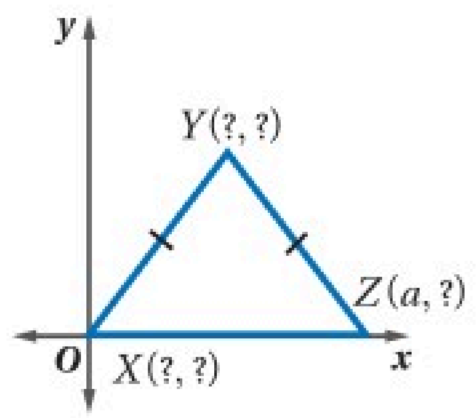
الخطوة 1: اجعل نقطة الأصل رأسًا للمثلث.

الخطوة 2: ارسم ضلعًا واحدًا على الأقل من أضلاع المثلث على أحد المحورين.

الخطوة 3: ارسم المثلث في الربع الأول إن أمكن.

الخطوة 4: استعمل الإحداثيات التي تجعل الحسابات أبسط ما يمكن.

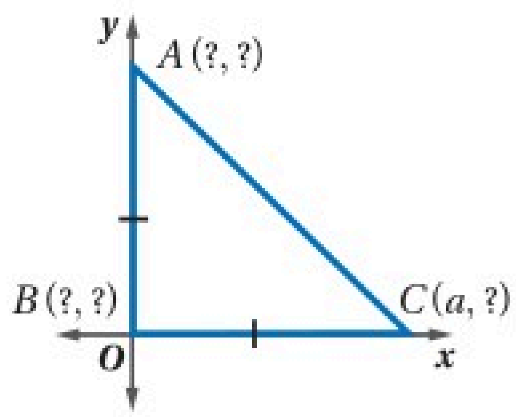
مثال 2 إيجاد الإحداثيات المجهولة



أوجد الإحداثيات المجهولة في المثلث XYZ المتطابق الضلعين.

بما أن الرأس X يقع عند نقطة الأصل، فإن إحداثياته هي $(0, 0)$، ولأن الرأس Z يقع على المحور x، فإن الإحداثي y له يساوي صفرًا، فتكون إحداثيات الرأس Z هي $(a, 0)$، وبما أن $\triangle XYZ$ متطابق الضلعين، فإن الإحداثي x للنقطة Y يقع في منتصف المسافة بين a , 0 ويكون $\frac{a}{2}$، أما الإحداثي y للنقطة Y فلا يمكننا إيجاده بدلالة a، وإذا افترضناه b، فتكون إحداثيات النقطة Y هي $\left(\frac{a}{2}, b\right)$.

تحقق من فهمك



2) أوجد الإحداثيات المجهولة في المثلث $\triangle ABC$ المتطابق الضلعين والقائم الزاوية.

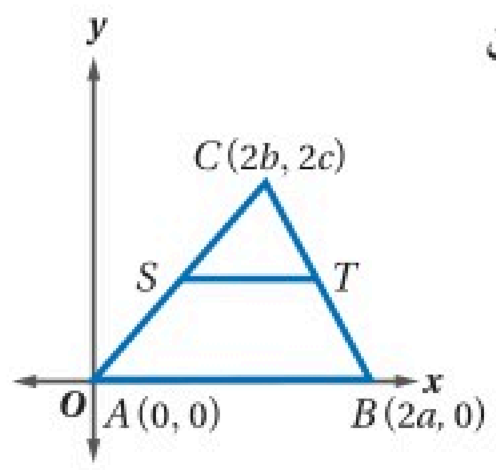
إرشادات للدراسة

الزاوية القائمة

تقاطع المحور x مع المحور y يشكّل زاوية قائمة؛ ولذا يُعد هذا التقاطع المكان المناسب لموقع الزاوية القائمة.

كتابة البرهان الإحداثي بعد رسم المثلث في المستوى الإحداثي، وتحديد إحداثيات رؤوسه، يمكنك استعمال البرهان الإحداثي؛ للتحقق من بعض الخصائص وبرهنة بعض النظريات.

مثال 3 كتابة البرهان الإحداثي



اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن القطعة المستقيمة التي تصل بين منتصفَي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث.

اجعل أحد رؤوس المثلث عند نقطة الأصل وسمِّه A، واستعمل إحداثيات من مضاعفات 2؛ لأن قانون نقطة المنتصف يتضمن قسمة مجموع الإحداثيين على 2

المعطيات: $\triangle ABC$، فيه:

S نقطة منتصف $\overline{AC}$،

T نقطة منتصف $\overline{BC}$.

المطلوب: إثبات أن $\overline{ST} \parallel \overline{AB}$.

البرهان:

باستعمال قانون نقطة المنتصف، فإن إحداثيات S هي: $\left(\frac{2b+0}{2}, \frac{2c+0}{2}\right) = (b, c)$

وكذلك إحداثيات T هي: $\left(\frac{2a+2b}{2}, \frac{0+2c}{2}\right) = (a+b, c)$

وبتطبيق قانون الميل، فإن ميل $\overline{ST}$ هو: $\frac{c-c}{a+b-b} = 0$

وميل $\overline{AB}$ هو: $\frac{0-0}{2a-0} = 0$

وبما أن ميل $\overline{ST}$ يساوي ميل $\overline{AB}$، فإن $\overline{AB} \parallel \overline{ST}$.

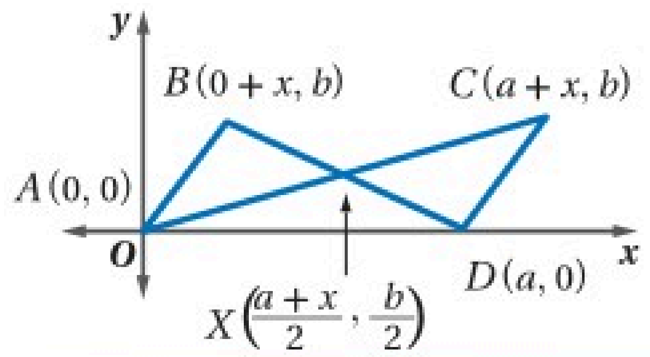
إرشادات للدراسة

البرهان الإحداثي

تنطبق الإرشادات والطرائق المستعملة في هذا الدرس على كل المضلعات، ولا تقتصر على المثلثات.

تحقق من فهمك

3) اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن:
$\triangle ABX \cong \triangle CDX$.



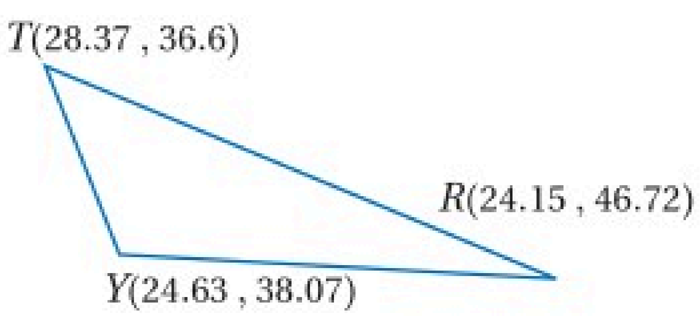
يمكن استعمال طرائق البرهان الإحداثي لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال 4 من واقع الحياة تصنيف المثلثات

جغرافيا: إذا علمت أن الإحداثيات التقريبية لكلٍّ من الرياض وينبع وتبوك هي: الرياض 24.15°N 46.72°E، ينبع 24.63°N 38.07°E، تبوك 28.37°N 36.6°E .

فاكتب برهانًا إحداثيًّا يبيِّن أن المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث مختلف الأضلاع.

إرشاد: يمكن التعبير عن إحداثي الرياض 24.15°N 46.72°E بالزوج المرتب (24.15, 46.72) وكذلك بقية المدن.



الخطوة الأولى هي رسم شكل تقريبي لهذا المثلث، وتعيين المواقع الثلاثة وإحداثياتها على الرسم، ولتكن R تمثّل الرياض، و Y تمثّل ينبع ، و T تمثّل تبوك.

إذا لم يتطابق أي ضلعين في $\triangle RYT$ ، فسيكون مختلف الأضلاع. استعمل قانون المسافة بين نقطتين والآلة الحاسبة لإيجاد أطوال أضلاع المثلث.

$$RY = \sqrt{(24.15 - 24.63)^2 + (46.72 - 38.07)^2} \approx 8.66$$

$$RT = \sqrt{(28.37 - 24.15)^2 + (36.6 - 46.72)^2} \approx 10.96$$

$$YT = \sqrt{(24.63 - 28.37)^2 + (38.07 - 36.6)^2} \approx 4.02$$

وبما أن أطوال أضلاع المثلث مختلفة، إذن فهو مثلث مختلف الأضلاع؛ أيْ أن المثلث الذي رؤوسه هي الرياض وينبع وتبوك مختلف الأضلاع.

تحقق من فهمك

4) **جغرافيا:** يضم مجمَّع كشفيّ ثلاث فرق من ثلاث مدن تمثل مثلثًا. إذا كانت الإحداثيات التقريبية لمواقع هذه المدن الثلاث هي: تبوك 28.37°N36.6°E ، عرعر 30.9°N41.13°E ، حائل 27.43°N41.68°E، فاكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث متطابق الضلعين تقريبًا.

الربط مع الحياة

يقع مثلث برمودا المبين في الخريطة في المحيط الأطلسي، وهو على شكل مثلث مختلف الأضلاع. وتقدر مساحته الحقيقية بـ 482344 ميلًا مربعًا.

تاريخ الرياضيات

محمد بن أحمد أبو الريحان البيروني الخوارزمي، 362هـ - 973هـ، برز في كثيرٍ من فروع المعرفة الإنسانية (الأدب، الجغرافيا، الفلك، الرياضيات)، فقد حدد بدقةٍ خطوط الطول وخطوط العرض، ووضع قاعدة حسابية لتسطيح الكرة؛ أي نقل الخطوط والخرائط من الكرة إلى سطح مسطحٍ والعكس..

تأكـد

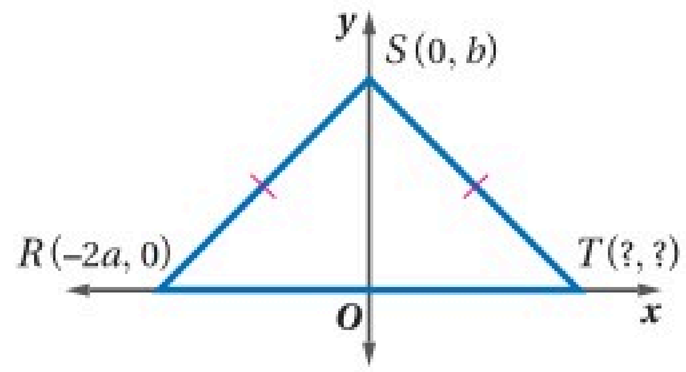
المثال 1 ارسم كلًّا من المثلثين الآتيين في المستوى الإحداثي، وحدّد إحداثيات رؤوسه.

1) $\triangle ABC$ قائم الزاوية، فيه $\overline{AC}, \overline{AB}$ ضلعا القائمة، وطول $\overline{AC}$ يساوي $2a$ وحدة، وطول $\overline{AB}$ يساوي $2b$ وحدة.

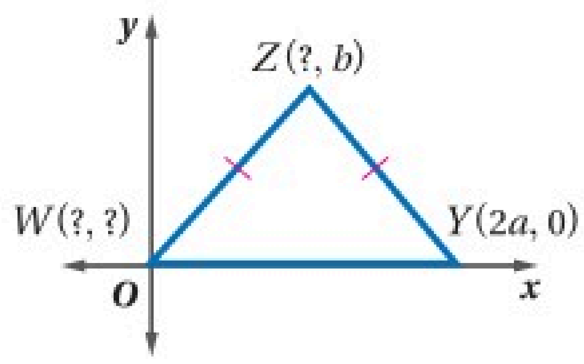
2) $\triangle FGH$ المتطابق الضلعين الذي طول قاعدته $\overline{FG}$ يساوي $2a$ وحدة.

المثال 2 أوجد الإحداثيات المجهولة في كلٍّ من المثلثين الآتيين:

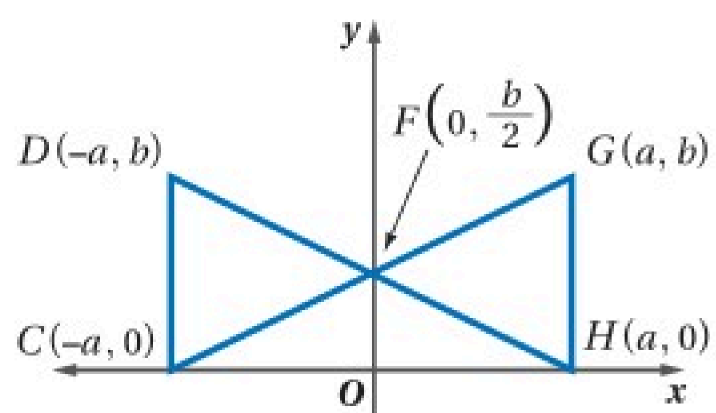
3)



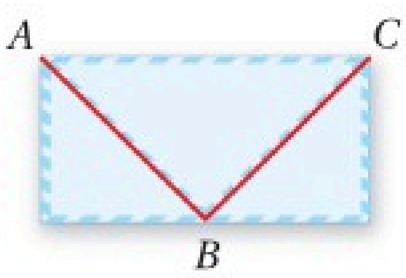
4)



المثال 3 5) اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن $\triangle FGH \cong \triangle FDC$.



المثال 4 6) اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن المثلث ABC متطابق الضلعين، علمًا بأن بُعدَي المظروف هما: 10 cm, 20 cm، والنقطة B في منتصف الحافة السفلى للمظروف.



تدرب وحل المسائل

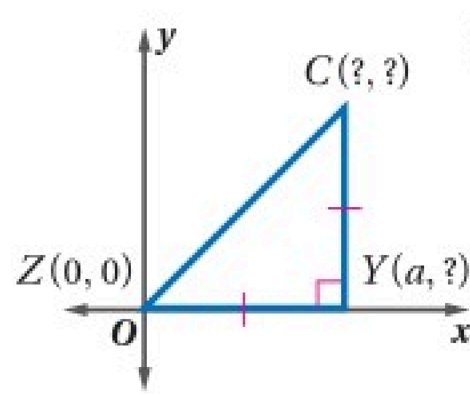
المثال 1 ارسم كل مثلثٍ من المثلثات الآتية في المستوى الإحداثي، وحدِّد إحداثيات رؤوسه:

7) $\triangle ABC$ المتطابق الضلعين الذي طول قاعدته $\overline{AB}$ يساوي a وحدة.

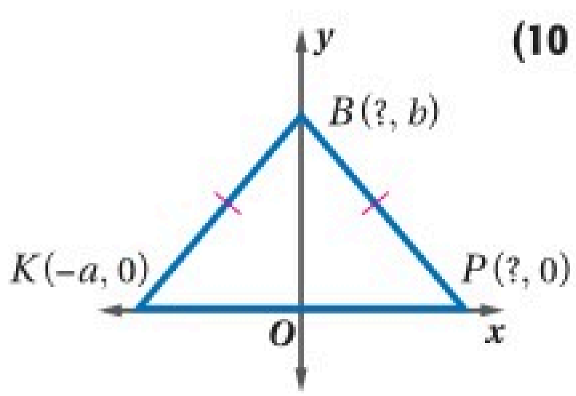
8) $\triangle XYZ$ القائم الزاوية الذي وتره $\overline{YZ}$، وطول الضلع $\overline{XY}$ يساوي b وحدة، وطول $\overline{XZ}$ ثلاثة أمثال طول $\overline{XY}$.

المثال 2 أوجد الإحداثيات المجهولة في كل مثلث مما يأتي:

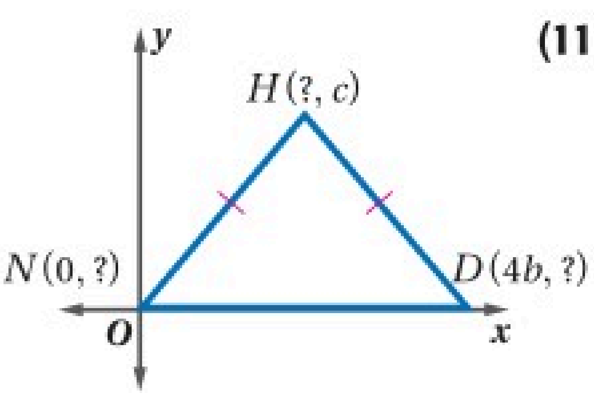
9)



10)



11)



المثالان 4 ,3 **برهان:** **اكتب برهانًا إحداثيًّا لكل عبارة من العبارات الآتية:**

12) القطع المستقيمة الثلاث الواصلة بين نقاط منتصفات أضلاع مثلث متطابق الضلعين تشكّل مثلثًا متطابق الضلعين أيضًا.

13) طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفَي ضلعين في المثلث يساوي نصف طول الضلع الثالث.

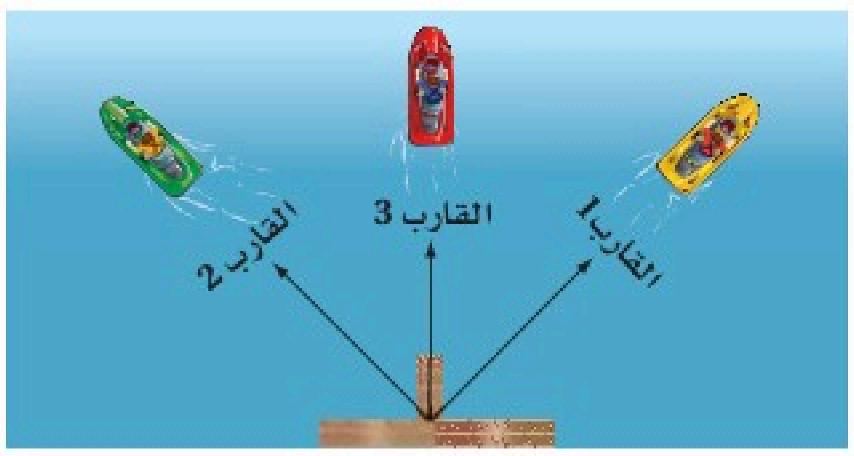
14) **جغرافيا:** إذا علمت أن الإحداثيات التقريبية لمواقع مدن جازان ونجران وخميس مشيط هي: جازان 16.9°N 42.58°E ، نجران 17.5°N 44.16°E ، خميس مشيط 18.3°N 42.8°E، فبيّن أن المثلث الذي رؤوسه هي هذه المدن الثلاث مختلف الأضلاع.

في $\triangle XYZ$ ، أوجد ميل كل ضلع من أضلاعه، ثم حدد ما إذا كان المثلث قائم الزاوية أم لا. ووضّح إجابتك.

15) $X(0, 0), Y(2h, 2h), Z(4h, 0)$ **16)** $X(0, 0), Y(1, h), Z(2h, 0)$

17) **نزهة:** أقامت عائلتان خيمتين في متنزَّه كبير. إذا اعتبرنا أن موقع إدارة المتنزَّه تقع عند النقطة (0 ,0)، وأن إحداثيات موقعَي الخيمتين هما (9 ,12) , (25 ,0). فاكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن الشكل المتكون من مواقع إدارة المتنزَّه والخيمتين هو مثلث قائم الزاوية.

18) **رياضة مائية:** انطلقت ثلاثة قوارب مائية من الرصيف نفسه، فاتجه الأول نحو الشمال الشرقي، واتجه الثاني نحو الشمال الغربي، أما الثالث فاتجه نحو الشمال.



توقف القاربان (الأول والثاني) على بُعد 300 m تقريبًا من الرصيف، بينما توقف الثالث على بُعد 212 m من الرصيف.

a) إذا اعتبرنا أن الرصيف يمثل النقطة (0 ,0)، فمثّل هذا الوضع بيانيًّا، وأوجد معادلة خط سير القارب الأول، ومعادلة خط سير القارب الثاني. وفسّر إجابتك.

b) اكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن الرصيف والقاربين (الأول والثاني) تُشكّل مثلثًا قائم الزاوية متطابق الضلعين.

c) أوجد إحداثيات مواقع هذه القوارب الثلاثة، وفسّر إجابتك.

d) اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن القوارب الثلاثة تقع على خط مستقيم واحد تقريبًا، وأن القارب الثالث يقع في منتصف المسافة بين القاربين الأول والثاني.

الربط مع الحياة

تستثمر المنطقة الشرقية وجدة إطلالتيهما على الخليج العربي والبحر الأحمر في توجيه برامج رياضية بحرية متنوعة للسياح الذين يتوافدون على الواجهات البحرية من مختلف مناطق المملكة.

مسائل مهارات التفكير العليا

تحدٍّ: **إذا كانت إحداثيات النقطة J هي (0 ,0)، والنقطة K هي $(2a, 2b)$، فأوجد إحداثيات النقطة L، على أن يكون $\triangle JKL$ من النوع المحدّد في كلٍّ من الأسئلة الثلاثة الآتية:**

19) مثلث مختلف الأضلاع **20)** مثلث قائم الزاوية **21)** مثلث متطابق الضلعين

22) **مسألة مفتوحة:** في المستوى الإحداثي، ارسم مثلثًا قائم الزاوية متطابق الضلعين، على أن تكون نقطة الأصل هي نقطة منتصف وتره، وحدِّد إحداثيات كل رأسٍ من رؤوسه.

23) **تبرير:** إحداثيات رأسين في مثلثٍ هما: $(0, 0)$, $(a, 0)$. إذا أعطي إحداثي الرأس الثالث بدلالة a ، وكان المثلث متطابق الضلعين، فحدّد إحداثيات الرأس الثالث، ثم ارسم المثلث في المستوى الإحداثي.

24) **اكتب:** وضّح فائدة اتباع كلٍّ من الإرشادات الآتية؛ لرسم المثلث في المستوى الإحداثي عند كتابة البرهان الإحداثي:

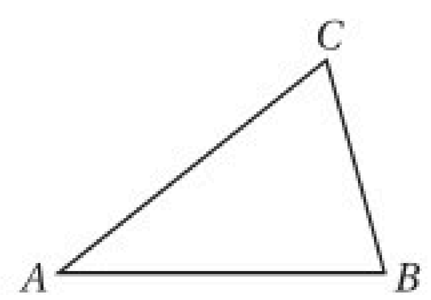
a) اجعل نقطة الأصل أحد رؤوس المثلث.

b) ارسم ضلعًا واحدًا على الأقل من أضلاع المثلث على المحور x أو المحور y.

c) حاول أن يقع المثلث في الربع الأول ما أمكن ذلك.

تدريب على اختبار

25) في الشكل أدناه إذا كان $m\angle B = 76°$، وقياس $\angle A$ يساوي نصف قياس $\angle B$، فما $m\angle C$؟



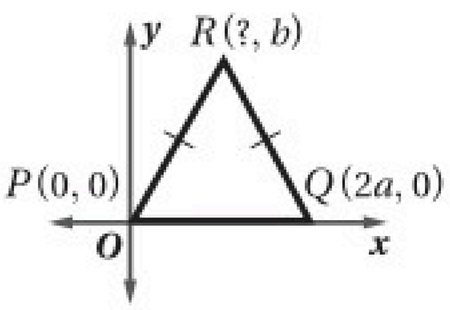
A) $33°$

B) $38°$

C) $46°$

D) $66°$

26) ما إحداثيات النقطة R في المثلث المجاور؟



A) $\left(\frac{a}{2}, b\right)$

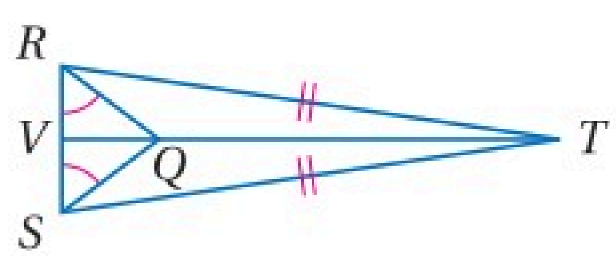
B) (a, b)

C) $(4a, b)$

D) $\left(\frac{a}{4}, b\right)$

مراجعة تراكمية

باستعمال الشكل المجاور، أجب عن الأسئلة 29–27. (الدرس 6-3)



27) سمِّ زاويتين متطابقتين غير المشار إليهما في الشكل.

28) سمِّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين غير المشار إليهما في الشكل.

29) سمِّ مثلثين متطابقين.

30) ما ميل المستقيم المار بالنقطتين $(6 , 2)$, $(-6 , -2)$. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط الآتية، وقرّب الناتج إلى أقرب عُشرٍ:

31) $X(5, 4)$, $Y(2, 1)$

32) $A(1, 5)$, $B(-2, -3)$

33) $J(-2, 6)$, $K(1, 4)$

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

تصنيف المثلثات (الدرس 1-3)

- يمكن تصنيف المثلث بحسب نوع زواياه، فيكون حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية. وكذلك يمكن تصنيفه بحسب أضلاعه، فيكون مختلف الأضلاع أو متطابق الضلعين أو متطابق الأضلاع.

زوايا المثلث (الدرس 2-3)

- قياس الزاوية الخارجية للمثلث يساوي مجموع قياسَي الزاويتين الداخليتين البعيدتين.

المثلثات المتطابقة (الدرس 3-3 إلى 5-3)

- SSS: يتطابق مثلثان إذا كانت أضلاعُهما المتناظرة متطابقة.
- SAS: يتطابق مثلثان إذا طابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.
- ASA: يتطابق مثلثان إذا طابقت زاويتان والضلع المحصور بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.
- AAS: يتطابق مثلثان إذا طابقت زاويتان وضلع غير محصور بينهما في المثلث الأول نظائرها في المثلث الآخر.

المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع (الدرس 6-3)

- زاويتا القاعدة في المثلث المتطابق الضلعين متطابقتان، ويكون المثلث متطابق الأضلاع إذا تطابقت جميع زواياه.

المثلثات والبرهان الإحداثي (الدرس 7-3)

- يستعمل البرهان الإحداثي الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر؛ لإثبات صحة المفاهيم الهندسية.

المطويات منظم أفكار

تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدوَّنة في مطويتك.

المفردات الأساسية:

- المثلث الحاد الزوايا (ص. 12)
- المثلث المنفرج الزاوية (ص. 12)
- المثلث القائم الزاوية (ص. 12)
- المثلث المتطابق الأضلاع (ص. 13)
- المثلث المتطابق الضلعين (ص. 13)
- المثلث المختلف الأضلاع (ص. 13)
- المستقيم المساعِد (ص. 20)
- الزاوية الخارجية (ص. 22)
- الزاويتان الداخليتان البعيدتان (ص. 22)
- البرهان التسلسليّ (ص. 22)
- النتيجة (ص. 23)
- التطابق (ص. 28)
- المضلعات المتطابقة (ص. 28)
- العناصر المتناظرة (ص. 28)
- الزاوية المحصورة (ص. 38)
- الضلع المحصور (ص. 45)
- ساقا المثلث المتطابق الضلعين (ص. 54)
- زاوية الرأس (ص. 54)
- زاويتا القاعدة (ص. 54)
- البرهان الإحداثي (ص. 62)

اختبر مفرداتك

حدّد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فاستبدل ما تحته خط لتصبح صحيحة:

1) المثلث المتطابق الزوايا هو مثال على المثلث الحاد الزوايا.

2) المثلث الذي يحوي زاوية أكبر من $90°$ هو مثلث قائم الزاوية.

3) المثلث المتطابق الأضلاع يكون متطابق الزوايا دائمًا.

4) المثلث المختلف الأضلاع فيه ضلعان متطابقان على الأقل.

5) الضلع المحصور هو الضلع الذي يقع بين زاويتين متتاليتين في مضلع.

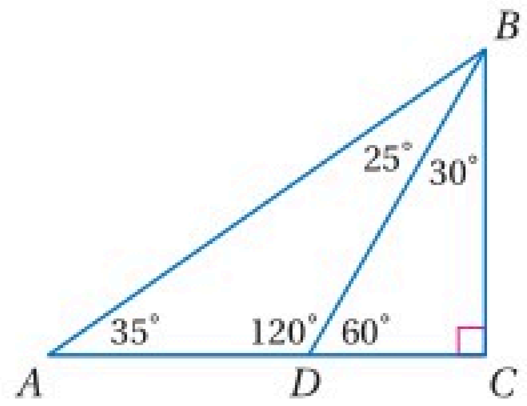
6) البرهان التسلسلي يستعمل الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر لبرهنة المفاهيم الهندسية.

7) قياس الزاوية الخارجية لمثلث يساوي مجموع قياسَي الزاويتين الداخليتين البعيدتين.

مراجعة الدروس

3-1 تصنيف المثلثات (ص: 12-18)

صنِّف كلًّا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:



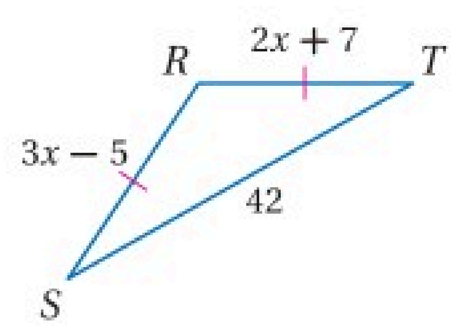
8) $\triangle ADB$

9) $\triangle BCD$

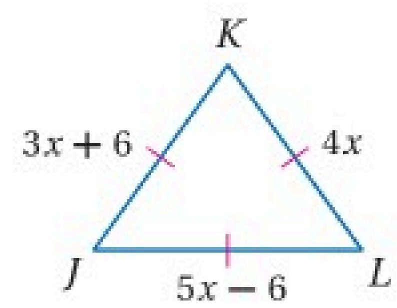
10) $\triangle ABC$

جبر: أوجد قيمة x وأطوال الأضلاع المجهولة في المثلثات الآتية:

11)



12)

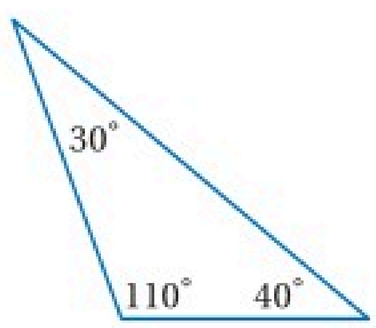


13) **خرائط:** المسافة من الرياض إلى المدينة المنورة ومنها إلى مكة المكرمة ثم إلى الرياض تساوي 2092 km، والمسافة بين الرياض ومكة المكرمة تزيد 515 km على المسافة بين المدينة المنورة ومكة المكرمة. والمسافة بين المدينة المنورة ومكة المكرمة تقل 491 km عن المسافة بين الرياض والمدينة المنورة. أوجد المسافة بين كل مدينتين من هذه المدن، وصنّف المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث.

مثال 1

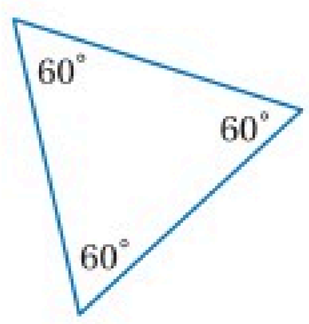
صنّف كلًّا من المثلثين الآتيين إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية.

a)



بما أن للمثلث زاوية منفرجة، فيكون مثلثًا منفرج الزاوية.

b)

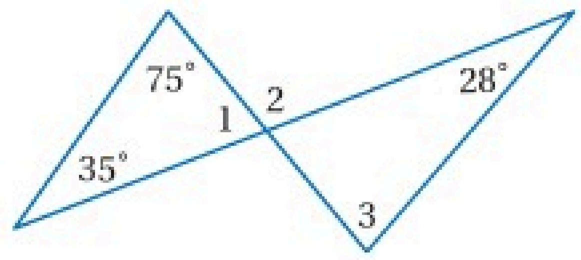


للمثلث ثلاث زوايا حادة جميعها متساوية؛ لذا فهو مثلث متطابق الزوايا.

دليل الدراسة والمراجعة

3-2 زوايا المثلثات (ص: 20-27)

أوجد قياس كلٍّ من الزوايا المرقّمة الآتية:



14) $\angle 1$

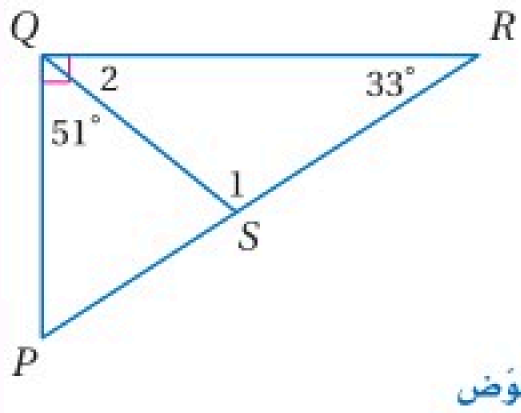
15) $\angle 2$

16) $\angle 3$

17) **منازل:** حديقة منزلية على صورة مثلث متطابق الضلعين كما في الشكل أدناه. أوجد قيمة x .

مثال 2

أوجد قياس كلٍّ من الزوايا المرقّمة في الشكل المجاور:



$m\angle 2 + m\angle PQS = 90°$

$m\angle 2 + 51° = 90°$ عوِّض

$m\angle 2 = 39°$ اطرح 51 من الطرفين

$m\angle 1 + m\angle 2 + 33° = 180°$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$m\angle 1 + 39° + 33° = 180°$ عوِّض

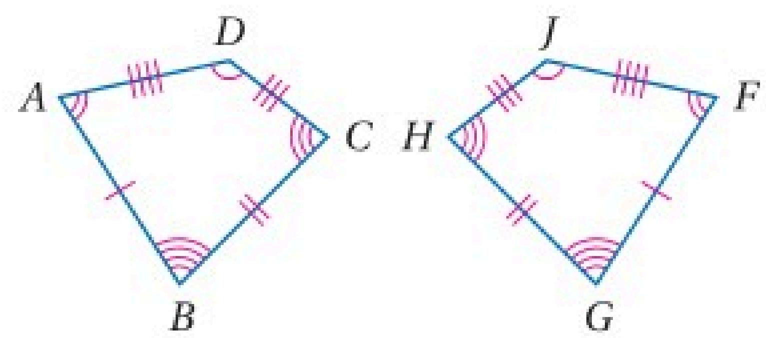
$m\angle 1 + 72° = 180°$ بسِّط

$m\angle 1 = 108°$ اطرح 72 من الطرفين

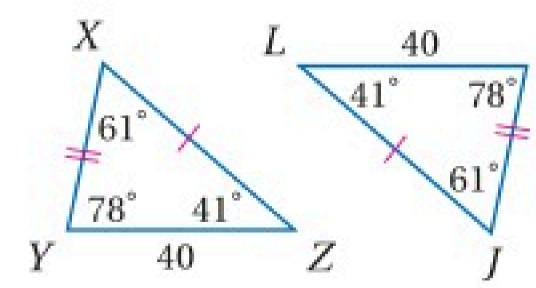
3-3 المثلثات المتطابقة (ص: 28-35)

بيّن أن كل مضلعين مما يأتي متطابقان، وذلك بتحديد العناصر المتناظرة المتطابقة جميعها، ثم اكتب عبارة التطابق:

18)



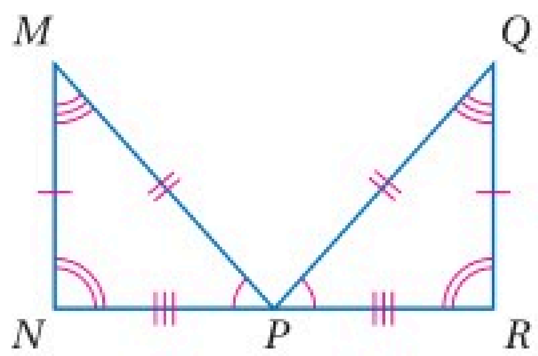
19)



20) **فسيفساء:** يُظهر الشكل المجاور جزءًا من تبليط فسيفسائي. سمِّ 4 مثلثات تبدو متطابقة في الشكل.

مثال 3

بيّن أن المثلثين الآتيين متطابقان، وذلك بتحديد العناصر المتناظرة المتطابقة جميعها، ثم اكتب عبارة التطابق:



الزوايا: $\angle N \cong \angle R, \angle M \cong \angle Q, \angle MPN \cong \angle QPR$

الأضلاع: $\overline{MN} \cong \overline{QR}, \overline{MP} \cong \overline{QP}, \overline{NP} \cong \overline{RP}$

جميع العناصر المتناظرة في المثلثين متطابقة؛ لذا فإن

$\triangle MNP \cong \triangle QRP$

3-4 إثبات تطابق المثلثات SSS, SAS (ص: 36-43)

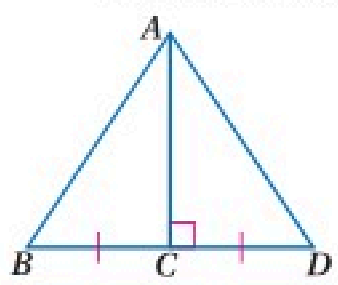
حدّد ما إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$، ووضح إجابتك.

21) $A(5, 2), B(1, 5), C(0, 0), X(-3, 3), Y(-7, 6), Z(-8, 1)$

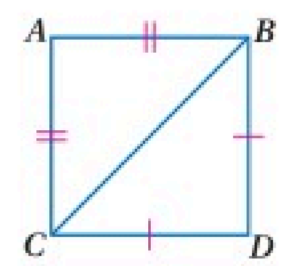
22) $A(3, -1), B(3, 7), C(7, 7), X(-7, 0), Y(-7, 4), Z(1, 4)$

حدّد المسلّمة التي يمكن استعمالها لإثبات أن كل مثلثين فيما يأتي متطابقان، وإذا كان إثبات تطابقهما غير ممكن فاكتب "غير ممكن".

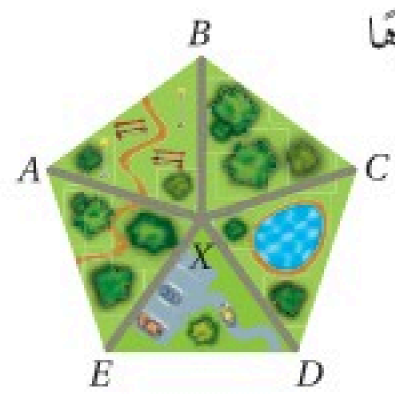
23) $\triangle ABC, \triangle ADC$



24) $\triangle ABC, \triangle DBC$

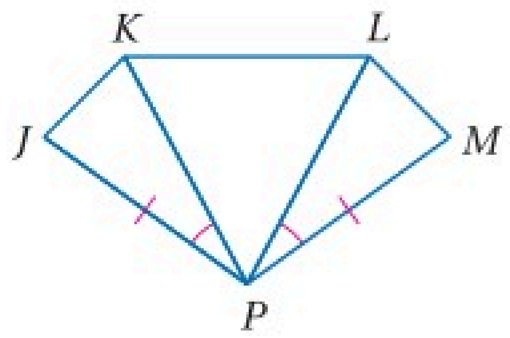


25) متنزهات: يظهر الرسم المجاور متنزّهًا على صورة خماسي فيه خمسة ممرات مُشاة لها الطول نفسه، تؤدي إلى نقطة المركز. إذا كانت جميع الزوايا المركزية متساوية القياس، فأي مسلمة (نظرية) تستعمل لإثبات أن $\triangle ABX \cong \triangle DCX$؟



مثال 4

اكتب برهانًا ذا عمودين.



المعطيات: $\triangle KPL$ متطابق الأضلاع.

$\overline{JP} \cong \overline{MP}$

$\angle JPK \cong \angle MPL$

المطلوب: إثبات أن $\triangle JPK \cong \triangle MPL$.

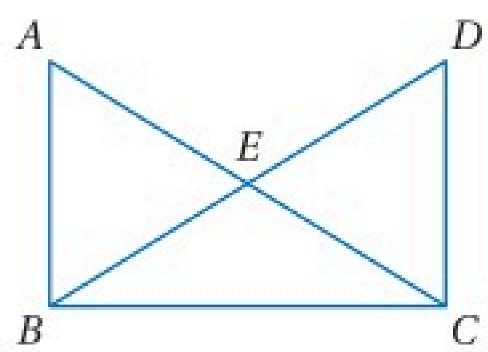
العبارات	المبررات
1) $\triangle KPL$ متطابق الأضلاع.	1) معطى
2) $\overline{PK} \cong \overline{PL}$	2) تعريف المثلث المتطابق الأضلاع
3) $\overline{JP} \cong \overline{MP}$	3) معطى
4) $\angle JPK \cong \angle MPL$	4) معطى
5) $\triangle JPK \cong \triangle MPL$	5) SAS

3-5 إثبات تطابق المثلثات ASA, AAS (ص: 45-51)

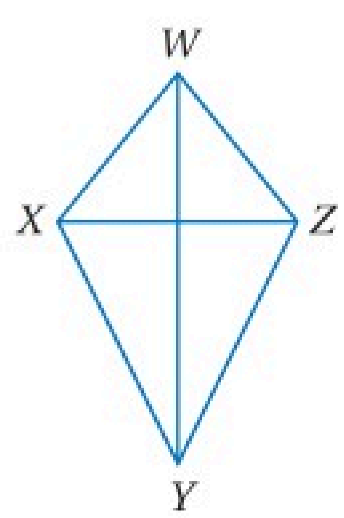
اكتب برهانًا ذا عمودين.

26) **المعطيات:**
$\overline{AB} \parallel \overline{DC}, \overline{AB} \cong \overline{DC}$

المطلوب: إثبات أن $\triangle ABE \cong \triangle CDE$.

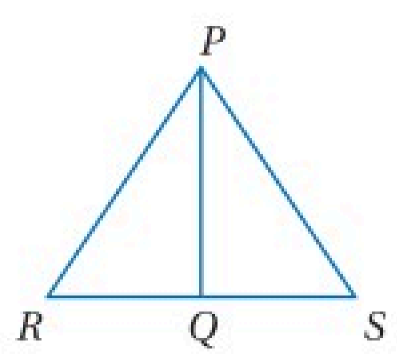


27) الطائرة الورقية: يظهر الشكل المجاور طائرة عثمان الورقية. إذا علمت أن $\overline{WY}$ تنصف كلًّا من $\angle XWZ, \angle XYZ$، فأثبت أن $\triangle WXY \cong \triangle WZY$.



مثال 5

اكتب برهانًا تسلسليًّا.



المعطيات: $\overline{PQ}$ تنصف $\angle RPS$

$\angle R \cong \angle S$

المطلوب: إثبات أن $\triangle RPQ \cong \triangle SPQ$.

البرهان التسلسلي:

$\boxed{\overline{PQ}\text{ تنصف }\angle RPS}$ معطى → $\boxed{\angle RPQ \cong \angle SPQ}$ تعريف منصِّف الزاوية

$\boxed{\angle R \cong \angle S}$ معطى

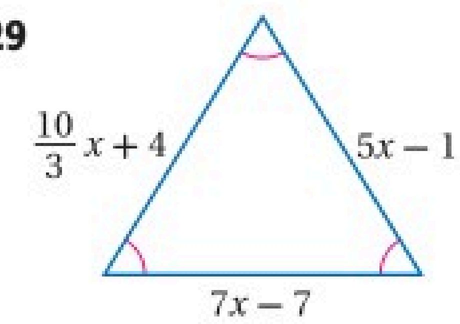
$\boxed{\overline{PQ} \cong \overline{PQ}$} خاصية الانعكاس

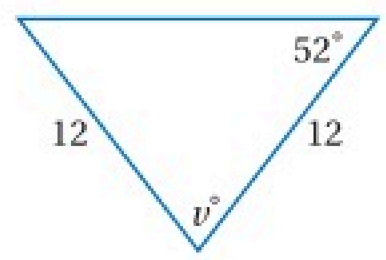
→ $\boxed{\triangle RPQ \cong \triangle SPQ}$ AAS

دليل الدراسة والمراجعة

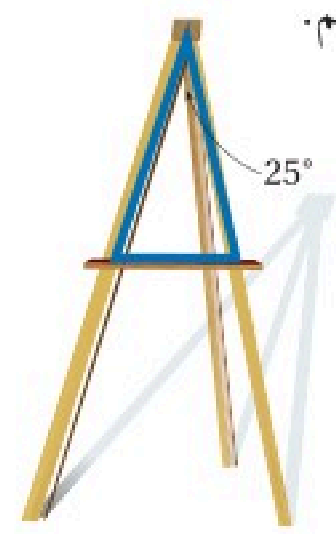
3-6 المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع (ص: 54-61)

أوجد قيمة كلٍّ من المتغيرين فيما يأتي:

(28


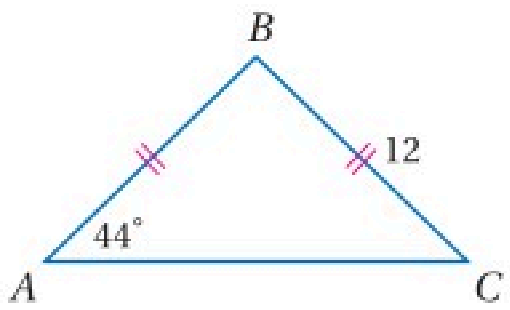
(29


(30 **رسم:** يستعمل وليد حاملًا خشبيًّا للرسم. والقطعة الداعمة الأفقية في الحامل تشكل مثلثًا متطابق الضلعين مع الدعامتين الأماميتين كما في الشكل المجاور، ما قياس كلٍّ من زاويتَي قاعدة المثلث؟



مثال 6

أوجد كل قياس فيما يأتي:



a) $m\angle B$

بما أن $AB = BC$، فإن $\overline{AB} \cong \overline{BC}$، وبتطبيق نظرية المثلث المتطابق الضلعين تكون زاويتا القاعدة A, C متطابقتين؛ إذن $m\angle A = m\angle C$. استعمل نظرية مجموع قياس زوايا المثلث لكتابة معادلة. ثم حلها لتجد $m\angle B$.

$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$ نظرية مجموع زوايا المثلث

$m\angle B + 44 + 44 = 180$ $m\angle A = m\angle C = 44°$

$m\angle B + 88 = 180$ بسّط

$m\angle B = 92°$ اطرح 88 من الطرفين

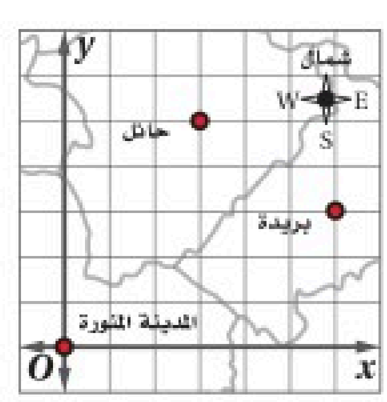
b) AB

$AB = BC$؛ إذن $\triangle ABC$ متطابق الضلعين. وبما أن $BC = 12$، فإن $AB = 12$ أيضًا.

3-7 المثلثات والبرهان الإحداثي (ص: 62-67)

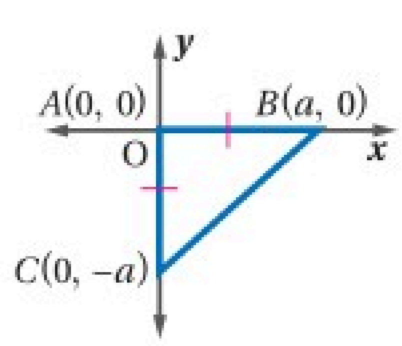
(31 ارسم $\triangle MNO$ القائم الزاوية في M، طولا ضلعيه $a, 2a$.

(32 **جغرافيا:** عيّن شاكر المدينة المنورة وبريدة وحائل كما هو مبين على الخريطة المجاورة. اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث مختلف الأضلاع.



مثال 7

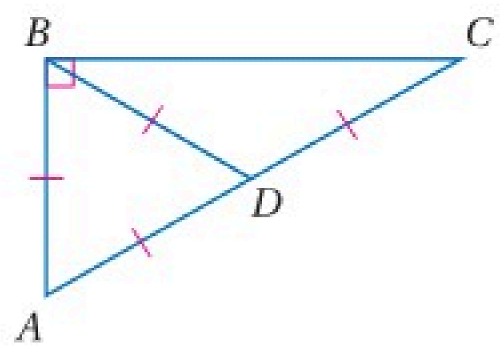
ارسم المثلث $\triangle ABC$ المتطابق الضلعين والقائم الزاوية وطول كلٍّ من ساقَي القائمة يساوي a وحدة على الربع الرابع في المستوى الإحداثي، وحدد إحداثيات رؤوسه.



- اجعل نقطة الأصل رأسًا للزاوية القائمة في المثلث.
- اجعل أحد ضلعَي القائمة على المحور x، والضلع الآخر على المحور y.
- بما أن النقطة B على المحور x، إذن إحداثيها y يساوي صفرًا، وإحداثيها x يساوي a.

وبما أن $\triangle ABC$ متطابق الضلعين، فإن C ستبعد عن نقطة الأصل a وحدة وإحداثيَّيها $(0, -a)$؛ لأنها تقع على الجزء السالب من المحور y، وذلك لكي يكون المثلث في الربع الرابع.

صنّف كلًّا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:



1) $\triangle ABD$

2) $\triangle ABC$

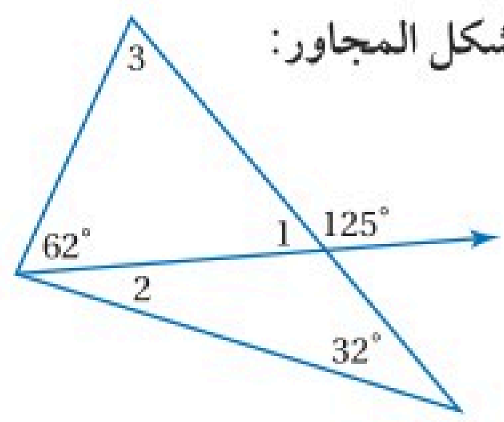
3) $\triangle BDC$

أوجد قياس كلٍّ من الزوايا المرقّمة في الشكل المجاور:

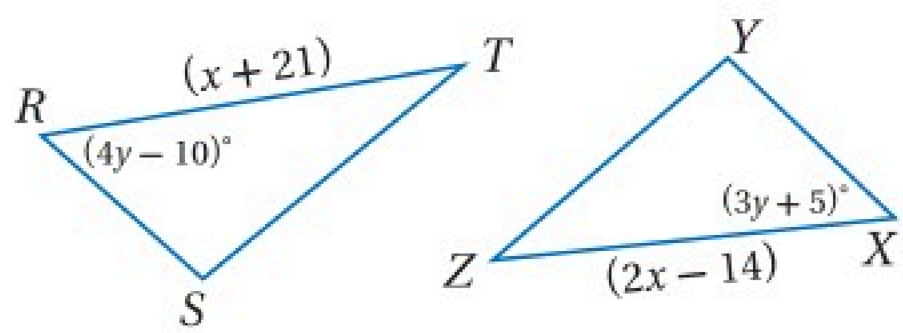
4) $\angle 1$

5) $\angle 2$

6) $\angle 3$



في المثلثين أدناه، إذا كان $\triangle RST \cong \triangle XYZ$ فأوجد:



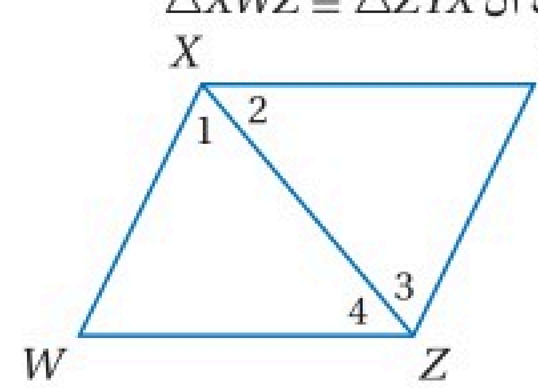
7) قيمة x.

8) قيمة y.

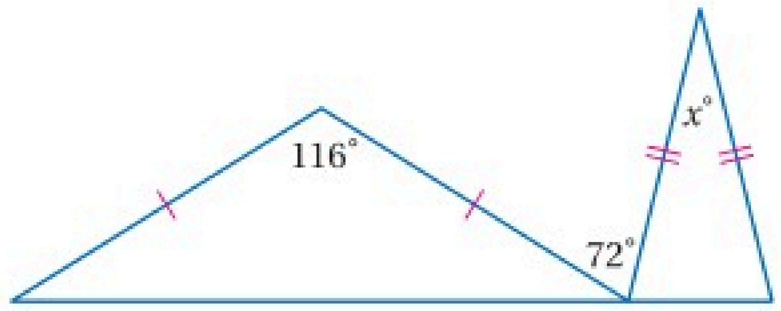
9) **برهان** اكتب برهانًا تسلسليًا.

المعطيات: $\overline{XY} \parallel \overline{WZ}$, $\overline{XW} \parallel \overline{YZ}$

المطلوب: إثبات أن $\triangle XWZ \cong \triangle ZYX$



10) **اختيار من متعدد** ما قيمة x في الشكل أدناه؟

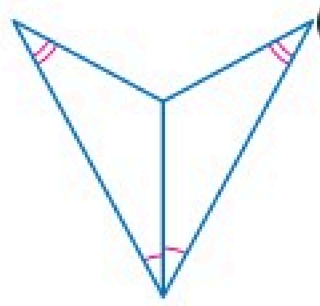


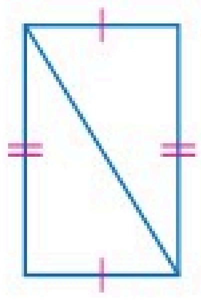
A 36   C 28

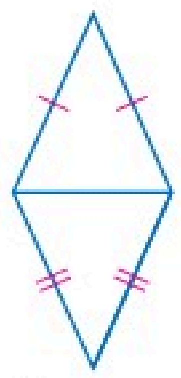
B 32   D 22

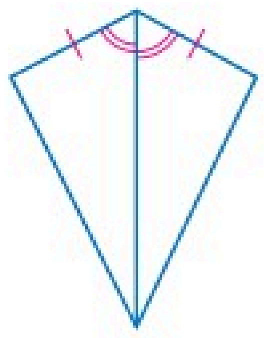
11) إذا علمت أن: $T(-4, -2), J(0, 5), D(1, -1), S(-1, 3)$ $E(3, 10), K(4, 4)$. فحدد ما إذا كان $\triangle TJD \cong \triangle SEK$ أم لا، ووضح إجابتك.

حدد النظرية أو المسلّمة التي يمكن استعمالها لإثبات أن كل زوج من المثلثات متطابق. واكتب "غير ممكن" إذا تعذر إثبات التطابق.

12) 

13) 

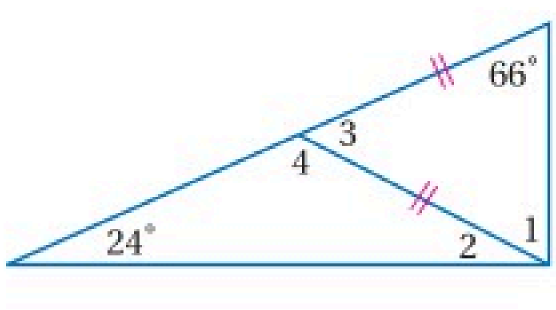
14) 

15) 

أوجد قياس كلٍّ من الزاويتين الآتيتين:

16) $\angle 1$

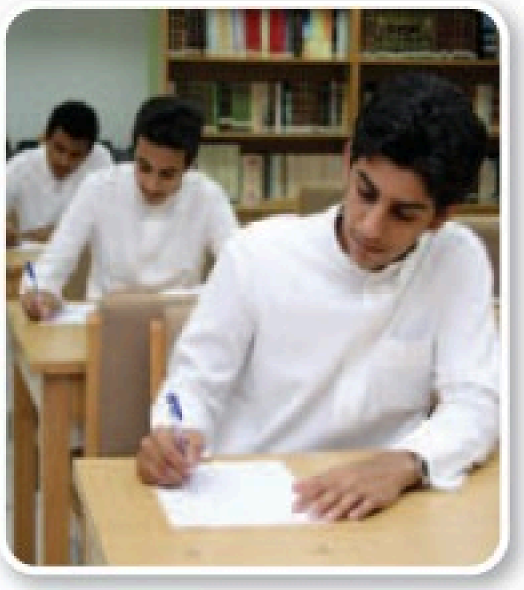
17) $\angle 2$



18) **برهان** إذا كان $\triangle ABC$ متطابق الضلعين وقائم الزاوية، وكانت M نقطة منتصف وتره $\overline{AB}$. فاكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أن $\overline{CM}$ عمودية على $\overline{AB}$.

الفصل 3

الإعداد للاختبارات



الأسئلة ذات الإجابات القصيرة

الأسئلة ذات الإجابات القصيرة تتطلب منك أن تقدِّم حلًّا لها متضمنًا الطريقة والتبريرات والتفسيرات التي استعملتها.

وفي العادة يتم تصحيح هذه الأسئلة، وتحدد درجاتها باستعمال سلالم التقدير.

وهذا مثال على تصحيح هذا النوع من الأسئلة.

سلالم التقدير		
	المعايير	الدرجة
درجة كاملة	الإجابة صحيحة مدعَّمة بتفسيرات كاملة توضح كل خطوة.	2
درجة جزئية	• الإجابة صحيحة، لكن التفسيرات ليست كاملة. • الإجابة غير صحيحة، لكن التفسيرات صحيحة.	1 1
لا يستحق درجة	لم يُقدِّم أي إجابة، أو أن الإجابة ليس لها معنى.	0

استراتيجيات حل الأسئلة ذات الإجابات القصيرة

الخطوة 1

اقرأ السؤال جيدًا؛ كي تفهم الشيء الذي تحاول حله.

- حدد الحقائق ذات العلاقة.
- ابحث عن الكلمات المفتاحية والمصطلحات الرياضية.

الخطوة 2

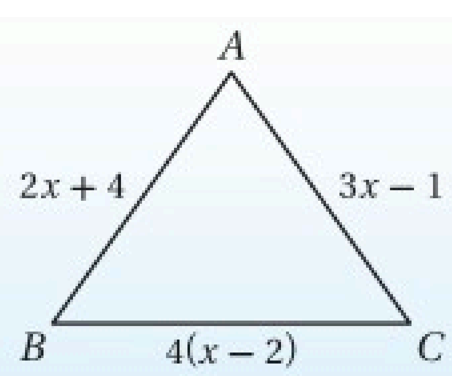
ضع خطة وحل المسألة.

- فسّر تبريرك، أو اعرض الطريقة التي ستتبعها لحل المسألة.
- اكتب الحل كاملًا مبينًا الخطوات جميعها.
- تحقق من إجابتك إذا سمح الوقت بذلك.

مثال

اقرأ السؤال الآتي، وحدد المطلوب. ثم استعمل المعلومات الواردة في السؤال لحله. واكتب خطوات الحل.

ما محيط المثلث ABC متطابق الضلعين الذي قاعدته $\overline{BC}$؟



اقرأ السؤال بعناية. تَعْلَم من السؤال أن $\triangle ABC$ متطابق الضلعين قاعدته $\overline{BC}$، والمطلوب أن تجد محيط هذا المثلث.

ضع خطة وحل السؤال.

ضلعا المثلث المتطابق الضلعين متطابقان.

لذا $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ أو $AB = AC$. والآن حل المعادلة لتجد قيمة x.

$$AB = AC$$
$$2x + 4 = 3x - 1$$
$$2x - 3x = -1 - 4$$
$$-x = -5$$
$$x = 5$$

ثم أوجد طول كل ضلع من أضلاع المثلث.

$\overline{AB}$: $2(5) + 4 = 14$

$\overline{AC}$: $3(5) - 1 = 14$

$\overline{BC}$: $4(5 - 2) = 12$

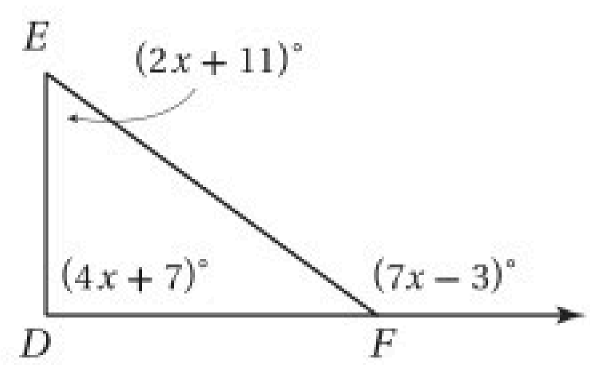
وبما أن $14 + 14 + 12 = 40$، إذن محيط $\triangle ABC$ يساوي 40 وحدةً.

خطوات الحل والحسابات والتبريرات واضحة. وتوصل الطالب إلى الإجابة الصحيحة؛ إذن تستحق هذه الإجابة درجتين.

تمارين ومسائل

اقرأ كل سؤال فيما يأتي، وحدد المطلوب، ثم استعمل المعلومات الواردة في السؤال. واكتب خطوات الحل:

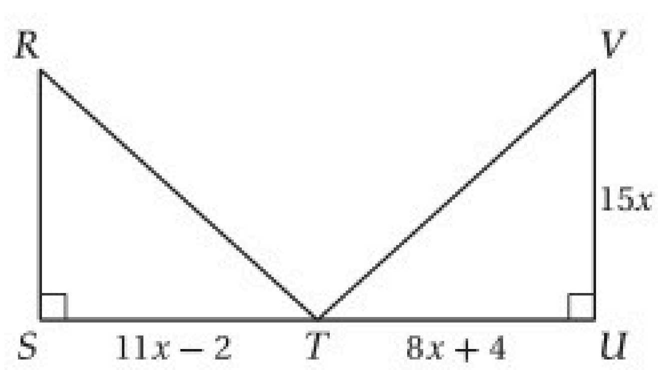
1) صنّف $\triangle DEF$ بحسب زواياه.



2) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين: $(2, 4)$, $(0, -2)$.

3) يحتاج مزارع إلى إنشاء حظيرة مستطيلة الشكل لأغنامه، مساحتها $1000\,m^2$، ويريد أن يوفر المال عن طريق شراء أقل كمية ممكنة من السياج. إذا كانت أبعاد الحظيرة أعدادًا صحيحة، فأوجد بُعدَي القطعة التي تتطلب أقل كميةٍ من السياج.

4) في الشكل أدناه، $\triangle RST \cong \triangle VUT$. ما مساحة $\triangle RST$؟



الفصل 3

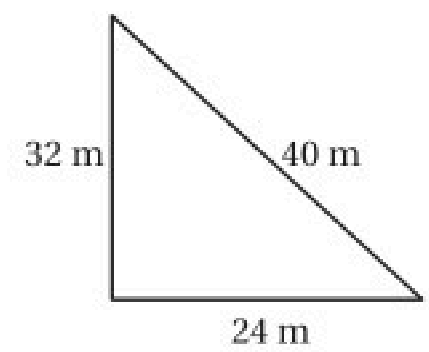
اختبار تراكمي

للفصول 1-3

أسئلة الاختيار من متعدد

اختر رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

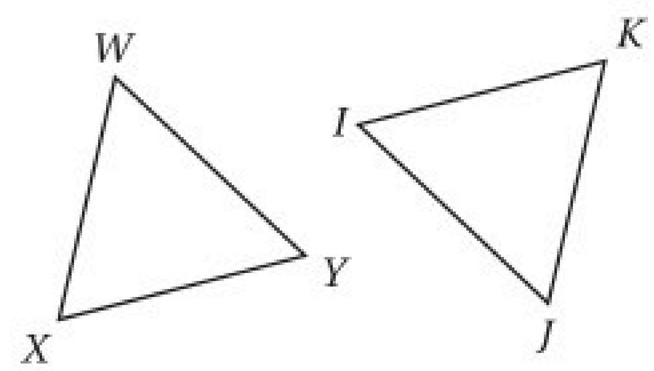
1) يصنف المثلث المرسوم أدناه بحسب أضلاعه بأنه:



A متطابق الأضلاع **C** قائم الزاوية

B متطابق الضلعين **D** مختلف الأضلاع

2) في المثلثين أدناه إذا كان: $\overline{WX} \cong \overline{JK}, \overline{YX} \cong \overline{IK}, \angle X \cong \angle K$



فأيُّ العبارات الآتية تعبِّر عن تطابق هذين المثلثين؟

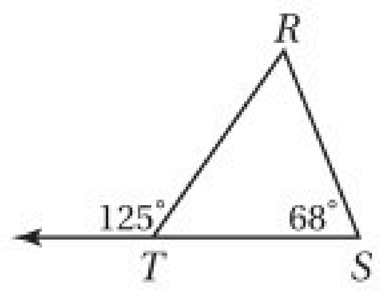
A $\triangle WXY \cong \triangle KIJ$

B $\triangle WXY \cong \triangle IKJ$

C $\triangle WXY \cong \triangle JKI$

D $\triangle WXY \cong \triangle IJK$

3) ما قياس الزاوية R في الشكل أدناه؟



A $57°$

B $59°$

C $65°$

D $68°$

4) افترض أن قياس إحدى زاويتَي القاعدة في مثلث متطابق الضلعين يساوي $44°$، فما قياس زاوية رأس المثلث؟

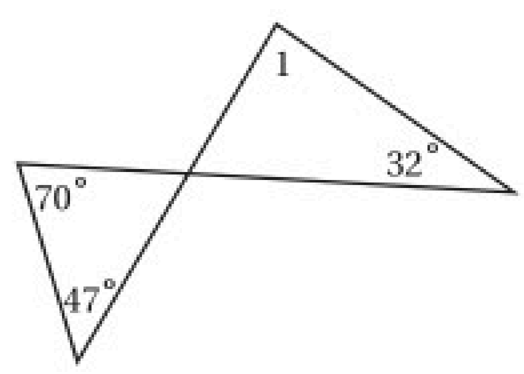
A $108°$

B $92°$

C $56°$

D $44°$

5) أوجد $m\angle 1$؟



A $85°$

B $63°$

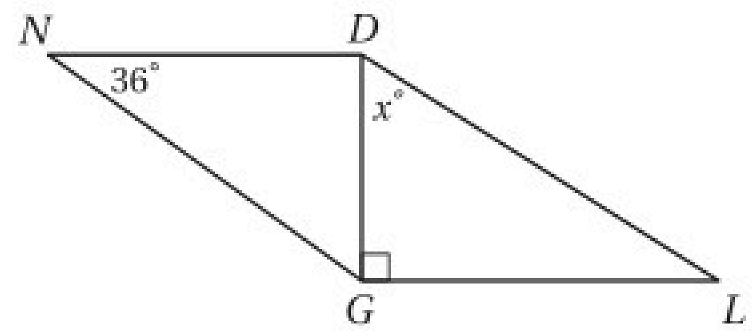
C $47°$

D $32°$

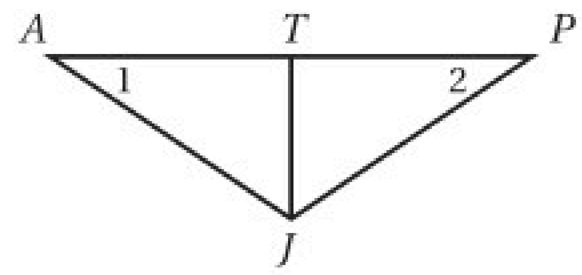
أسئلة ذات إجابات قصيرة

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

6) إذا كان $\triangle NDG \cong \triangle LGD$ في الشكل أدناه، فما قيمة x؟

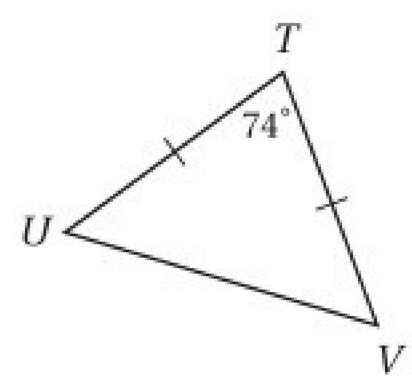


7) في الشكل أدناه $\angle 2 \cong \angle 1$ ، $\overline{JT} \perp \overline{AP}$



حدِّد نظرية التطابق التي تبيِّن أن $\triangle ATJ \cong \triangle PTJ$ باستعمال المعطيات الواردة في السؤال فقط، ووضح إجابتك.

8) أوجد $m\angle TUV$ في الشكل أدناه.



9) أثبت الجملة "يتطابق مثلثان إذا تطابق ضلعان وزاوية غير محصورة بينهما من المثلث الأول مع نظائرها من المثلث الثاني" إذا كانت صحيحة بكتابة برهان حرٍّ، أو ارسم شكلًا يبيِّن عدم صحَّتِها.

10) إذا علمت أن $\triangle DCB \cong \triangle EFG$، فاكتب الزوايا والأضلاع المتناظرة في المثلثين.

أسئلة ذات إجابات مطولة

11) أجب عن الأسئلة a–d؛ لتحصل على برهان إحداثيٍّ للعبارة الآتية:

المثلث الذي رؤوسه $A(0, 0), B(2a, b), C(4a, 0)$ هو مثلث متطابق الضلعين.

a) عيِّن الرؤوس على ورقة رسم بيانيٍّ.

b) استعمل قانون المسافة لكتابة عبارة تمثِّل AB.

c) استعمل قانون المسافة لكتابة عبارة تمثِّل BC.

d) استعمل النتائج التي توصَّلت إليها في الفرعين b , c؛ لتدوِّن استنتاجك عن $\triangle ABC$.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟											
إذا لم تستطع الإجابة عن ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
فعد إلى الدرس...	3-1	3-3	3-2	3-6	3-2	3-3	3-5	3-6	3-4	3-3	3-7

الفصل

4

العلاقات في المثلث

Relationships in Triangle

فيما سبق:

درستُ طرائق تصنيف المثلثات.

والآن:

- أتعرف القطع المستقيمة والنقاط المرتبطة بالمثلثات.
- أتعرف العلاقات الخاصة بين أضلاع المثلث وزواياه.
- أكتب برهانًا غير مباشر.

لماذا؟

التصميم الداخلي: تستعمل العلاقات في المثلث لإيجاد الأبعاد وقياسات الزوايا ومقارنتها. ويستعمل مهندسو التصميم الداخلي هذه العلاقات لتحسين تصاميمهم.

المطويات منظم أفكار

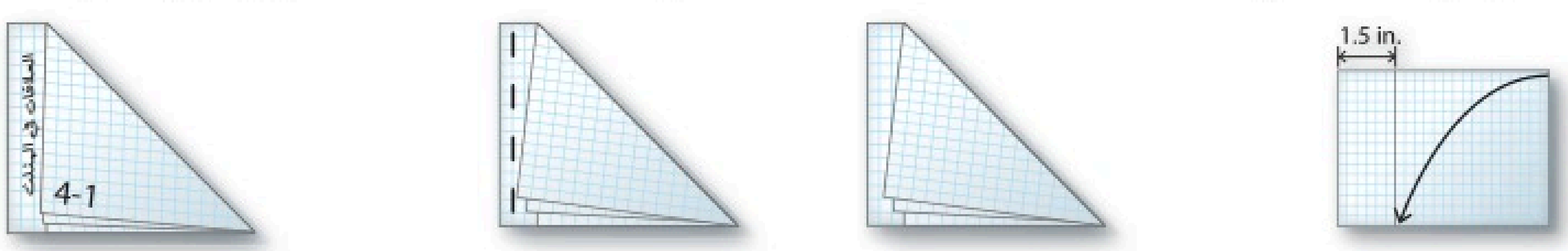
العلاقات في المثلث: اعمل هذه المطوية؛ لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول الفصل 4، مبتدئًا بسبع أوراق رسم بياني.

1 **اجمع الأوراق،** واطوِ الركن العلوي الأيمن إلى الحافة السفلى لتشكل مثلثات متطابقة وحافة مستطيلة .

2 **اطوِ الجزء** المستطيل كما هو مبين بالشكل.

3 **ثبّت الأوراق** على طول الحافة المستطيلة في أربعة أماكن.

4 **اكتب عنوان الفصل على الحافة** المستطيلة، ورقّم كل درس أسفل المثلث، وخصص الورقة الأخيرة للمفردات الجديدة كما هو موضح بالشكل.



رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل 4

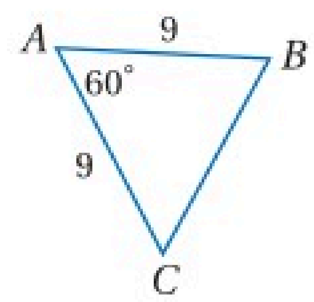
تشخيص الاستعداد:

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

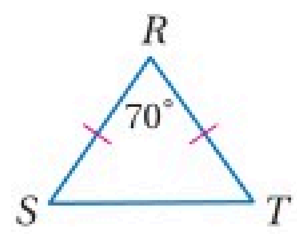
اختبار سريع

أوجد كلًّا من القياسين الآتيين :

1) BC



2) $m\angle RST$



3) **حدائق:** يصمِّم عبد الله حوضًا لزراعة الورود على شكل مثلث قائم الزاوية. إذا كان طول كلٍّ من ضلعَي القائمة 7 ft، فما طول الضلع الثالث (قرِّب إلى أقرب عدد صحيح)؟

للأسئلة 4-6 ضع تخمينًا مبنيًّا على المعطيات وارسم شكلًا يوضح تخمينك:

4) $\angle 3$, $\angle 4$ زاويتان متجاورتان على خط مستقيم.

5) $JKLM$ مربع.

6) $\overrightarrow{BD}$ منصّف لِـ $\angle ABC$.

7) **تبرير:** حدّد ما إذا كان التخمين التالي المبني على المعطيات الواردة صحيحًا دائمًا أو صحيحًا أحيانًا أو غير صحيح أبدًا. وفسِّر إجابتك.

المعطيات: D, E, F ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة.

التخمين: $DE + EF = DF$

حل كلًّا من المتباينات الآتية:

8) $x + 16 < 41$

9) $x - 6 > 2x$

10) $6x + 9 < 7x$

11) $8x + 15 > 9x - 26$

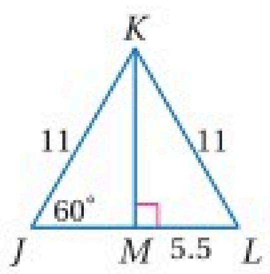
12) **صور:** أضافت نورة 15 صورة إلى ألبوم صورها، فأصبح عدد الصور أكثر من 120، فكم صورة كانت في الألبوم؟

مراجعة سريعة

مثال 1

أوجد كلًّا من القياسين الآتيين :

a) JM b) $m\angle JKL$



a) بما أن $JK = KL$ (معطى) ، فإن $m\angle J = m\angle L$ (نظرية المثلث المتطابق الضلعين)، وبما أن $m\angle KMJ = m\angle KML = 90°$ $(KM \perp JM)$، فإن هذا يعني أن $\angle KMJ \cong \angle KML$، ويكون $\triangle KMJ \cong \triangle KML$ بحسب AAS، ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة، فإن $JM = ML = 5.5$

b)

$m\angle J + m\angle JKL + m\angle L = 180°$	نظرية مجموع زوايا المثلث
$60° + m\angle JKL + 60° = 180°$	$m\angle J = m\angle L = 60°$
$120° + m\angle JKL = 180°$	بسّط
$m\angle JKL = 60°$	اطرح 120 من الطرفين

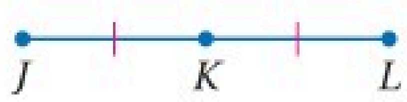
مثال 2

ضع تخمينًا مبنيًّا على المعطى الآتي، إذا كانت K نقطة منتصف $\overline{JL}$، وارسم شكلًا يوضح تخمينك.

المعطيات: K نقطة منتصف $\overline{JL}$.

التخمين: $\overline{JK} \cong \overline{KL}$

الرسم:



مثال 3

حل المتباينة $3x + 5 > 2x$

$3x + 5 > 2x$	معطى
$3x - 3x + 5 > 2x - 3x$	اطرح $3x$ من الطرفين
$5 > -x$	بسّط
$-5 < x$	اقسم الطرفين على -1

استكشاف **4-1** معمل الهندسة

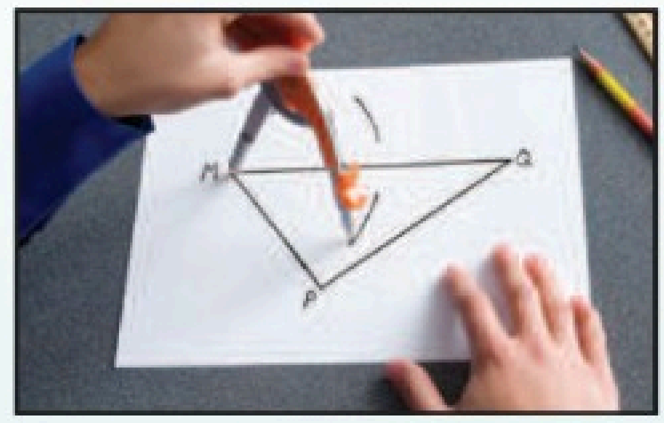
إنشاء المنصّفات
Constructing Bisectors

سوف تنشئ فيما يلي العمود المنصف لأحد أضلاع مثلث والمنصف لإحدى زواياه.
العمود المنصِف لقطعةٍ مستقيمةٍ هو العمود على القطعة المار بمنتصفها.

إنشاء هندسي 1 — العمود المنصّف

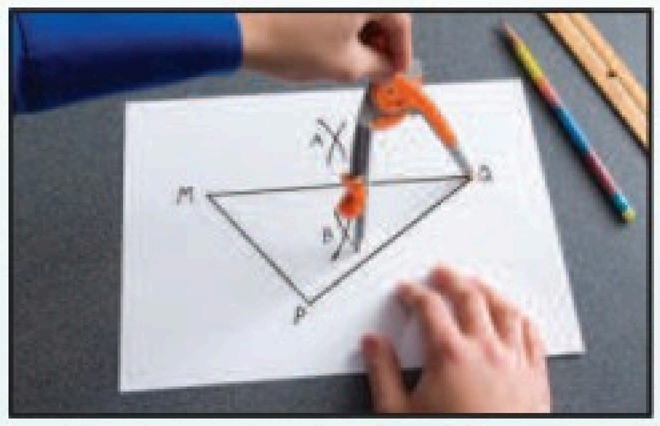
إنشاء العمود المنصّف لأحد أضلاع مثلث.

الخطوة 1:



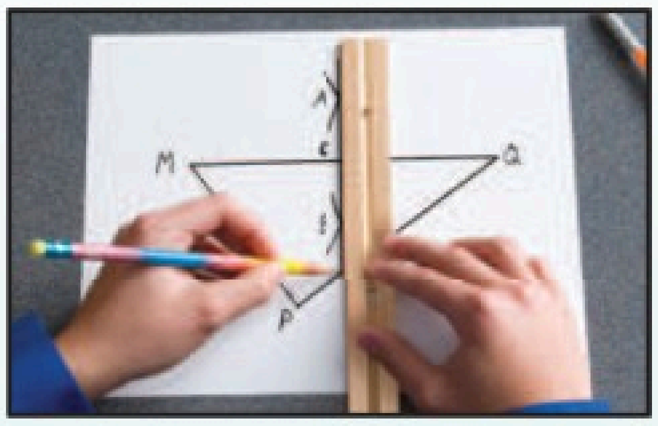
افتح الفرجار فتحة أكبر من $\frac{1}{2}MQ$، وارسم قوسًا من الرأس M فوق $\overline{MQ}$ وقوسًا آخر تحتها.

الخطوة 2:



استعمل فتحة الفرجار نفسها. وارسم من الرأس Q قوسًا فوق $\overline{MQ}$ وقوسًا آخر تحتها. وسمِّ نقطتي تقاطع القوسين A , B.

الخطوة 3:



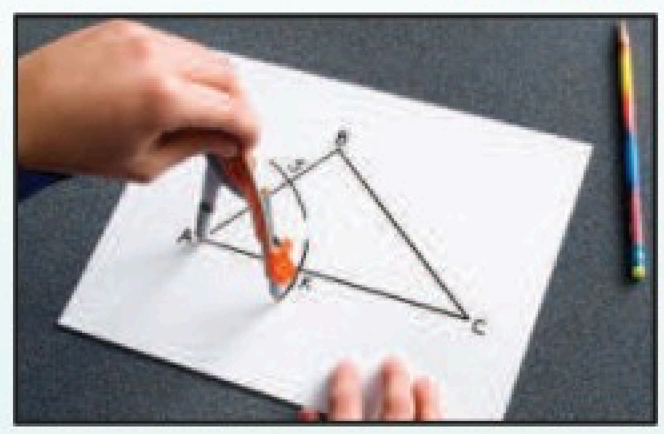
استعمل مسطرة غير مدرّجة وارسم المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$. وسمّ نقطة تقاطع $\overline{MQ}$, $\overleftrightarrow{AB}$ بالحرف C.

منصّف زاوية في مثلث هو نصف مستقيم يقسم الزاوية إلى زاويتين متطابقتين.

إنشاء هندسي 2 — منصّف الزاوية

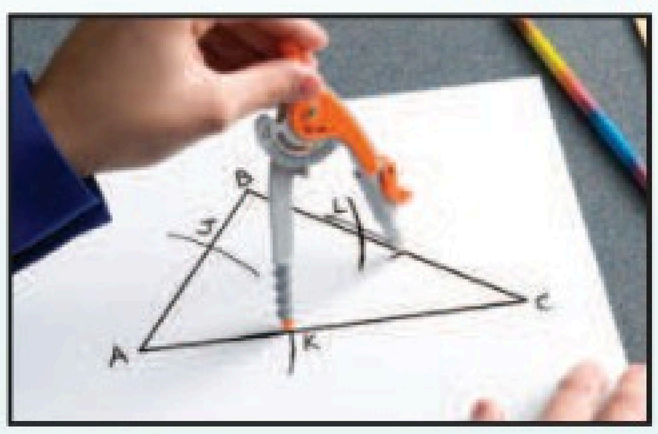
إنشاء منصّف زاوية في مثلث.

الخطوة 1:



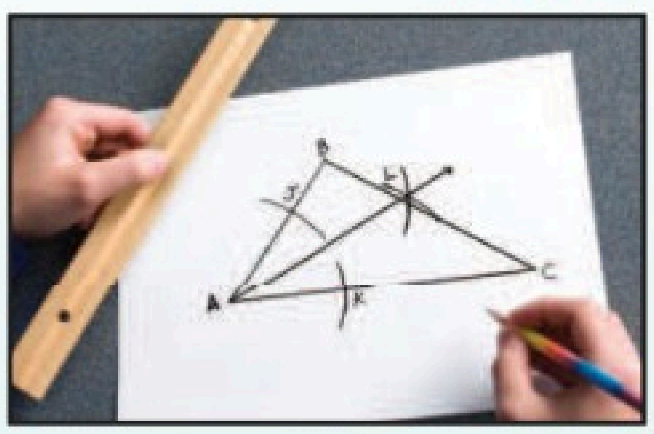
ثبّت الفرجار عند الرأس A، وارسم قوسًا يقطع $\overline{AC}$, $\overline{AB}$. وسمِّ نقطتَي التقاطع J, K.

الخطوة 2:



ثبّت الفرجار عند J، وارسم قوسًا داخل الزاوية A، وارسم من K قوسًا آخر، مستعملًا فتحة الفرجار نفسها، على أن يقطع القوس الأول في نقطة سمِّها L.

الخطوة 3:



استعمل مسطرة غير مدرّجة لرسم $\overrightarrow{AL}$، وهو منصّف للزاوية A في $\triangle ABC$.

التمثيل والتحليل:

1) أنشئ العمودين المنصّفين للضلعين الآخرين في $\triangle MPQ$. ثم أنشئ منصّفي الزاويتين الباقيتين في $\triangle ABC$. ماذا تلاحظ حول نقطة التلاقي في الحالتين؟

كرّر الإنشاءين السابقين لكل نوع من المثلثات الآتية:

2) حادّ الزوايا
3) منفرج الزاوية
4) قائم الزاوية

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-1 المنصّفات في المثلث
Bisectors of Triangle

فيما سبق:

درستُ منصِّف القطعة المستقيمة ومنصِّف الزاوية.

والآن:

- أتعرَّف الأعمدة المنصِّفة في المثلثات وأستعملها.
- أتعرَّف منصِّفات الزوايا في المثلثات وأستعملها.

المفردات:

العمود المنصِّف
perpendicular bisector

المستقيمات المتلاقية
concurrent lines

نقطة التلاقي
point of concurrency

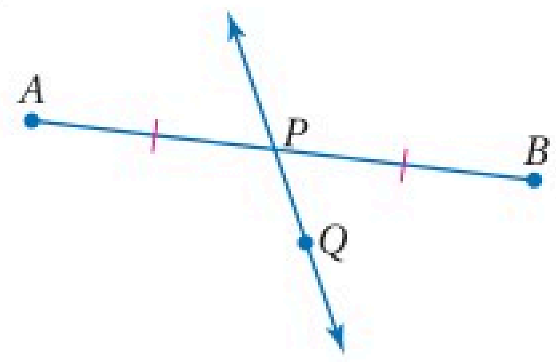
مركز الدائرة الخارجية للمثلث
circumcenter

مركز الدائرة الداخلية للمثلث
incenter

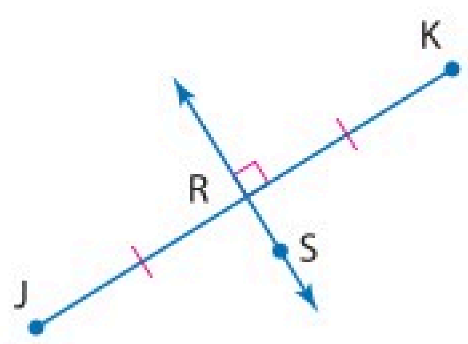
لماذا؟

إن تصميم منطقة العمل على شكل مثلث كما في الصورة المجاورة يجعل إعداد الطعام أسرع؛ وذلك بتقليل عدد الخطوات التي تخطوها سيدة البيت. ولتعيين النقطة المتساوية البعد عن كلٍّ من الفرن ومصدر الماء والثلاجة، يمكنك استعمال الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث.

الأعمدة المنصّفة: تعلمت سابقًا أن منصّف قطعة مستقيمة هو أي قطعة أو مستقيم أو مستوى يقطع القطعة عند نقطة منتصفها، وإذا كان المنصّف عموديًّا على القطعة سُمِّي **عمودًا منصّفًا** .



$\overleftrightarrow{PQ}$ منصّف لـِ $\overline{AB}$



$\overleftrightarrow{RS}$ عمود منصّف لـِ $\overline{JK}$

تذكّر أنّ المحل الهندسي هو مجموعة من النقاط تحقق شرطًا معينًا، فالعمود المنصّف لقطعة مستقيمة هو المحل الهندسي لمجموعة نقاطٍ في المستوى، تقع كلٌّ منها على بُعدين متساويين من طرفَي القطعة المستقيمة، وهذا يقود إلى النظريتين الآتيتين:

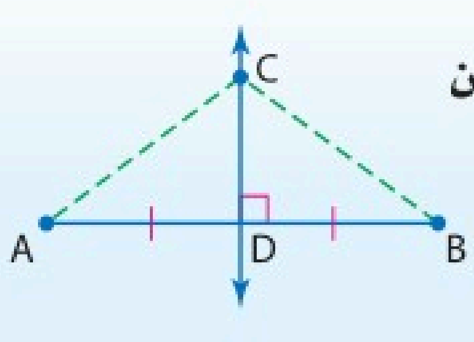
نظريتان — الأعمدة المنصّفة

أضف إلى مطويتك

4.1 نظريّة العمود المنصّف

كلّ نقطة على العمود المنصّف لقطعة مستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفَي القطعة المستقيمة.

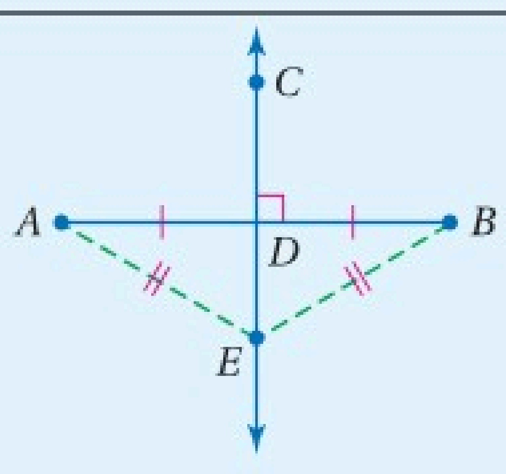
مثال: إذا كان $\overleftrightarrow{CD}$ عمودًا منصّفًا لـِ $\overline{AB}$ ، فإن $AC = BC$.



4.2 عكس نظريّة العمود المنصّف

كل نقطة على بُعدين متساويين من طرفي قطعة مستقيمة تقع على العمود المنصّف لتلك القطعة.

مثال: إذا كان $AE = BE$ ، و $\overleftrightarrow{CD}$ هو العمود المنصّف لـِ $\overline{AB}$، فإن E تقع على $\overleftrightarrow{CD}$.

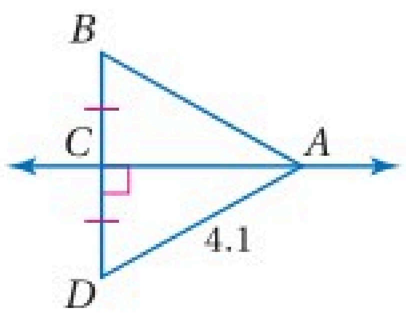


سوف تبرهن النظريتين 4.2 ,4.1 في السؤالين 27 ,29 .

مثال 1 استعمال نظريات العمود المنصّف

أوجد كلّ قياس مما يأتي :

a) AB

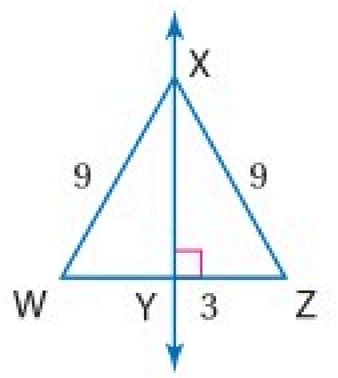


من المعطيات في الشكل المجاور ، نعلم أن $\overleftrightarrow{CA}$ عمودٌ منصّف لـ $\overline{BD}$

$AB = AD$ **نظريّة العمود المنصّف**

$AB = 4.1$ **عوّض**

b) WY



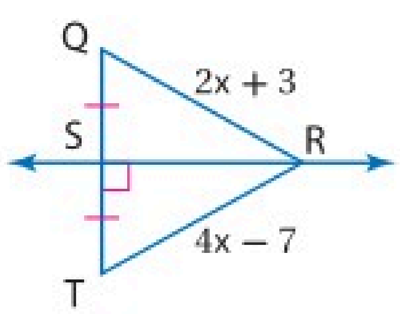
$WX = ZX, \overleftrightarrow{XY} \perp \overline{WZ}$ **معطيات**

$\overleftrightarrow{XY}$ عمود منصّف لِـ $\overline{WZ}$ **عكس نظرية العمود المنصّف**

$WY = YZ$ **تعريف منصّف قطعة مستقيمة**

$WY = 3$ **عوّض**

c) RT



$\overleftrightarrow{SR}$ عمود منصّف $\overline{QT}$.

$RT = RQ$ **نظريّة العمود المنصّف**

$4x - 7 = 2x + 3$ **عوّض**

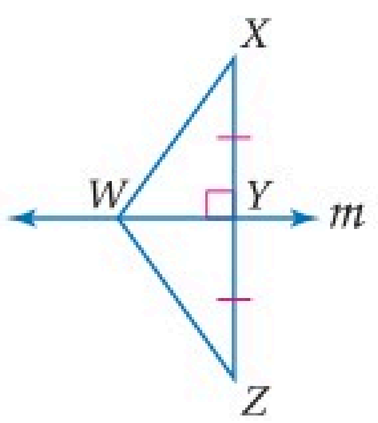
$2x - 7 = 3$ **اطرح $2x$ من الطرفين**

$2x = 10$ **اجمع 7 إلى الطرفين**

$x = 5$ **اقسم الطرفين على 2**

إذن $RT = 4(5) - 7 = 13$.

✓ تحقق من فهمك

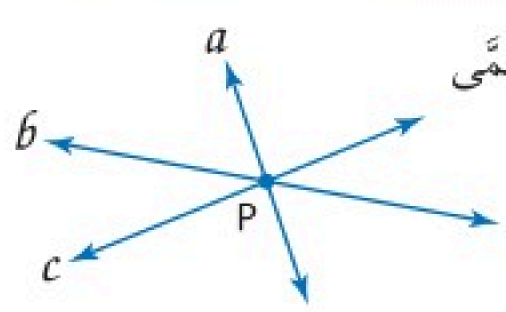


1A) إذا كان $WZ = 25.3$, $YZ = 22.4$, $WX = 25.3$ ، فأوجد طول $\overline{XY}$.

1B) إذا كان m عمودًا منصّفًا لِـ $\overline{XZ}$ ، $WZ = 14.9$، فأوجد طول $\overline{WX}$.

1C) إذا كان m عمودًا منصّفًا لِـ $\overline{XZ}$ ، $WZ = a + 12$, $WX = 4a - 15$
فأوجد طول $\overline{WX}$.

عندما تتقاطع ثلاثة مستقيمات أو أكثر في نقطة مشتركة، فإنّ هذه المستقيمات تُسمَّى **مستقيمات متلاقية**. والنقطة التي تلتقي فيها المستقيمات تسمّى **نقطة التلاقي**. وبما أنّ لكل مثلث ثلاثة أضلاع، فإنّ له ثلاثة أعمدة منصّفة. وهذه الأعمدة المنصّفة هي مستقيمات متلاقية. وتسمى نقطة تلاقي الأعمدة المنصّفة **مركز الدائرة الخارجية للمثلث**.



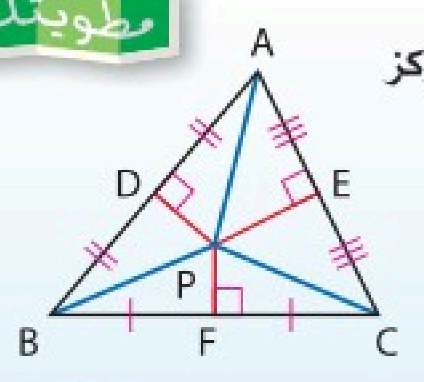
تتلاقى المستقيمات a, b, c في النقطة P.

نظرية 4.3 نظرية مركز الدائرة الخارجية للمثلث.

أضف إلى مطويتك

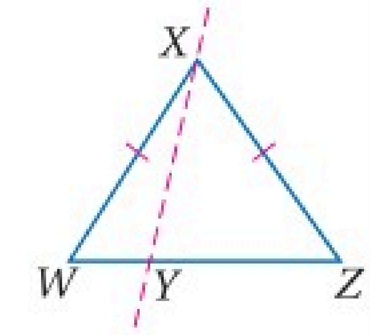
التعبير اللفظي: تلتقي الأعمدة المنصّفة لأضلاع مثلث في نقطة تُسمَّى مركز الدائرة الخارجية للمثلث، وهي دائرة تمر برؤوس المثلث، وهي على أبعادٍ متساوية من الرؤوس.

مثال: إذا كانت P مركز الدائرة الخارجية للمثلث $\triangle ABC$ ، فإنّ $PB = PA = PC$



إرشادات للدراسة

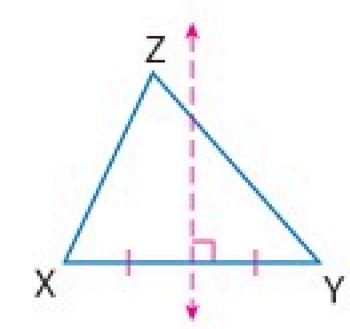
المعلومة $WX = ZX$ لوحدها لا تعدُّ كافية لاستنتاج أن $\overleftrightarrow{XY}$ عمود منصف لـ $\overline{WZ}$.



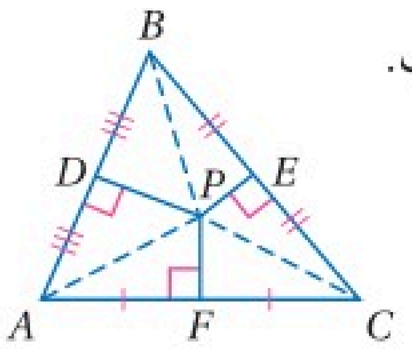
إرشادات للدراسة

العمود المنصّف

ليس من الضروري أن يمرّ العمود المنصّف لضلع مثلث برأس المثلث المقابل . فمثلًا في $\triangle XYZ$ أدناه العمود المنصّف لـ $\overline{XY}$ لا يمرُّ بالرأس Z.



برهان نظرية مركز الدائرة الخارجية للمثلث



المعطيات: $\overline{PD}, \overline{PF}, \overline{PE}$ أعمدة منصّفة للأضلاع $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ على الترتيب.

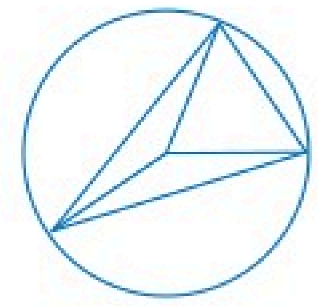
المطلوب: $AP = CP = BP$

برهان حرّ:

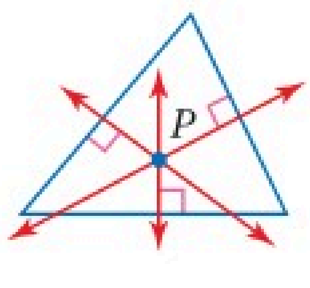
بما أنّ P تقع على العمود المنصّف لـ $\overline{AC}$، فإنها متساوية البُعد عن A , C .
أي أن $AP = CP$. والعمود المنصّف لـ $\overline{BC}$ يمر أيضًا بالنقطة P. لذلك يكون $CP = BP$ ، وتبعًا لخاصيّة التعدّي لعلاقة المساواة يكون $AP = BP$ ؛ إذن $AP = CP = BP$.

إرشادات للدراسة

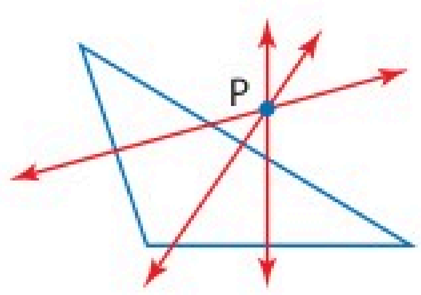
مركز الدائرة الخارجية للمثلث: هو مركز الدائرة التي تمر برؤوس هذا المثلث.



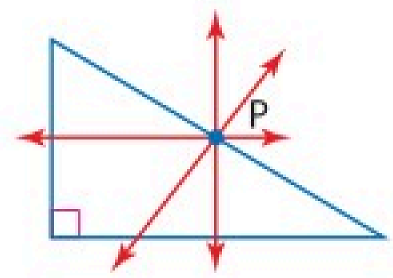
يمكن أن يقع مركز الدائرة الخارجية للمثلث داخل المثلث أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



مثلث حاد الزوايا



مثلث منفرج الزاوية



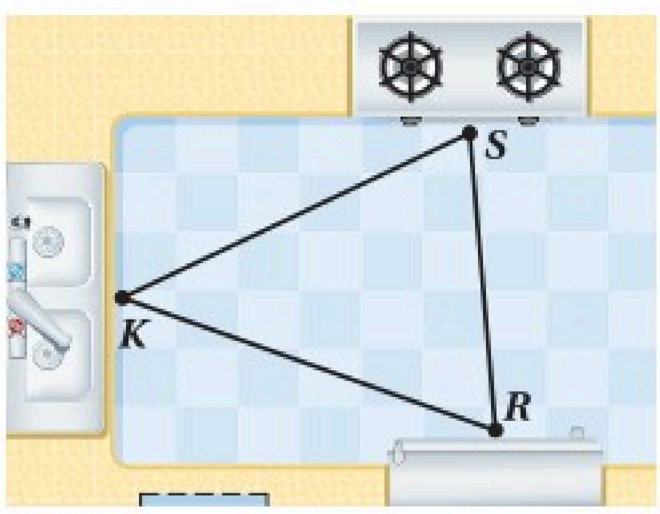
مثلث قائم الزاوية

مثال 2 من واقع الحياة استعمال نظريّة مركز الدائرة الخارجية للمثلث

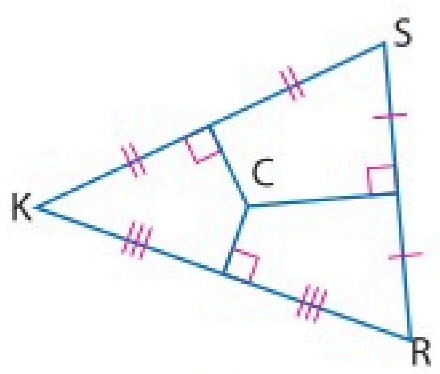
الربط مع الحياة

يتركز معظم النشاط داخل المطبخ حول ثلاث مناطق عمل أساسية هي: مصدر الماء، الثلاجة، فرن الطبخ، ويجب ألّا يزيد مجموع أطوال الأضلاع الثلاثة لمثلث منطقة العمل على سبعة أمتار.

تصميم داخلي: **تطبيقًا للفكرة التي وردت في فقرة (لماذا؟)، إذا وُضع فرن الطبخ S ومصدر الماء K والثلاجة R في مطبخ كما في الشكل المجاور. أوجد النقطة التي تكون على أبعاد متساوية من النقاط S, K, R .**

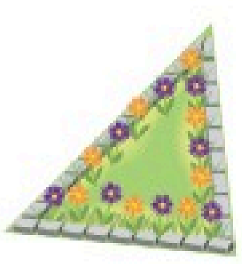


بحسب نظرية مركز الدائرة الخارجية للمثلث، يمكن تعيين النقطة التي تكون على أبعاد متساوية من النقاط الثلاث باستعمال الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث المتكون من هذه النقاط.



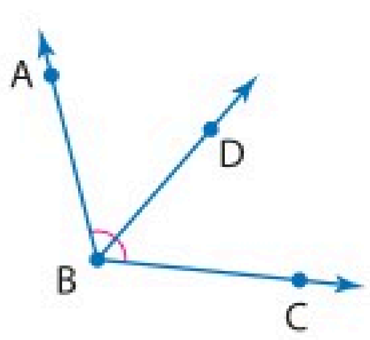
انسخ $\triangle SKR$ واستعمل المسطرة والمنقلة لرسم الأعمدة المنصفة لأضلاعه، فتكون النقطة C مركز الدائرة الخارجية للمثلث SKR . وهي النقطة المطلوبة.

تحقق من فهمك



2) يريد عليّ أن يضع مرشَّة الماء على أبعاد متساوية من رؤوس حديقته المثلثة الشكل . فأين يتعين عليه وضع المرشّة؟

منصفات الزوايا: تعلم أنّ منصّف الزاوية يقسمها إلى زاويتين متطابقتين، كما يمكن أن يوصف منصّف الزاوية بأنّه المحل الهندسي للنقاط الواقعة داخل الزاوية، وتكون على أبعاد متساوية من ضلعَيها. ويقود هذا الوصف إلى النظريتين الآتيتين:

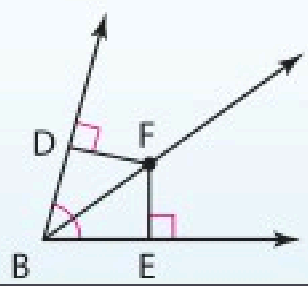


$\overrightarrow{BD}$ منصف لـ $\angle ABC$.

نظريتان — منصّفات الزوايا

أضف إلى مطويتك

4.4 نظرية منصّف الزاوية

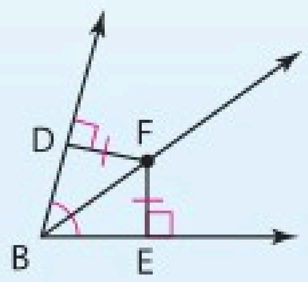


كل نقطة تقع على منصّف زاوية تكون على بُعدين متساويين من ضلعيها.

مثال: إذا كان $\overrightarrow{BF}$ منصّفًا لـ $\angle DBE$، وكان $\overline{FD} \perp \overrightarrow{BD}$, $\overline{FE} \perp \overrightarrow{BE}$

فإن $DF = FE$.

4.5 عكس نظريّة منصّف الزاوية



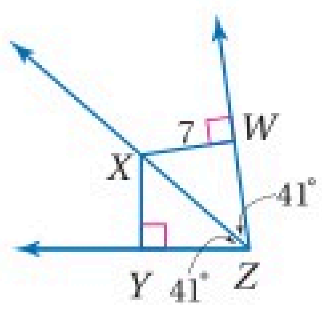
كل نقطة تقع داخل الزاوية وتكون على بُعدين متساويين من ضلعيها فإنها تكون واقعة على منصّف الزاوية.

مثال: إذا كان $\overline{FD} \perp \overrightarrow{BD}, \overline{FE} \perp \overrightarrow{BE}, DF = FE$ ،

فإن $\overrightarrow{BF}$ ينصّف $\angle DBE$

ستبرهن النظريتين 4.5 ,4.4 في السؤالين 32,30

مثال 3 — استعمال نظريتَي منصّفات الزوايا

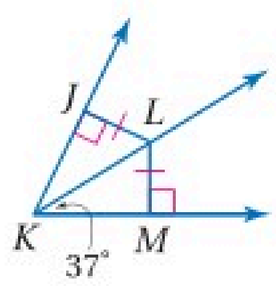


أوجد كلّ قياس مما يأتي :

a) XY

$XY = XW$ — نظريّة منصّف الزاوية

$XY = 7$ — عوّض



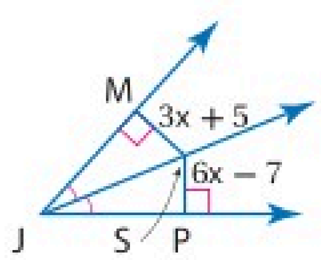
b) $m\angle JKL$

بما أن $\overline{LJ} \perp \overrightarrow{KJ}$, $\overline{LM} \perp \overrightarrow{KM}$, $LJ = LM$ ، فإن L على بعدين متساويين من ضلعي $\angle JKM$. وبحسب عكس نظرية منصّف الزاوية، فإن $\overrightarrow{KL}$ ينصّف $\angle JKM$

$\angle JKL \cong \angle LKM$ — تعريف منصّف الزاوية

$m\angle JKL = m\angle LKM$ — تعريف الزوايا المتطابقة

$m\angle JKL = 37°$ — عوّض



c) SP

$SP = SM$ — نظريّة منصّف الزاوية

$6x - 7 = 3x + 5$ — عوّض

$3x - 7 = 5$ — اطرح $3x$ من الطرفين

$3x = 12$ — اجمع 7 إلى الطرفين

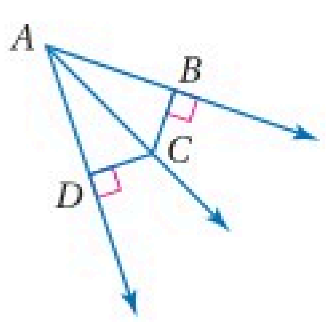
$x = 4$ — اقسم الطرفين على 3

إذن $SP = 6(4) - 7 = 17$.

إرشادات للدراسة

منصّف الزاوية

لا تعدّ المعلومة $JL = LM$ في الفرع b لوحدها كافية لاستنتاج أن $\overrightarrow{KL}$ ينصّف $\angle JKM$.



✓ تحقق من فهمك

3A) إذا كان: $m\angle BAC = 38°$, $BC = 5$, $DC = 5$ ، فأوجد $m\angle DAC$

3B) إذا كان: $m\angle BAC = 40°$, $m\angle DAC = 40°$, $DC = 10$ ، فأوجد BC

3C) إذا كان $\overrightarrow{AC}$ ينصّف $\angle DAB$ ، و $BC = 4x + 8$, $DC = 9x - 7$

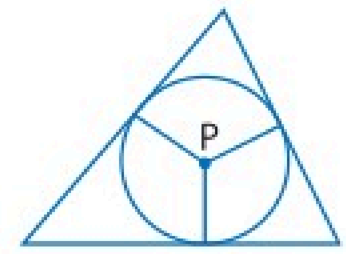
فأوجد BC

وكما هو الحال في الأعمدة المنصّفة، بما أن للمثلث ثلاث زوايا، فإنّ له ثلاثة منصّفات للزوايا تتلاقى في نقطة تُسمّى **مركز الدائرة الداخلية للمثلث**.

قراءة الرياضيات

مركز الدائرة الداخلية للمثلث

هو مركز الدائرة التي تقطع (تتماس مع) كل ضلع من أضلاع المثلث في نقطة واحدة. ولهذا السبب فإن مركز هذه الدائرة يقع داخل المثلث دائمًا.



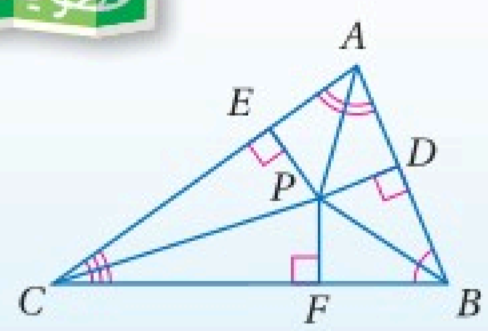
نظريّة 4.6 نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تتقاطع منصّفات زوايا أي مثلث عند نقطة تُسمّى مركز الدائرة الداخلية للمثلث، وهي على أبعاد متساوية من أضلاعه.

مثال: إذا كانت P مركز الدائرة الداخلية للمثلث ABC،

فإنّ $PD = PE = PF$

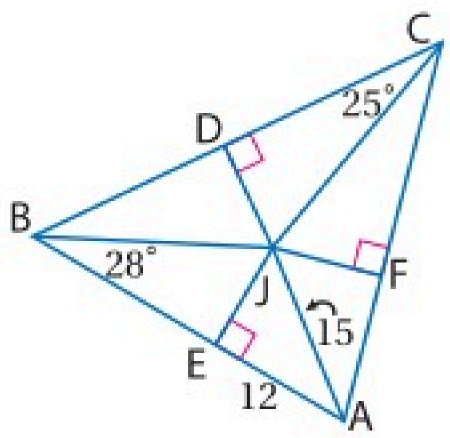


ستبرهن النظرية 4.6 في السؤال 28

مثال 4 استعمال نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث

أوجد كلًّا من القياسين الآتيين، إذا كانت J مركز الدائرة الداخلية لـ$\triangle ABC$.

a) JF



بما أن J على أبعادٍ متساوية من أضلاع $\triangle ABC$، بحسب نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث، فإن $JF = JE$؛ لذا أوجد JE باستعمال نظريّة فيثاغورس.

$a^2 + b^2 = c^2$	نظرية فيثاغورس
$JE^2 + 12^2 = 15^2$	عوّض
$JE^2 + 144 = 225$	$12^2 = 144, 15^2 = 225$
$JE^2 = 81$	اطرح 144 من الطرفين
$JE = \pm 9$	خذ الجذر التربيعي للطرفين

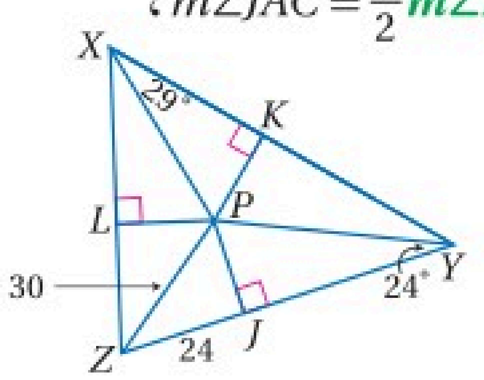
وبما أن الطول لا يمكن أن يكون سالبًا؛ إذن نأخذ الجذر التربيعي الموجب فقط.
وبما أن $JE = JF$ فإنّ $JF = 9$

b) $m\angle JAC$

بما أنّ $\overrightarrow{BJ}$ ينصّف $\angle CBE$ ، فإنّ $m\angle CBE = 2m\angle JBE$ ؛ إذن $m\angle CBE = 2(28°) = 56°$.
وبالمثل؛ $m\angle DCF = 2m\angle DCJ$ ؛ إذن $m\angle DCF = 2(25°) = 50°$.

$m\angle CBE + m\angle DCF + m\angle FAE = 180°$	نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث
$56° + 50° + m\angle FAE = 180°$	$m\angle CBE = 56°; m\angle DCF = 50°$
$106° + m\angle FAE = 180°$	بسّط.
$m\angle FAE = 74°$	اطرح °106 من الطرفين.

وبما أنّ $\overline{AJ}$ ينصّف $\angle FAE$، فإنّ $2m\angle JAC = m\angle FAE$. وهذا يعني أن $m\angle JAC = \frac{1}{2} m\angle FAE$ ،
إذن $m\angle JAC = \frac{1}{2}(74°) = 37°$.



✓ تحقق من فهمك

إذا كانت P مركز الدائرة الداخلية لـ$\triangle XYZ$، فأوجد القياسين الآتيين:

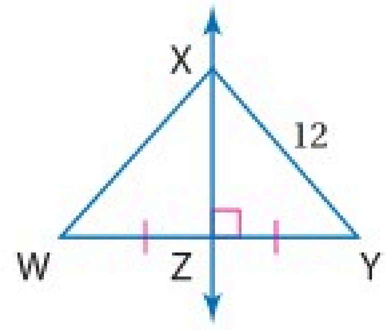
4A) PK

4B) $\angle LZP$

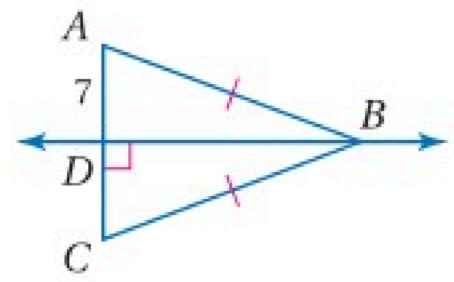
تأكـد

المثال 1 أوجد كلَّ قياسٍ مما يأتي:

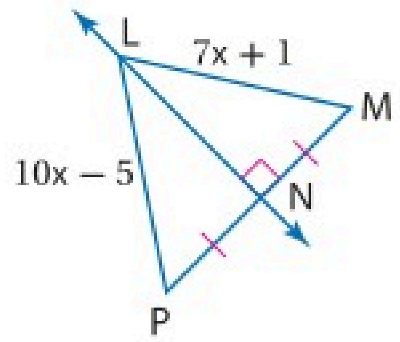
1) XW



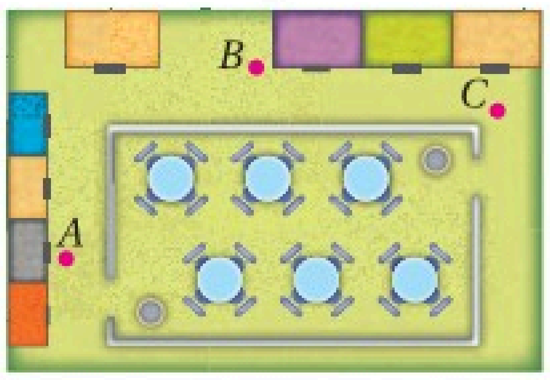
2) AC



3) LP

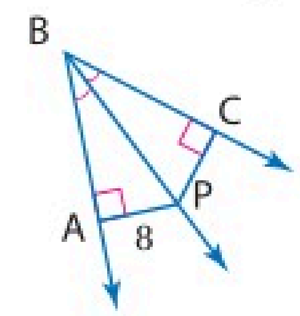


المثال 2 4) **إعلانات:** يقوم أربعة أصدقاء بتوزيع إعلانات على الناس في ساحة سوق تجاري. فحمل ثلاثة منهم ما يستطيعون من الإعلانات وأخذوا مواقعهم كما في الصورة المجاورة. أمّا الرابع فكان يزوِّدهم بالإعلانات. انسخ المواقع A, B, C في دفترك، ثم عيّن مكان الصديق الرابع D على أن يكون على أبعادٍ متساوية من أصدقائه الثلاثة.

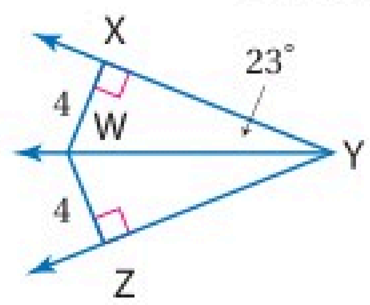


المثال 3 أوجد كلَّ قياسٍ مما يأتي :

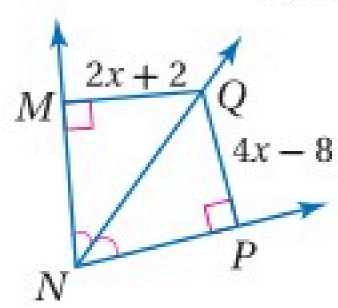
5) CP



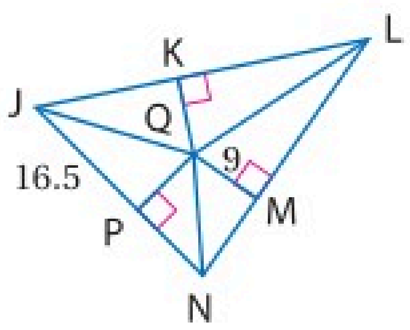
6) $\angle WYZ$



7) QM



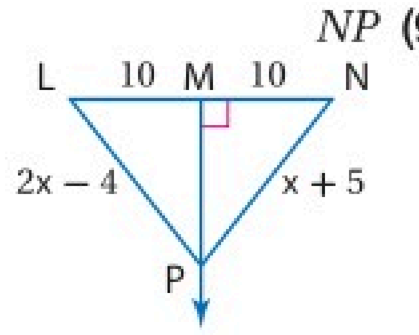
المثال 4 8) إذا كانت Q مركز الدائرة الداخلية لـ$\triangle JLN$ ، فأوجد طول $\overline{JQ}$.



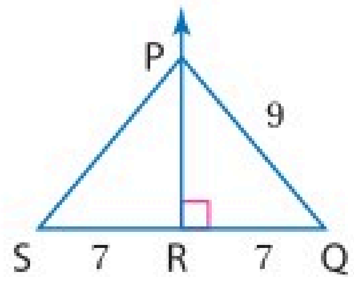
تدرب وحل المسائل

المثال 1 أوجد كلَّ قياسٍ مما يأتي :

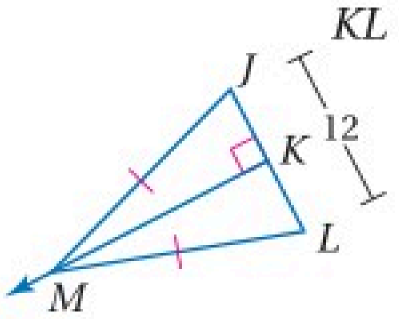
9) NP



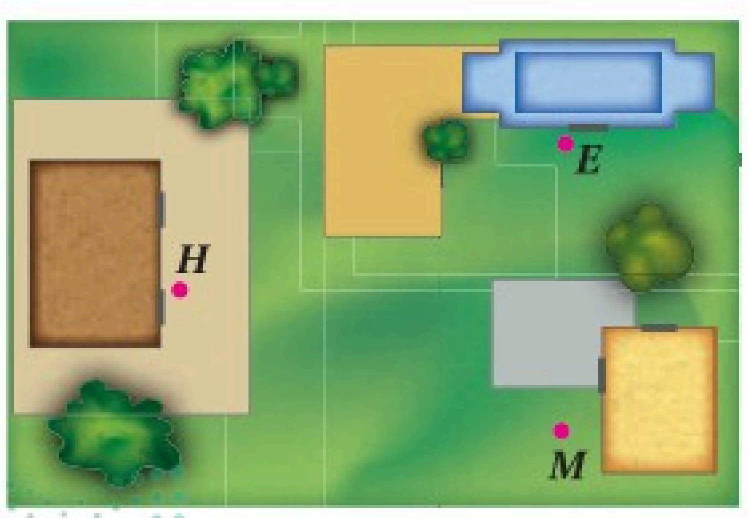
10) PS



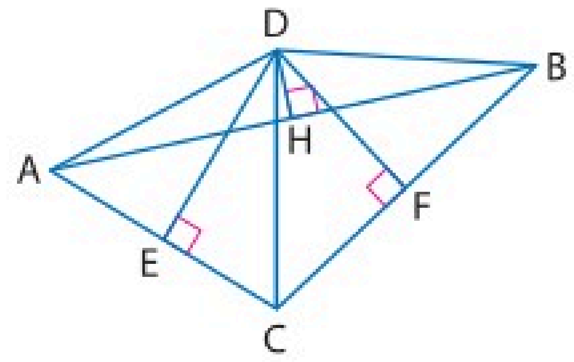
11) KL



المثال 2 12) **مدرسة:** يتكون مجمّع مدارس من مدرسة ابتدائية E ومدرسة متوسطة M ومدرسة ثانوية H في المواقع المبيّنة في الصورة المجاورة. انسخ مواقع النقاط E, M, H في دفترك، ثم عيّن موقع موقف الحافلات، على أن يكون على أبعاد متساوية من المدارس الثلاث.



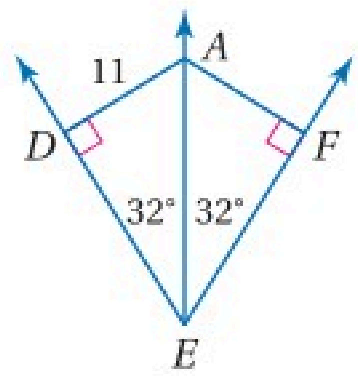
النقطة D مركز الدائرة التي تمرُّ برؤوس $\triangle ABC$. اكتب القطع المستقيمة التي تطابق القطعة المعطاة في كل سؤال مما يأتي:

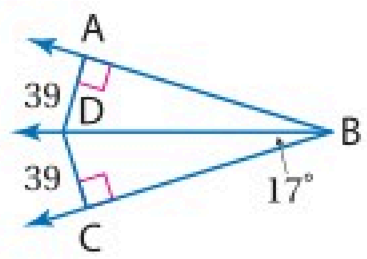


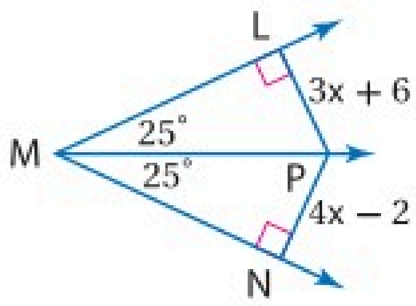
13) $\overline{AD}$ 14) $\overline{AH}$

المثال 3 أوجد قياس كلٍّ ممَّا يأتي :

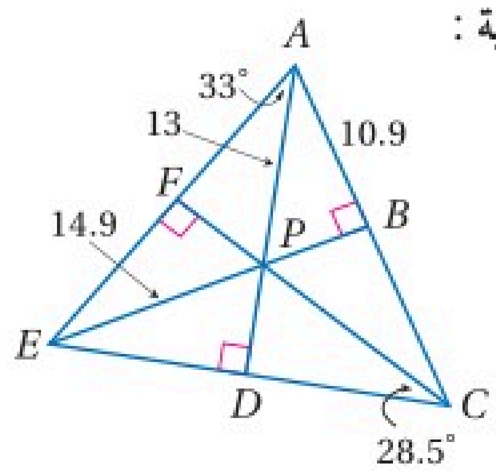
15) AF 16) $\angle DBA$ 17) PN







المثال 4 إذا كانت النقطة P مركز الدائرة الداخلية لِـ $\triangle AEC$ ، فأوجد كلًّا من القياسات الآتية :



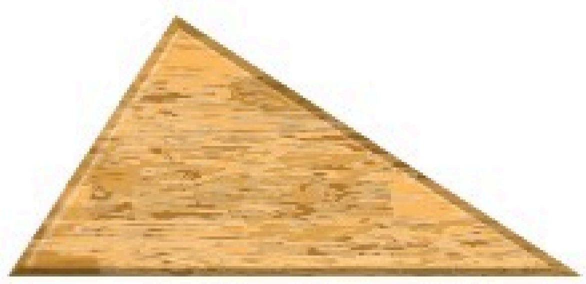
18) PB

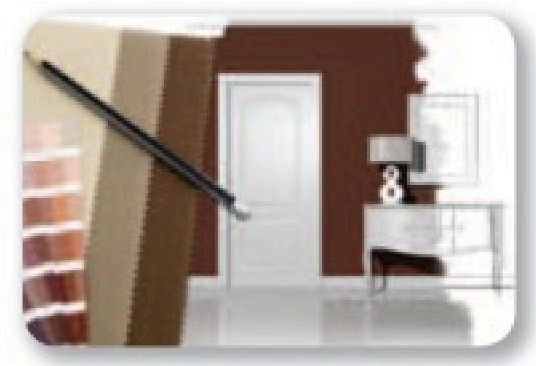
19) DE

20) $\angle DAC$

21) $\angle DEP$

22) **تصميم داخلي:** توضع زهرية فضيّة عند مركز سطح الطاولة المبينة في الشكل أدناه، بحيث تكون على أبعاد متساوية من حوافه. انسخ الرسم المجاور في دفترك، وبيّن أين ستضع الزهرية. وضح إجابتك.





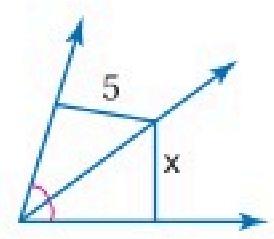
الربط مع الحياة

مهندس التصميم الداخلي

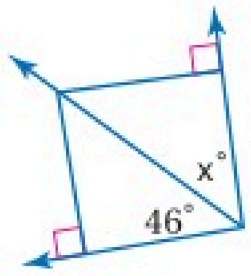
يزيِّن مهندس الديكور المكان؛ بحيث يجعله بهيج المنظر ومريحًا للإقامة أو العمل فيه. ويجب على مهندسي الديكور أن يكونوا على معرفة بالألوان وتصاميم الإنارة وتخطيط المكان.

حدّد ما إذا كانت المعطيات في كل شكل مما يأتي كافية لإيجاد قيمة x. وضِّح إجابتك.

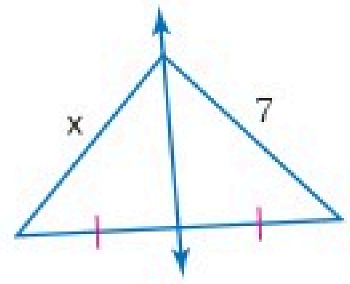
23)



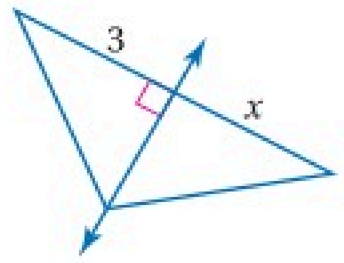
24)



25)



26)

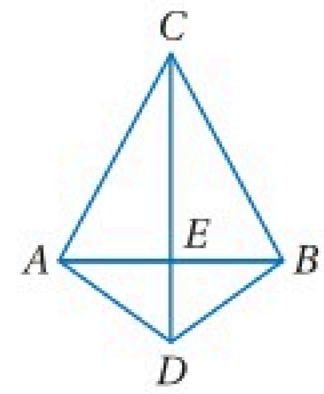


برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لكلٍّ من النظريتين الآتيتين:

27) النظرية 4.2

المعطيات: $\overline{CA} \cong \overline{CB}, \overline{AD} \cong \overline{BD}$

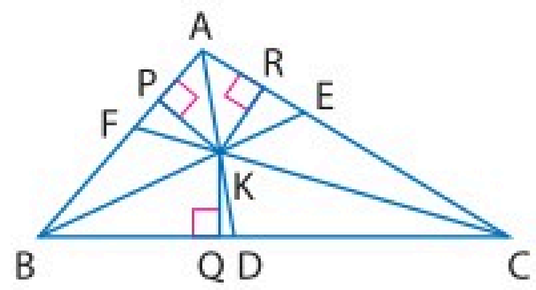
المطلوب: النقطتان C, D تقعان على العمود المنصّف لـ $\overline{AB}$



28) النظرية 4.6

المعطيات: $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ منصّفات لزوايا $\triangle ABC$،
$\overline{KP} \perp \overline{AB}$ ، $\overline{KQ} \perp \overline{BC}$
$\overline{KR} \perp \overline{AC}$

المطلوب: $KP = KQ = KR$



برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكلٍّ من النظريتين الآتيتين:

29) النظرية 4.1

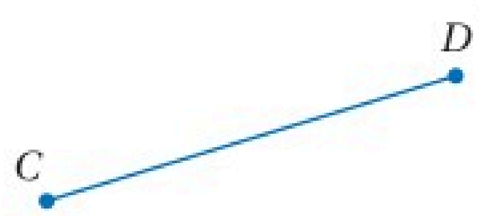
30) النظرية 4.5

31) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة العمود المنصِّف للقطعة المستقيمة التي إحداثيًا نقطتَي طرفَيها هما $A(-3, 1)$, $B(4, 3)$. ووضِّح إجابتك.

32) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 4.4.

33) **هندسة إحداثيّة:** أوجد إحداثيَّي مركز الدائرة الخارجية للمثلث الذي إحداثيات رؤوسه هي $A(0, 0), B(0, 6), C(10, 0)$. وضح إجابتك.

34) **المحل الهندسي:** انظر إلى القطعة المستقيمة $\overline{CD}$، وصِف مجموعة النقاط في الفضاء التي يبعد كلٌّ منها بُعدين متساويين عن C, D



مراجعة المفردات

المحل الهندسي
مجموعة من النقاط تحقق شرطًا معيّنًا.

مسائل مهارات التفكير العليا

35) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثًا، على أن يقع مركز الدائرة الداخلية له داخله، و يقع مركز الدائرة التي تمر برؤوسه خارجه. برّر صحّة رسمك باستعمال مسطرة غير مدرجة وفرجار لإيجاد نقطتَي التلاقي.

تبرير: حدّد ما إذا كانت كل عبارة من العبارتين الآتيتين صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا أو ليست صحيحة أبدًا. وبرّر إجابتك.

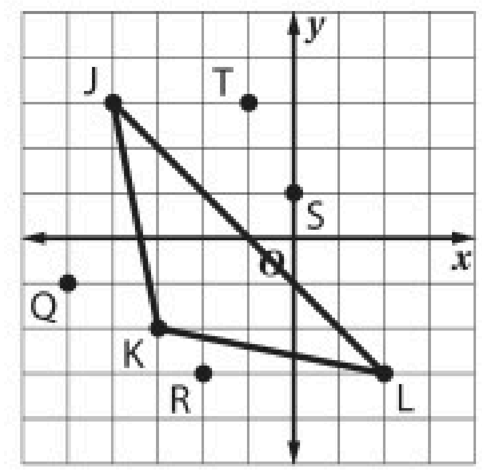
36) تتقاطع منصّفات زوايا المثلث عند نقطة تكون على أبعاد متساوية من رؤوسه.

37) في المثلث المتطابق الضلعين، يكون العمود المنصّف للقاعدة منصّفًا لزاوية الرأس المقابلة للقاعدة.

38) **اكتب:** قارن بين الأعمدة المنصّفة لأضلاع المثلث ومنصّفات زواياه مبيّنًا أوجه الشبه وأوجه الاختلاف. وقارن بين نقطتَي التلاقي.

تدريب على اختبار

39) بأيّ نقطتين يمر العمود المنصّف للضلع $\overline{JL}$ في $\triangle JKL$؟



A T, K

B L, Q

C J, R

D S, K

40) إذا كانت $x \neq -3$ ، فإن $\frac{3x+9}{x+3}$ يساوي:

A $x+9$

B $x+3$

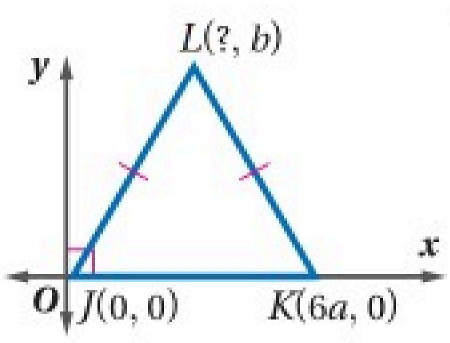
C x

D 3

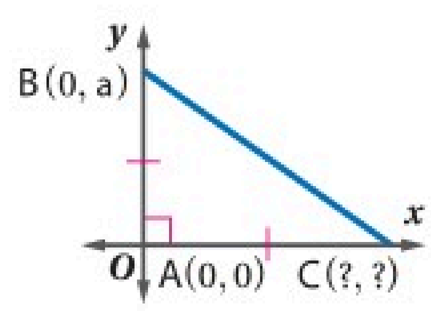
مراجعة تراكمية

عيّن الإحداثي المجهول في كلٍّ من المثلثات الآتية : (الدرس 7-3)

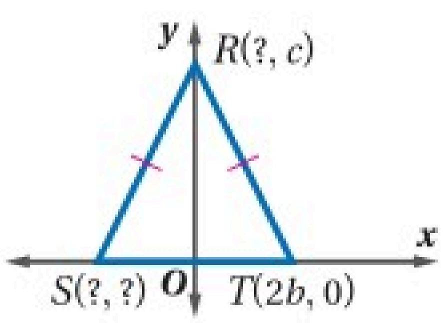
41)



42)



43)



أوجد البعد بين المستقيم والنقطة المعطاة في كلٍّ مما يأتي : (مهارة سابقة)

44) $y = 5, (-2, 4)$

45) $y = 2x + 2, (-1, -5)$

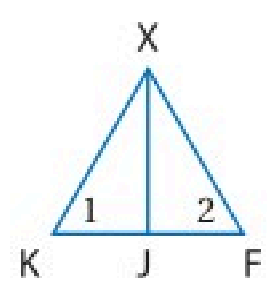
46) $2x - 3y = -9, (2, 0)$

استعد للدرس اللاحق

47) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين:

المعطيات: $\triangle XKF$ متطابق الأضلاع.
$\overline{XJ}$ تنصّف $\angle X$.

المطلوب: J نقطة منتصف $\overline{KF}$.



استكشاف

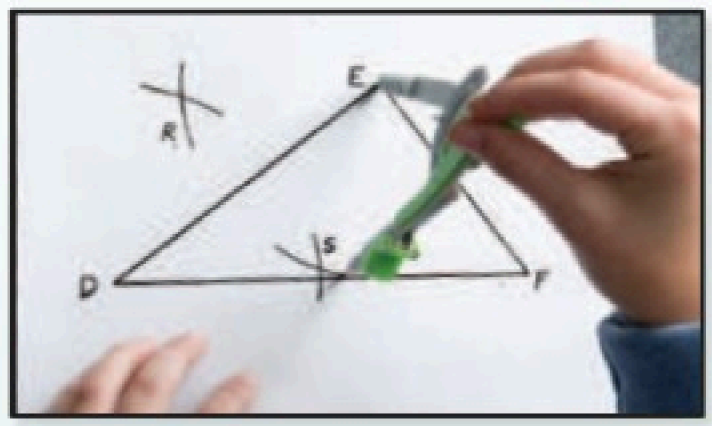
4-2 معمل الهندسة: إنشاء القطع المتوسطة والارتفاعات
Constructing Medians and Altitudes

القطعة المتوسطة في مثلث هي قطعة مستقيمة، طرفاها أحد رؤوس المثلث ونقطة منتصف الضلع المقابل لذلك الرأس.

ويمكنك استعمال طريقة تعيين نقطة المنتصف لقطعة مستقيمة لإنشاء قطعة متوسطة.

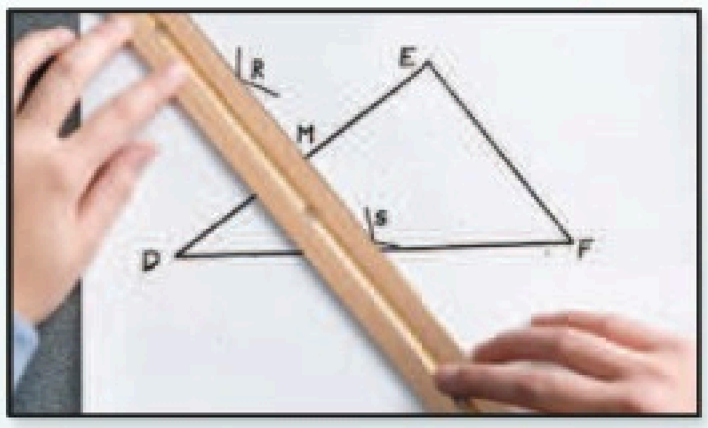
إنشاء هندسي 1
قطعة متوسطة لمثلث

الخطوة 1:



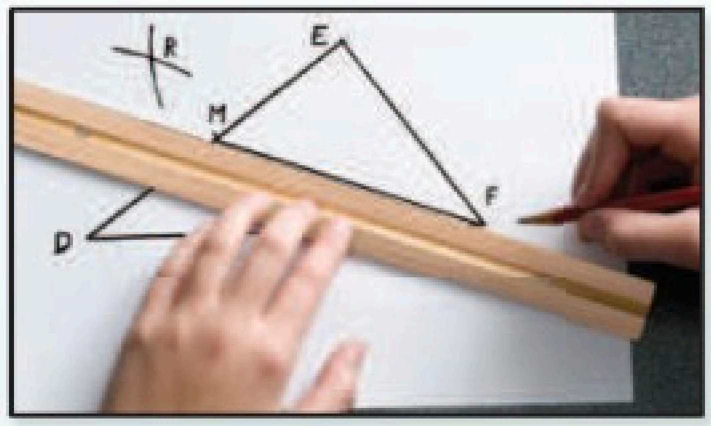
ثبت الفرجار عند الرأس D ثم عند الرأس E؛ لترسم أقواسًا متقاطعة فوق $\overline{DE}$ وتحتها، وسمّ نقطتَي التقاطع R, S .

الخطوة 2:



استعمل مسطرة لإيجاد نقطة تقاطع $\overline{RS}, \overline{DE}$، وسمّ نقطة المنتصف M.

الخطوة 3:

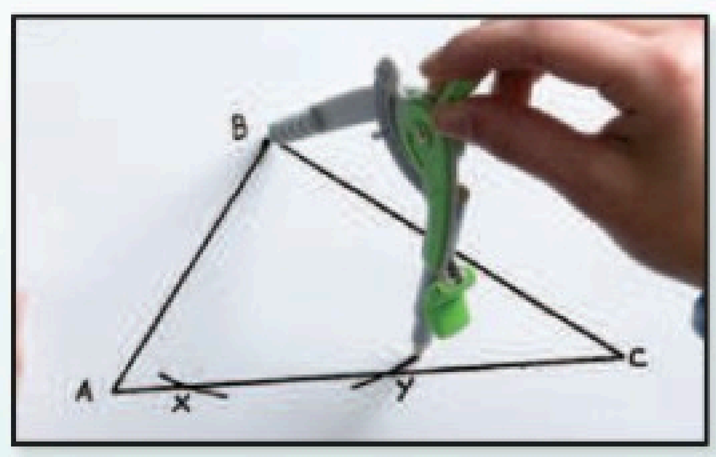


ارسم مستقيمًا يمّر بالنقطتين F, M ، فتكون $\overline{FM}$ قطعة متوسطة لِـ $\triangle DEF$.

ارتفاع المثلث هو قطعة مستقيمة من أحد رؤوس المثلث إلى المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل، وتكون عموديّةً عليه.

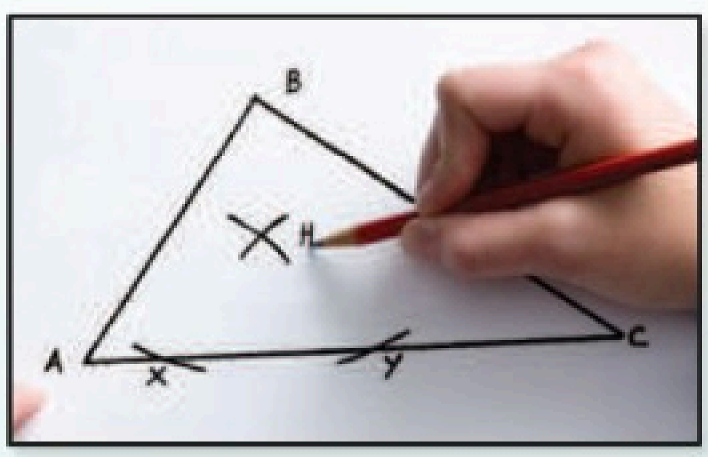
إنشاء هندسي 2
ارتفاع المثلث

الخطوة 1:



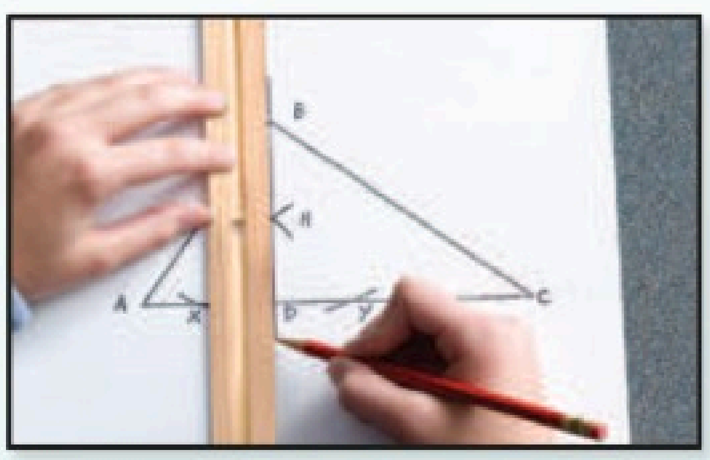
ثبّت الفرجار عند الرأس B ، وارسم قوسين يقطعان $\overline{AC}$ في النقطتين X, Y .

الخطوة 2:



عدّل فتحة الفرجار على أن تكون أكبر من $\frac{1}{2}XY$ وثبّته عند X ، وارسم قوسًا فوق $\overline{AC}$ ، ثم استعمل الفتحة نفسها وارسم قوسًا آخر من Y ، وسمّ نقطة تقاطع القوسين H .

الخطوة 3:



استعمل مسطرة غير مدرّجة لرسم $\overleftrightarrow{BH}$ ، وسمّ نقطة تقاطع $\overline{AC}$ ، $\overleftrightarrow{BH}$ بالحرف D ، فتكون $\overline{BD}$ ارتفاعًا لِـ $\triangle ABC$ وهي عموديّة على $\overline{AC}$.

التمثيل والتحليل:

1) أنشئ القطعتين المتوسطتين على الضلعين الآخرين في $\triangle DEF$، ماذا تلاحظ بالنسبة للقطع المتوسطة للمثلث؟

2) أنشئ الارتفاعين الآخرين على الضلعين الآخرين في $\triangle ABC$. ماذا تلاحظ؟

4-2 القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث
Medians and Altitudes of Triangle

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ الأعمدة المنصّفة ومنصفات الزوايا في المثلث واستعمالها.

والآن:

- أتعرّف القطع المتوسطة في المثلث وأستعملها.
- أتعرّف الارتفاعات في المثلث وأستعملها.

المفردات:

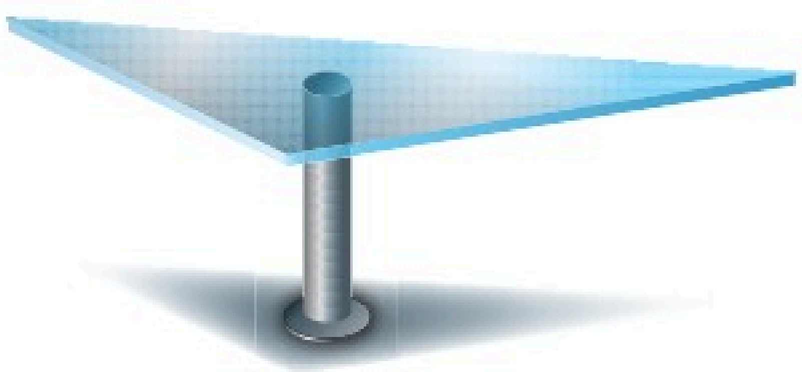
القطعة المتوسطة
median

مركز المثلث
centroid

الارتفاع
altitude

ملتقى ارتفاعات المثلث
orthocenter

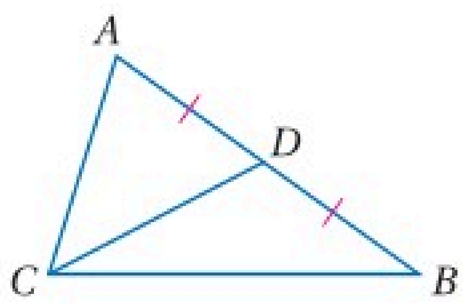
لماذا؟



صمّم مهندس طاولة خاصة لأحد الزبائن، يتكون سطحها من لوح زجاجي مثلث الشكل يرتكز على دعامة واحدة، ولتحقيق ذلك فهو في حاجة إلى إيجاد النقطة التي يضع عندها الدعامة لكي يحافظ على اتزانها، ويمكن إيجاد هذه النقطة برسم القطع المتوسطة، وتعيين نقطة تقاطعها.

القطع المتوسطة: **القطعة المتوسطة** لمثلث قطعة مستقيمة طرفاها أحد رؤوس المثلث ونقطة منتصف الضلع المقابل لذلك الرأس.

ولكل مثلث ثلاث قطع متوسطة تتلاقى في نقطة تُسمّى **مركز المثلث**، وتقع داخله دائمًا.



$\overline{CD}$ قطعة متوسطة في $\triangle ABC$.

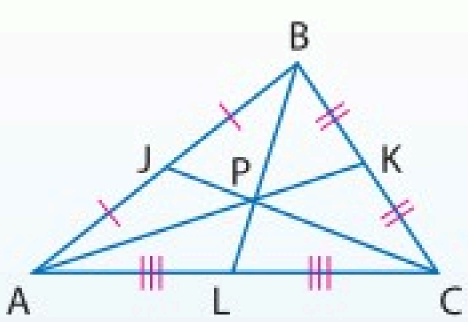
نظرية 4.7 نظرية مركز المثلث

أضف إلى مطويتك

يبعد مركز المثلث عن كل رأس من رؤوس المثلث ثُلُثَي طول القطعة المستقيمة الواصلة بين ذلك الرأس ومنتصف الضلع المقابل له.

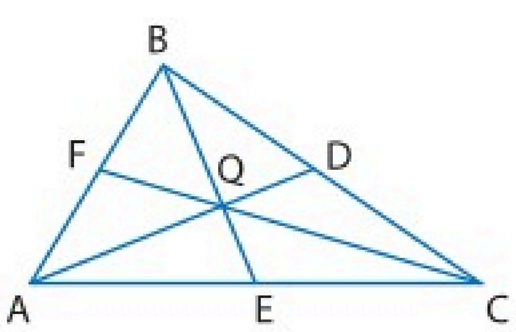
مثال: إذا كانت P مركز $\triangle ABC$ ، فإنّ

$$AP = \frac{2}{3}AK,\ BP = \frac{2}{3}BL,\ CP = \frac{2}{3}CJ$$



مثال 1 استعمال نظرية مركز المثلث

إذا كانت النقطة Q مركز $\triangle ABC$، $BE = 9$.
فأوجد كلًّا من QE , BQ .



$BQ = \frac{2}{3}\ BE$	نظرية مركز المثلث
$= \frac{2}{3}(9) = 6$	$BE = 9$
$BQ + QE = 9$	جمع أطوال القطع المستقيمة
$6 + QE = 9$	$BQ = 6$
$QE = 3$	اطرح 6 من الطرفين

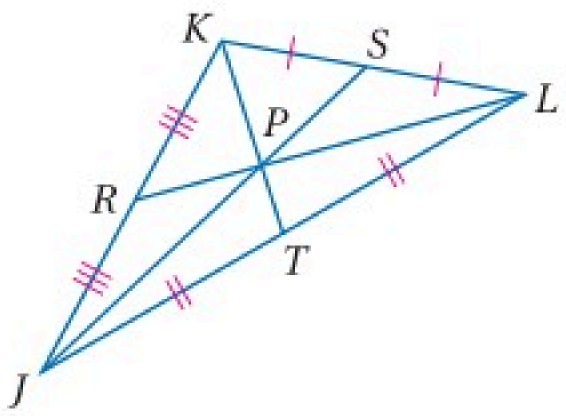
تحقق من فهمك

في $\triangle ABC$ أعلاه، إذا كان $FC = 15$ ، فأوجد طولَي القطعتين الآتيتين :

1A) FQ **1B)** QC

مثال 2 استعمال نظرية مركز المثلث

في $\triangle JKL$ ، إذا كان $PT = 2$ ، فأوجد KP.



بما أنّ $\overline{JR} \cong \overline{RK}$ ، فإن R نقطة منتصف $\overline{JK}$ ، وتكون $\overline{LR}$ قطعة متوسطة في $\triangle JKL$ ، وبالمثل نستنتج أن S, T هما نقطتا منتصفَي $\overline{KL}, \overline{LJ}$ على الترتيب؛ لذا فإن $\overline{JS}, \overline{KT}$ قطعتان متوسطتان في $\triangle JKL$ ، لذلك فالنقطة P هي مركز $\triangle JKL$.

$KP = \frac{2}{3}KT$	نظرية مركز المثلث
$KP = \frac{2}{3}(KP + PT)$	جمع القطع المستقيمة والتعويض
$KP = \frac{2}{3}(KP + 2)$	$PT = 2$
$KP = \frac{2}{3}KP + \frac{4}{3}$	خاصيّة التوزيع
$\frac{1}{3}KP = \frac{4}{3}$	اطرح $\frac{2}{3}KP$ من الطرفين
$KP = 4$	اضرب الطرفين في 3

تحقق من فهمك

في $\triangle JKL$ أعلاه، إذا كان $RP = 3.5$, $JP = 9$ ، فأوجد طولَي القطعتين الآتيتين:

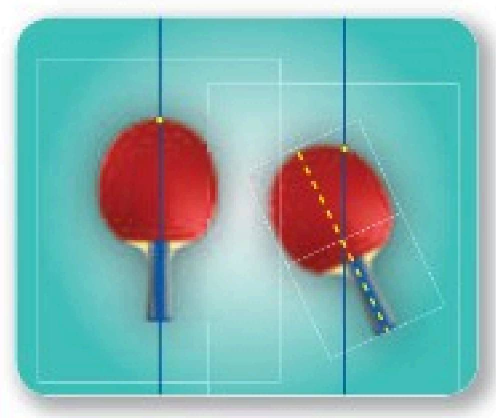
2A) PL **2B)** PS

إرشادات للدراسة

استعمال الحسّ العددي

في المثال 2 ، يمكنك أيضًا استعمال الحسّ العددي لإيجاد KP . بما أن $KP = \frac{2}{3}KT$ ، فإن $PT = \frac{1}{3}KT$ وكذلك $KP = 2PT$ ؛ لذا إذا كان $PT = 2$ فإن $KP = 2(2) = 4$.

جميع المضلعات لها نقطة اتزان، وهذه النقطة تعتبر مركز ثقل الجسم، وهي النقطة التي يظهر فيها الجسم متوازنًا تحت تأثير الجاذبية الأرضية.



الربط مع الحياة

نقطة الاتزان (التعليق)

يمكن أن تحدد نقطة الاتزان لأي جسم، سواءً أكان على شكل مثلث أو غيره كما يأتي:

علق الجسم من أي نقطة، وعندما يتوقف عن التأرجح. ارسم مستقيمًا رأسيًا من نقطة التعليق، ثم علقه مرة أخرى من نقطة ثانية وارسم مستقيمًا رأسيًا منها، فتكون نقطة تقاطع المستقيمين هي نقطة الاتزان.

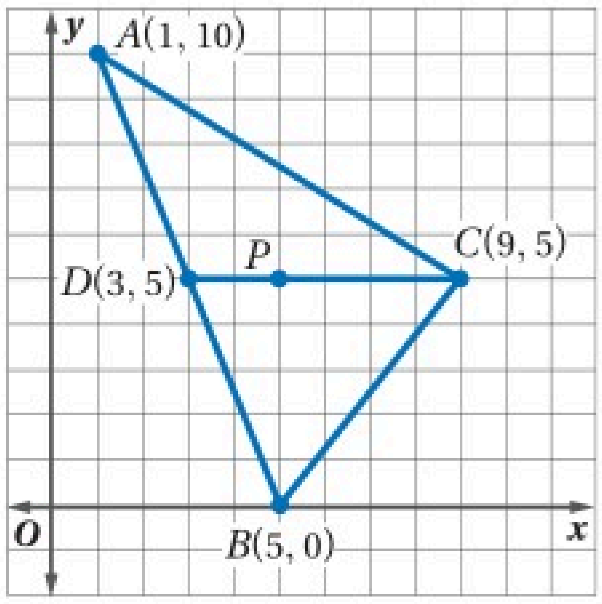
مثال 3 من واقع الحياة إيجاد المركز في المستوى الإحداثي

فن الأداء: في مهرجان رياضي يُخطط عبدالعزيز لاتزان قطع مثلثية من المعدن كما في الشكل المجاور، وعندما وُضع مثلث على مستوى إحداثي كانت رؤوسه عند النقاط $(9, 5)$, $(5, 0)$, $(1, 10)$.
ما إحداثيات النقطة التي يجب على عبدالعزيز أن يثبّت المثلث عندها حتى يحفظه متوازنًا؟ وضح إجابتك.

افهم: تحتاج إلى إيجاد مركز المثلث من خلال الإحداثيات المعطاة، وستكون هذه هي النقطة التي سيتزن عندها المثلث.

خطّط: ارسم المثلث الذي رؤوسه $A(1, 10)$, $B(5, 0)$, $C(9, 5)$، وبما أن مركز المثلث هو النقطة التي تتلاقَى عندها القطع المتوسطة للمثلث؛ إذن استعمل نظرية نقطة المنتصف لإيجاد نقطة منتصف أحد أضلاع المثلث، فيكون مركز المثلث واقعًا على القطعة المتوسطة وعلى بُعدٍ من الرأس يساوي ثُلُثَي طول القطعة المتوسطة.

حل: مثّل $\triangle ABC$ بيانيًّا .



أوجد نقطة المنتصف D للضلع $\overline{AB}$ الذي طرفاه $A(1, 10)$, $B(5, 0)$.

$$D\left(\frac{1+5}{2}, \frac{10+0}{2}\right) = D(3, 5)$$

عيّن النقطة D ، ولاحظ أن $\overline{DC}$ أفقيّة، والمسافة من $D(3, 5)$ إلى $C(9, 5)$ تساوي $9 - 3$ ، أيْ 6 وحداتٍ.

فإذا كانت P مركز $\triangle ABC$ ، فإنّ $PC = \frac{2}{3}DC$ ؛ ولذا يقع المركز على بُعد $\frac{2}{3}(6)$ ، أو 4 وحدات إلى اليسار من C، وتكون إحداثيات P هي $(9 - 4, 5)$ أو $(5, 5)$.

إذن يتوازن المثلث عند النقطة $(5, 5)$.

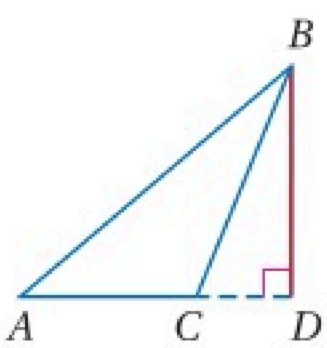
تحقق: استعمل قطعة متوسطة أخرى للتحقق من صحّة إجابتك. بما أنّ نقطة منتصف الضلع $\overline{AC}$ هي $F\left(\frac{1+9}{2}, \frac{10+5}{2}\right)$ أو $F(5, 7.5)$ ، وأن $\overline{BF}$ رأسيّة فإن المسافة من B إلى F تساوي $7.5 - 0$ ؛ أيْ 7.5 وحداتٍ، وعلى ذلك يكون $\overline{PB}$ يساوي $\frac{2}{3}(7.5)$ أيْ 5 ، إذن P تقع على بعد 5 وحداتٍ إلى أعلى من B.

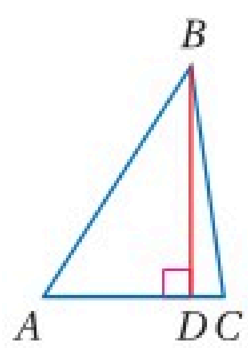
وتكون إحداثيات P هي $(5, 0+5)$ أي $(5, 5)$. ✓

تحقق من فهمك

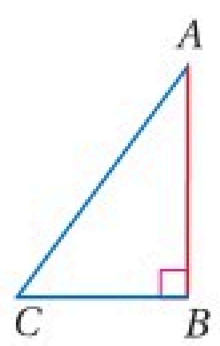
3) تقع رؤوس مثلث آخر عند النقاط $(0, 4)$, $(6, 11.5)$, $(12, 1)$، فما إحداثيات النقطة التي يتزن عندها هذا المثلث؟ وضّح إجابتك.

ارتفاعات المثلث: **ارتفاع المثلث** هو القطعة المستقيمة العمودية النازلة من أحد الرؤوس إلى المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل لذلك الرأس، ويمكن أن يقع الارتفاع داخل المثلث أو خارجه أو على أحد أضلاعه.





$\overline{BD}$ هو الارتفاع من B إلى $\overline{AC}$.



$\overline{AB}$ هو الارتفاع إلى $\overline{CB}$.

قراءة الرياضيات

ارتفاع المثلث

يطلق اسم الارتفاع على القطعة وعلى طولها، ويفهم المقصود من سياق المسألة. ويستعمل الارتفاع لحساب مساحة المثلث.

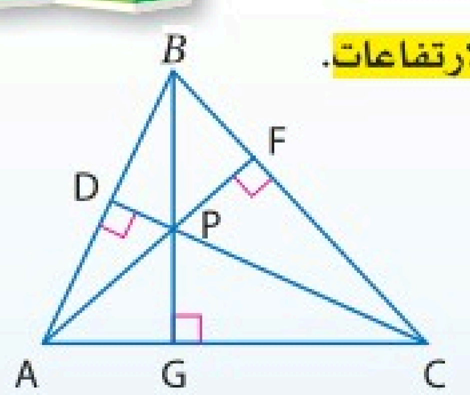
ولكل مثلث ثلاثة ارتفاعات، تتلاقَى المستقيمات التي تحويها في نقطة مشتركة.

مفهوم أساسي — ملتقى الارتفاعات

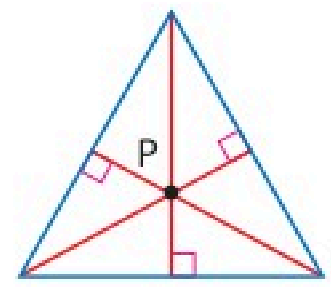
أضف إلى مطويتك

تتقاطع المستقيمات التي تحوي ارتفاعات أيِّ مثلث في نقطة تُسمّى **ملتقى الارتفاعات**.

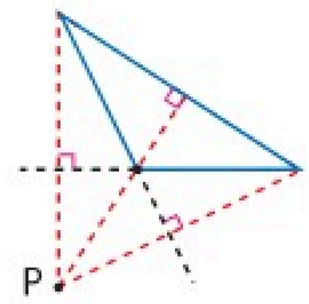
مثال: تتقاطع المستقيمات التي تحوي الارتفاعات $\overline{AF}, \overline{CD}, \overline{BG}$ عند النقطة P ، وهي ملتقى الارتفاعات للمثلث ABC .



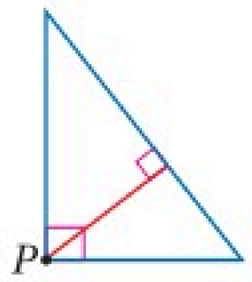
يمكن أن تلتقي الارتفاعات في مثلث داخله أو خارجه أو على أحد أضلاعه.



مثلث حاد الزوايا



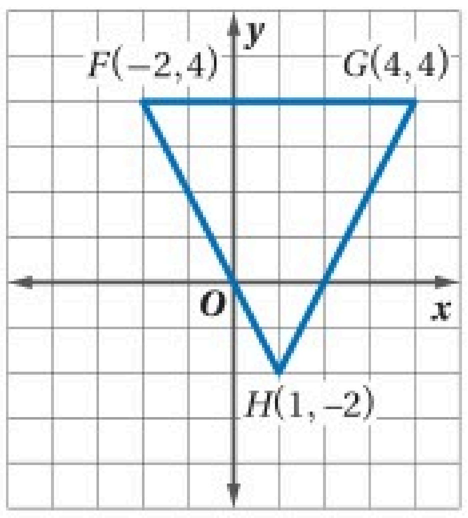
مثلث منفرج الزاوية



مثلث قائم الزاوية

مثال 4 إيجاد ملتقى الارتفاعات في المستوى الإحداثي

هندسة إحداثيّة: إذا كانت رؤوس $\triangle FGH$ هي $F(-2, 4)$, $G(4, 4)$, $H(1, -2)$، فأوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعاته.



الخطوة 1: مثّل $\triangle FGH$ بيانيًّا. ولإيجاد ملتقى الارتفاعات، أوجد نقطة تقاطع ارتفاعين من الارتفاعات الثلاثة.

الخطوة 2: أوجد معادلة الارتفاع من F إلى $\overline{GH}$

بما أن ميل $\overline{GH}$ يساوي $2= \frac{4-(-2)}{4-1}$

فإنّ ميل الارتفاع العمودي على $\overline{GH}$ يساوي $-\frac{1}{2}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة النقطة والميل

$y - 4 = -\frac{1}{2}[x - (-2)]$ $\quad (x_1, y_1) = F(-2, 4)$, $m = -\frac{1}{2}$

$y - 4 = -\frac{1}{2}(x + 2)$ بسّط

$y - 4 = -\frac{1}{2}x - 1$ خاصية التوزيع

$y = -\frac{1}{2}x + 3$ اجمع 4 إلى الطرفين

ثم أوجد معادلة الارتفاع من G إلى $\overline{FH}$.

بما أن ميل $\overline{FH}$ يساوي $-2 = \frac{-2-4}{1-(-2)}$، فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{FH}$ يساوي $\frac{1}{2}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة النقطة والميل

$y - 4 = \frac{1}{2}(x - 4)$ $\quad (x_1, y_1) = G(4, 4)$, $m = \frac{1}{2}$

$y - 4 = \frac{1}{2}x - 2$ خاصية التوزيع

$y = \frac{1}{2}x + 2$ اجمع 4 إلى الطرفين

الخطوة 3: حل نظام المعادلتين الناتج $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$ لإيجاد نقطة تقاطع الارتفاعات.

اجمع المعادلتين لتحذف x، فينتج أن $2y = 5$، ومن ثم فإن $y = \frac{5}{2}$

$y = \frac{1}{2}x + 2$ معادلة الارتفاع من G

$\frac{5}{2} = \frac{1}{2}x + 2$ $\quad y = \frac{5}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}x$ اطرح $\frac{4}{2}$، أو 2 من الطرفين

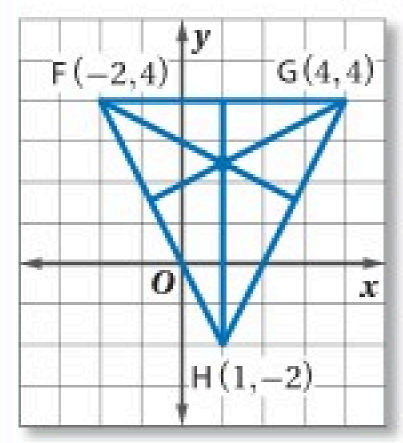
$1 = x$ اضرب الطرفين في 2

إذن إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle FGH$ هي $\left(1, \frac{5}{2}\right)$ أو $\left(1, 2\frac{1}{2}\right)$

إرشادات للدراسة

التحقق من المعقولية

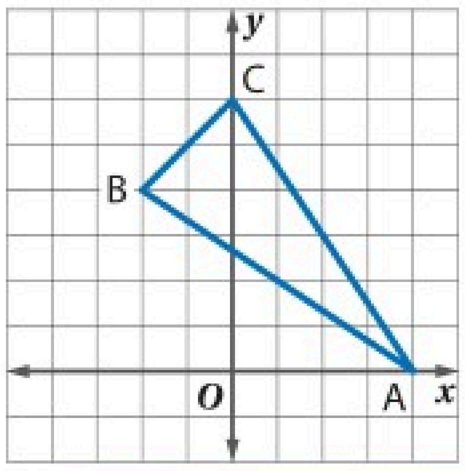
استعمل ركن ورقة لرسم ارتفاعات المثلث.



نقطة التقاطع تقع تقريبًا عند $\left(1, 2\frac{1}{2}\right)$؛ لذا فالجواب معقول.

تحقق من فهمك

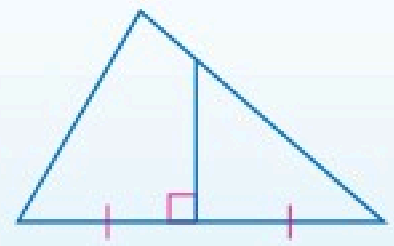
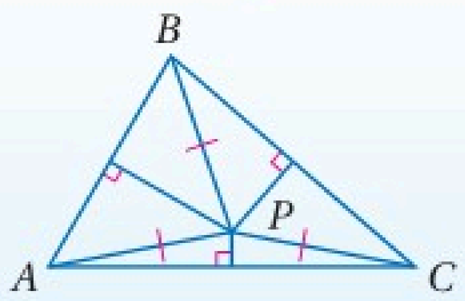
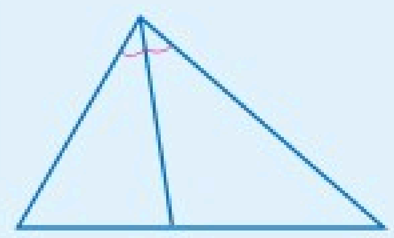
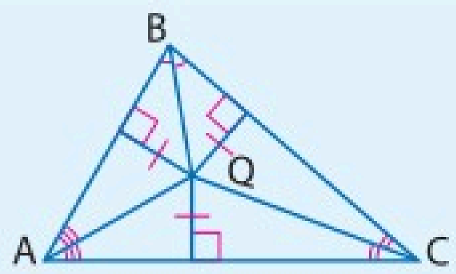
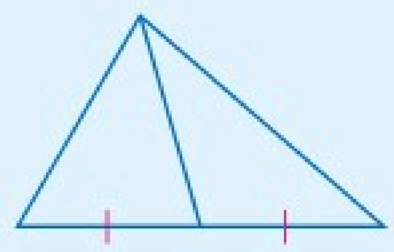
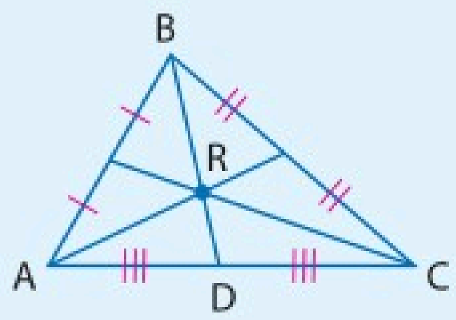
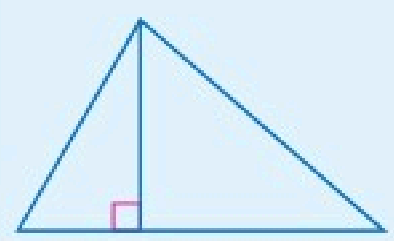
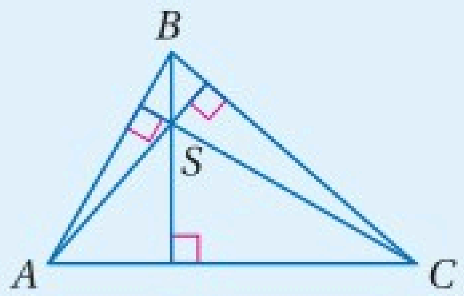
4) أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle ABC$ في الشكل المجاور.



ملخص المفاهيم

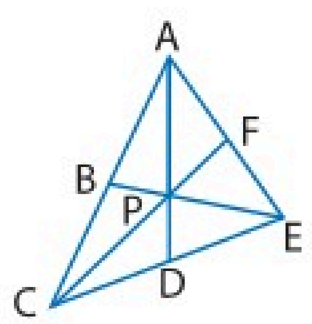
أضف إلى مطويتك

قطع مستقيمة ونقاط خاصّة في المثلث

المفهوم	مثال	نقطة التلاقي	الخاصّية	مثال
العمود المنصّف		مركز الدائرة الخارجية للمثلث	P مركز الدائرة الخارجية لـ $\triangle ABC$ ، وتقع على أبعاد متساوية من رؤوس المثلث.	
منصّف الزاوية		مركز الدائرة الداخلية للمثلث	Q مركز الدائرة الداخلية في $\triangle ABC$ ، وتقع على أبعاد متساوية من أضلاع المثلث.	
القطعة المتوسطة		مركز المثلث	R مركز $\triangle ABC$ ،وتبعد عن كل رأس ثُلُثَي طول القطعة الواصلة بين ذلك الرأس ومنتصف الضلع المقابل له.	
الارتفاع		ملتقى الارتفاعات	تلتقي المستقيمات التي تحوي ارتفاعات $\triangle ABC$ عند النقطة S ، وتسمى ملتقى الارتفاعات.	

تأكد

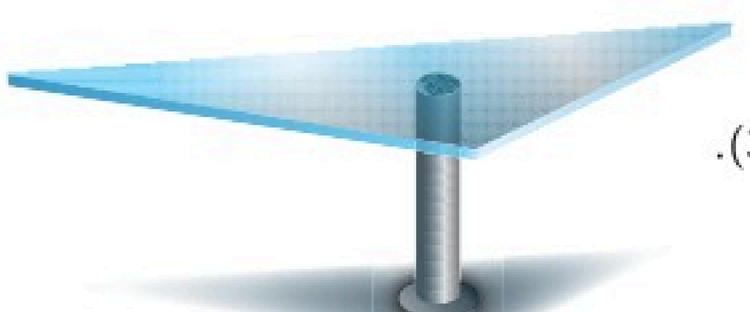
المثالان 1, 2 إذا كانت النقطة P مركز $\triangle ACE$ ، $PF = 6, AD = 15$.
فأوجد كلّ طول مما يأتي:



1) PC

2) AP

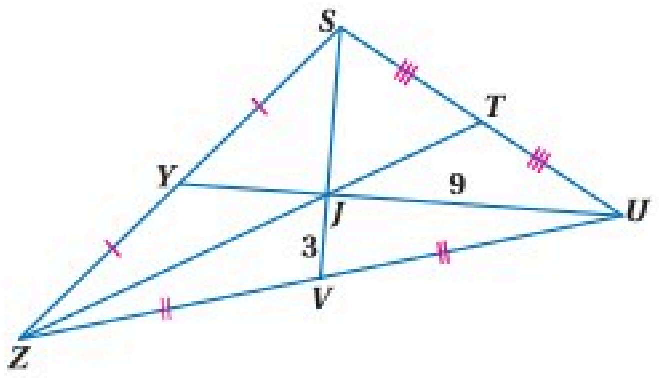
المثال 3 3) **تصميم داخلي:** بالعودة إلى فقرة "لماذا؟"، إذا كانت إحداثيات رؤوس المثلث عند النقاط $(3, 6), (5, 2), (7, 10)$.
فعند أيّ نقطة ستوضع الدعامة؟



المثال 4 4) **هندسة إحداثيّة:** أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle ABC$ الذي رؤوسه:
$A(-3, 3), B(-1, 7), C(3, 3)$

تدرب وحل المسائل

المثالان 1, 2 في $\triangle SZU$ ، إذا كان $ZT = 18$ ، فأوجد كلّ طول مما يأتي:



5) YJ

6) SJ

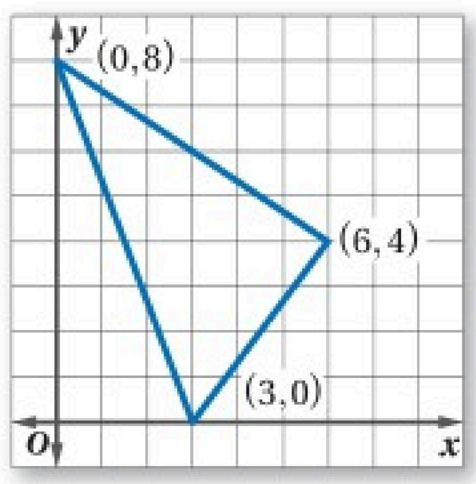
7) YU

8) SV

9) JT

10) ZJ

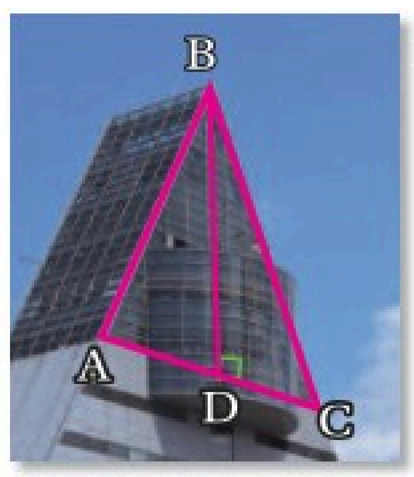
المثال 3 **11) تصميم داخلي:** صنعت كوثر لوحةً مثلثة الشكل كما في الشكل أدناه لتضع عليها صور معالم مشهورة. وأرادت أن تعلقها في سقف حجرتها على أن تكون موازية له. فعند أي نقطة يجب أن تُثبّت الخيط؟



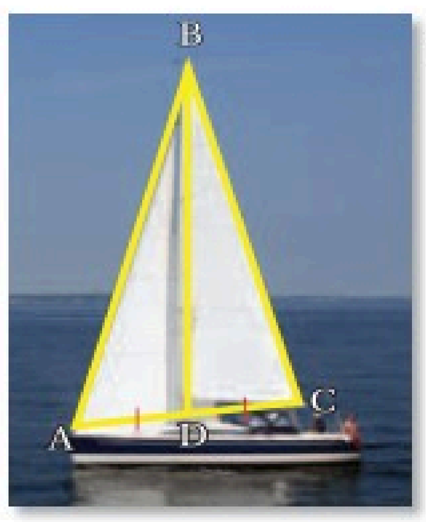
المثال 4 **12) هندسة إحداثية:** أوجد إحداثيات ملتقى الارتفاعات للمثلث الذي رؤوسه:
$J(3, -2), K(5, 6), L(9, -2)$

صنّف $\overline{BD}$ في كلٍّ من الأسئلة الآتية إلى ارتفاع، أو قطعة متوسطة، أو عمود منصّف:

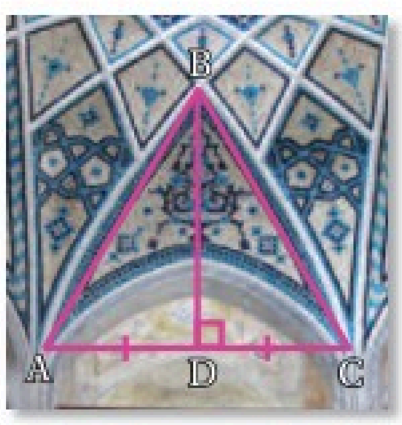
13



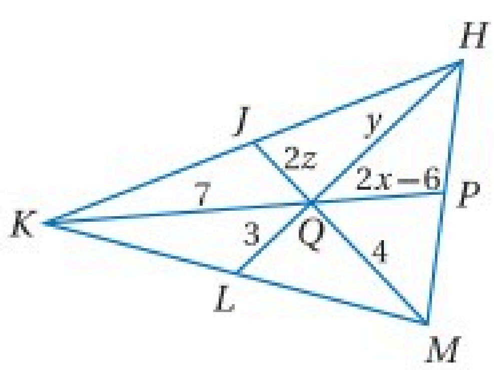
14



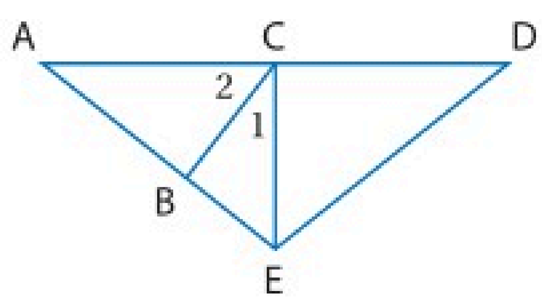
15



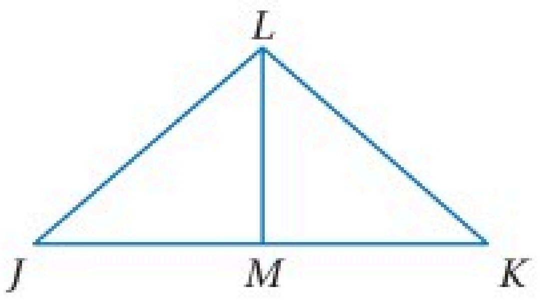
16) جبر: في الشكل المجاور، إذا كانت J, P, L نقاط منتصفات $\overline{KH}$, $\overline{HM}$, $\overline{MK}$ على الترتيب، فأوجد قيمة كلٍّ من x, y, z .



17) جبر: في الشكل المجاور، إذا كانت $\overline{EC}$ ارتفاعًا لـ $\triangle AED$، $m\angle 1 = (2x + 7)^\circ$, $m\angle 2 = (3x + 13)^\circ$ ، فأوجد كلًّا من $m\angle 1 , m\angle 2$.



في الشكل المجاور، حدّد ما إذا كانت $\overline{LM}$ عمودًا منصّفًا، أو قطعة متوسطة ، أو ارتفاعًا لِـ $\triangle JKL$ في كل حالة مما يأتي:



18) $\overline{LM} \perp \overline{JK}$

19) $\triangle JLM \cong \triangle KLM$

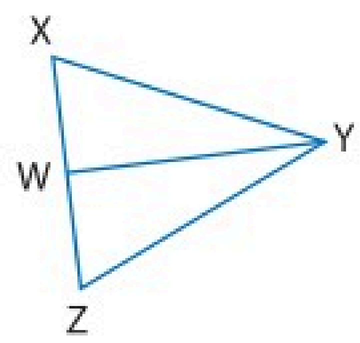
20) $\overline{JM} \cong \overline{KM}$

21) $\overline{LM} \perp \overline{JK}\ ,\ \overline{JL} \cong \overline{KL}$

22) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا.

المعطيات: $\triangle XYZ$ متطابق الضلعين، فيه $\overline{XY} \cong \overline{ZY}$ ، $\angle Y$ تنصّف $\overline{WY}$

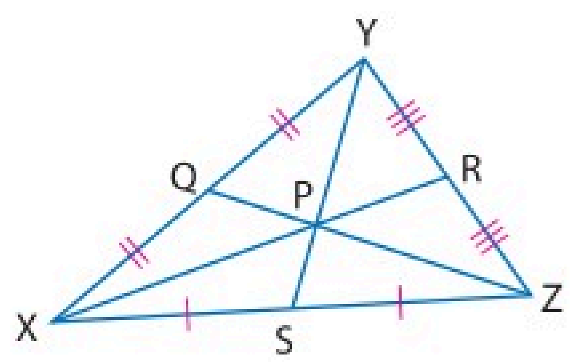
المطلوب: $\overline{WY}$ قطعة متوسطة.



23) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{XR}, \overline{YS}, \overline{ZQ}$ قطع متوسطة لِـ $\triangle XYZ$

المطلوب: $\frac{XP}{PR} = 2$



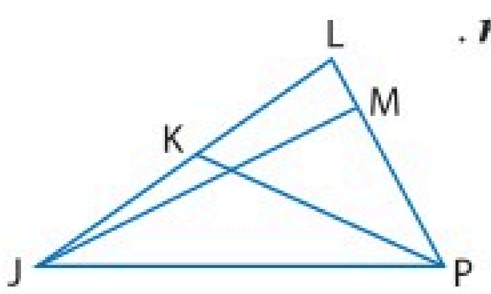
24) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، ستكتشف مواقع نقاط التلاقي لأي مثلث متطابق الأضلاع.

a) **عمليًّا:** أنشئ ثلاثة مثلثات متطابقة الأضلاع ومختلفةً بعضها عن بعضٍ على ورق سهل الطي، ثم قصّها. واطوِ كل مثلث لتحدّد موقع مركز الدائرة الخارجية للمثلث، ومركز الدائرة الداخلية للمثلث، ومركز المثلث، وملتقى الارتفاعات.

b) **لفظيًّا:** خمّن العلاقات بين نقاط التلاقي الأربع لأي مثلث متطابق الأضلاع.

c) **بيانيًّا:** ارسم مثلثًا متطابق الأضلاع في مستوى إحداثي، وعيّن مركز الدائرة الخارجية للمثلث، ومركز الدائرة الداخلية ، ومركز المثلث، وملتقى الارتفاعات. وحدّد إحداثيات كل نقطةٍ منها.

جبر: في $\triangle JLP$ ، $m\angle JMP = (3x - 6)^\circ\ , JK = 3y - 2\ , LK = 5y - 8$.



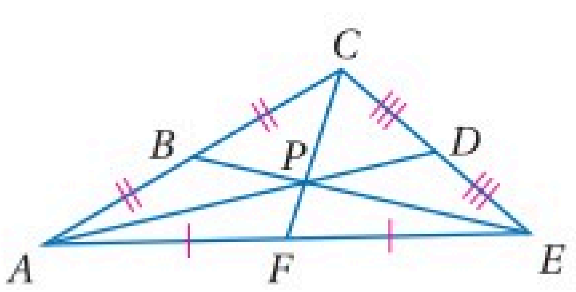
25) إذا كانت $\overline{JM}$ ارتفاعًا لِـ $\triangle JLP$ ، فأوجد x .

26) إذا كانت $\overline{PK}$ قطعة متوسطة، فأوجد LK .

مسائل مهارات التفكير العليا

27) **اكتشف الخطأ:** قال صفوان: إن $\frac{2}{3}AP = AD$ في الشكل المجاور.

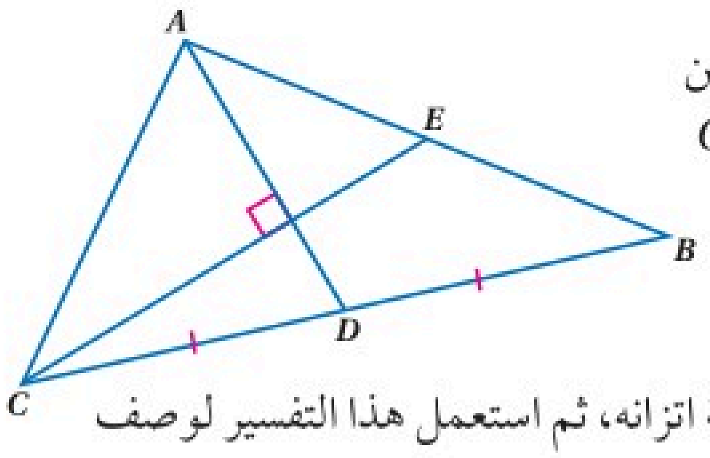
ولكن عبد الكريم لم يوافقه في ذلك، فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ وضّح إجابتك.



28) **تبرير:** هل العبارة التالية صحيحة أم خطأ؟ وضح إجابتك إذا كانت صحيحة، وإلا فأعطِ مثالًا مضادًّا.

"ملتقى ارتفاعات المثلث القائم الزاوية تقع عند رأس الزاوية القائمة".

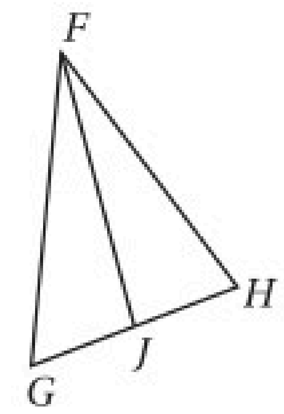
29) تحدَّ: في الشكل المجاور، إذا كانت $\overline{AD}$, $\overline{CE}$ قطعتين متوسطتين في $\triangle ACB$ ، وكانت $CE = 9$, $AB = 10$, $\overline{AD} \perp \overline{CE}$ ، فأوجد CA



30) اكتب: استعمل المساحة لتفسر لماذا يكون مركز المثلث هو نقطة اتزانه، ثم استعمل هذا التفسير لوصف موقع نقطة اتزان المستطيل.

تدريب على اختبار

31) في الشكل المجاور، إذا كان $\overline{GJ} \cong \overline{HJ}$ ، فأي عبارة مما يأتي صحيحة؟



A $\overline{FJ}$ ارتفاع لـ $\triangle FGH$

B $\overline{FJ}$ منصّف زاوية في $\triangle FGH$

C $\overline{FJ}$ قطعة متوسطة في $\triangle FGH$

D $\overline{FJ}$ عمود منصّف في $\triangle FGH$

32) ما المقطع x للمستقيم $4x - 6y = 12$ ؟

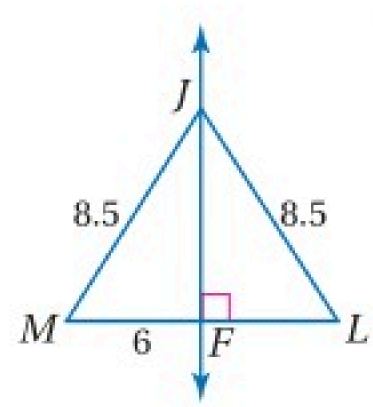
A 3 **C** -3

B 2 **D** -2

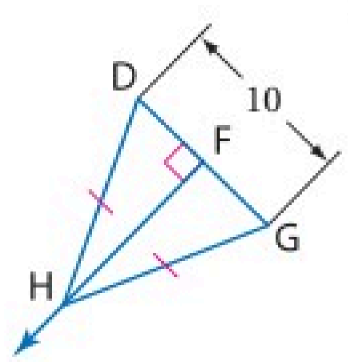
مراجعة تراكمية

أوجد كلَّ قياس ممّا يأتي : **(الدرس 4-1)**

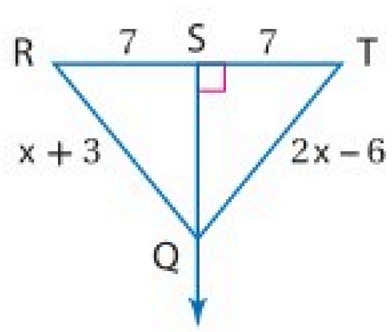
33) LM



34) DF



35) TQ



36) ارسم المثلث المتطابق الضلعين QRT في المستوى الإحداثي الذي طول قاعدته $\overline{QR}$ يساوي b وحدة، وحدِّد إحداثيات رؤوسه. **(الدرس 3-7)**

37) بيّن ما إذا كان $\overleftrightarrow{JK}$, $\overleftrightarrow{RS}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك، حيث $R(1, 1), S(9, 8), J(-6, 1), K(2, 8)$ ، وارسم كل مستقيم لتتحقق من إجابتك. **(مهارة سابقة)**

استعد للدرس اللاحق

اكتب < أو > داخل ◯ لتحصل على عبارة صحيحة.

38) $\frac{19}{27} \bigcirc -\frac{18}{25}$

39) $\frac{5}{16} \bigcirc \frac{3}{8}$

40) $\frac{3}{5} \bigcirc 2.7$

41) $-\frac{19}{4} \bigcirc -4.25$

4-3

المتباينات في المثلث
Inequalities in One Triangle

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

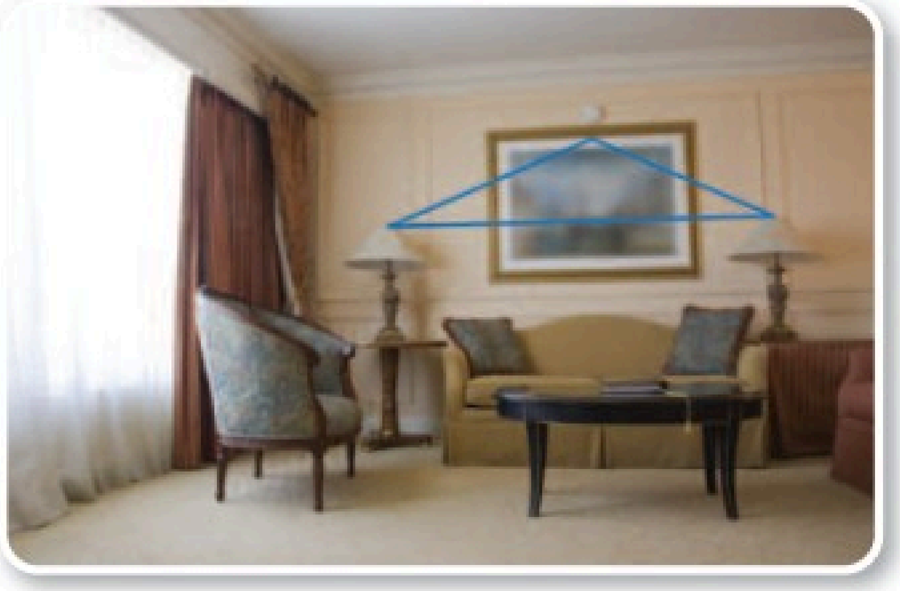
فيما سبق:

درستُ العلاقة بين قياسات زوايا المثلث.

والآن:

- أتعرف خصائص المتباينات، وأطبّقها على قياسات زوايا المثلث.
- أطبّق خصائص المتباينات على العلاقة بين زوايا مثلث وأضلاعه.

لماذا؟



يستعمل المصمِّمون طريقة تُسمىّ التثليث؛ لإعطاء الغرفة مظهرًا يُوحي بالاتساع، ومن الأمثلة على هذه الطريقة وضع طاولة صغيرة عند كل طرف من طرفَي أريكة مع وضع لوحة فوقها. على أن يكون قياس كل زاوية من زاويتَي قاعدة المثلث أقل من قياس الزاوية الثالثة.

متباينات الزوايا: تعلمت في الجبر المتباينة بوصفها علاقة بين عددين حقيقيين، وتُستعمل هذه العلاقة عادة في البراهين.

مفهوم أساسي — تعريف المتباينة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي	لأي عددين حقيقيين مثل a, b يكون $a > b$، إذا وفقط إذا وُجِدَ عدد حقيقي موجب c على أن يكون $a = b + c$
مثال	إذا كان $5 = 2 + 3$ ، فإنّ $5 > 2$

وفي الجدول أدناه قائمة ببعض خصائص المتباينات التي درستها.

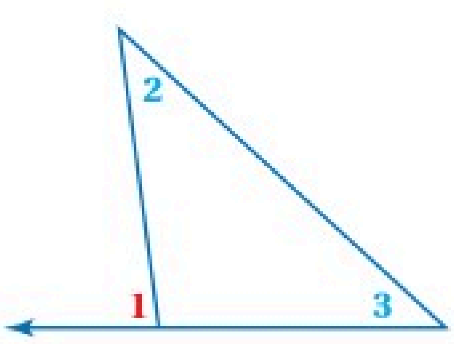
مفهوم أساسي — خصائص المتباينة على الأعداد الحقيقية

أضف إلى مطويتك

الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاثة أعداد حقيقية a , b , c

خاصيّة المقارنة	$a < b$ أو $a = b$ أو $a > b$.
خاصيّة التعدّي	1) إذا كان $a < b, b < c$ ، فإن $a < c$. 2) إذا كان $a > b, b > c$ ، فإن $a > c$.
خاصية الجمع	1) إذا كان $a > b$ ، فإن $a + c > b + c$. 2) إذا كان $a < b$ ، فإن $a + c < b + c$.
خاصيّة الطرح	1) إذا كان $a > b$ ، فإن $a - c > b - c$. 2) إذا كان $a < b$ ، فإن $a - c < b - c$.

يمكن أن يطبق تعريف المتباينة وخصائصها على قياسات الزوايا وأطوال القطع المستقيمة؛ لأنها أعداد حقيقية.



تأمّل $\angle 3, \angle 2, \angle 1$ في الشكل المجاور.

من نظرية الزاوية الخارجيّة، تعلم أنّ $m\angle 1 = m\angle 2 + m\angle 3$

وبما أنّ قياسات الزوايا أعداد موجبة، إذن نستنتج أن:

$m\angle 1 > m\angle 3$ وَ $m\angle 1 > m\angle 2$

وهذه النتيجة تقود إلى النظرية الآتية:

مراجعة المفردات

الزاويتان الداخليتان البعيدتان
لكل زاوية خارجيّة لمثلث زاويتان داخليتان بعيدتان وهما الزاويتان غير المجاورتين لها.

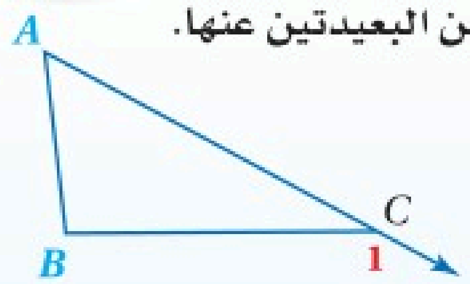
نظرية 4.8 متباينة الزاوية الخارجيّة

أضف إلى مطويتك

قياس الزاوية الخارجية لمثلث أكبر من قياس أيّ من الزاويتين الداخليتين البعيدتين عنها.

مثال: $m\angle 1 > m\angle A$

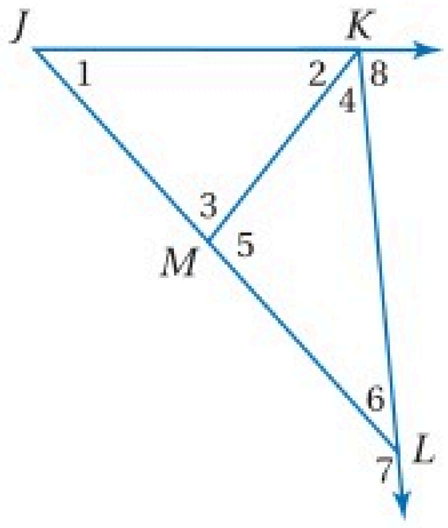
$m\angle 1 > m\angle B$



ستبرهن هذه النظرية في الدرس 4-4

مثال 1 استعمال نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة

استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة؛ لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المُعطى في كلٍّ مما يأتي:



a) قياساتها أقل من $m\angle 7$

$\angle 7$ زاوية خارجيّة لِـ $\triangle KML$، والزاويتان $\angle 5$,$\angle 4$ هما الزاويتان الداخليتان البعيدتان عنها، وبناءً على نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة يكون:

$m\angle 7 > m\angle 4 \ , \ m\angle 7 > m\angle 5$.

وكذلك $\angle 7$ زاوية خارجيّة لِـ $\triangle JKL$ ، والزاويتان $\angle 1 , \angle JKL$ هما الزاويتان الداخليتان البعيدتان عنها؛ لذا فإن $m\angle 7 > m\angle 1$ و $m\angle 7 > m\angle JKL$. وبما أنّ $m\angle JKL = m\angle 2 + m\angle 4$ ، وبالتعويض يكون $m\angle 7 > m\angle 2 + m\angle 4$ ؛ إذن $m\angle 7 > m\angle 2$.

لذا فالزوايا التي قياساتها أقل من $m\angle 7$ هي $\angle 1, \angle 2, \angle 4, \angle 5$.

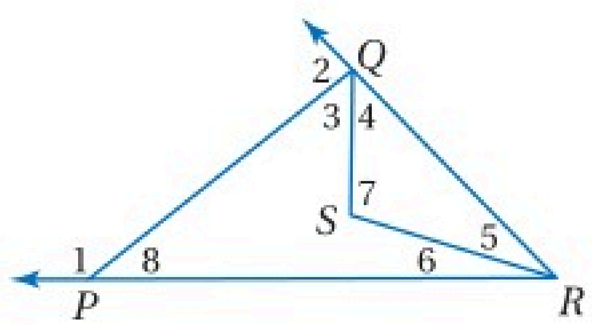
b) قياساتها أكبر من $m\angle 6$

$\angle 3$ زاوية خارجيّة لِـ $\triangle KLM$. وبناءً على نظرية متباينة الزاوية الخارجية يكون $m\angle 3 > m\angle 6$. وبما أن $\angle 8$ زاوية خارجيّة لِـ $\triangle JKL$ ، فإن $m\angle 8 > m\angle 6$ ؛ لذا فقياس كلٍّ من $\angle 8 , \angle 3$ أكبر من $m\angle 6$.

تحقق من فهمك

1A) قياساتها أقل من $m\angle 1$

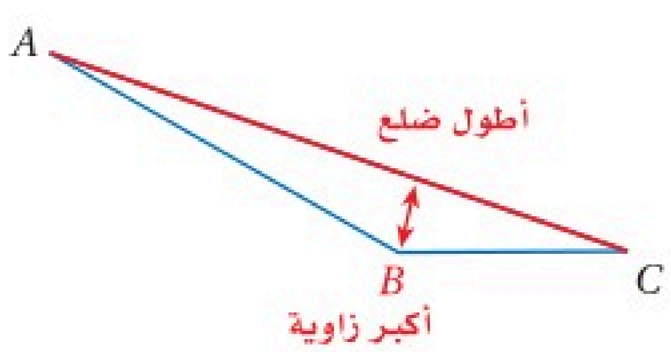
1B) قياساتها أكبر من $m\angle 8$

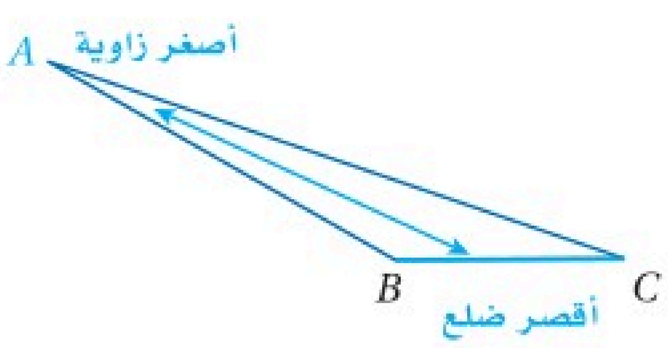


تنبيه !

تحديد الضلع المقابل
انتبه عند تحديد الضلع المقابل لزاوية بصورة صحيحة، فالضلعان اللذان يشكّلان الزاوية لا يمكن أن يكون أحدهما مقابلًا لها.

العلاقات بين زوايا المثلث وأضلاعه : في الدرس 6-3 ، تعلمت أنّه إذا تطابق ضلعان في مثلث، فإن الزاويتين المقابلتين لهذين الضلعين متطابقتان . ولكن كيف تكون العلاقة إذا كان الضلعان غير متطابقين. وللإجابة عن هذا السؤال، افحص أطول الأضلاع وأقصرها وأصغر الزوايا وأكبرها لمثلث منفرج الزاوية ومختلف الأضلاع.





لاحظ أنّ أطول ضلع في $\triangle ABC$ يقابل أكبر زاوية، وبالمثل فإن أقصر ضلع يقابل أصغر زاوية أيضًا .

إن العلاقات بين الزوايا والأضلاع في المثلث المنفرج الزاوية والمختلف الأضلاع تكون صحيحة لجميع المثلثات، ويمكن صياغتها باستعمال المتباينات في النظريتين الآتيتين:

تنبيه !

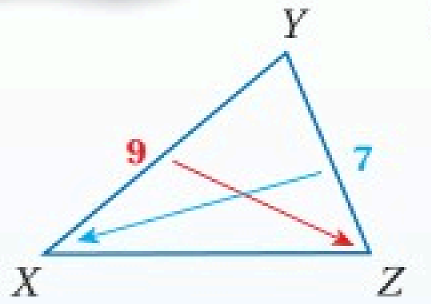
رمزا الزاوية والمتباينة

يبدو رمز الزاوية ($\angle$) مشابهًا لرمز أقل من ($<$)، وخاصّة عند الكتابة باليد؛ لذا كن دقيقًا في كتابة الرموز بصورة صحيحة عندما يُستعمل الرمزان معًا.

نظريتان — العلاقات بين زوايا المثلث وأضلاعه

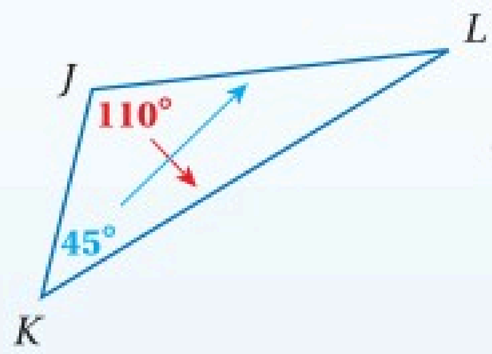
أضف إلى مطويتك

4.9 **متباينة ضلع-زاوية:** إذا كان أحد أضلاع مثلث أطول من ضلع آخر، فإنّ قياس الزاوية المقابلة للضلع الأطول يكون أكبر من قياس الزاوية المقابلة للضلع الأقصر.



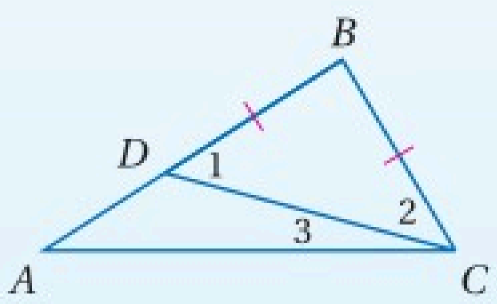
مثال بما أنّ $XY > YZ$ ، فإن $m\angle Z > m\angle X$.

4.10 **متباينة زاوية-ضلع:** إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث أكبر من قياس زاوية أخرى، فإنّ الضلع المقابل للزاوية الكبرى يكون أطول من الضلع المقابل للزاوية الصغرى.



مثال بما أنّ $m\angle J > m\angle K$ ، فإن $KL > JL$.

برهان — النظرية 4.9



المعطيات: $\triangle ABC$ ، فيه $AB > BC$.

المطلوب: $m\angle BCA > m\angle A$.

البرهان:

بما أنّ $AB > BC$ في $\triangle ABC$ ، فإنّه توجد نقطة D على $\overline{AB}$ بحيث $BD = BC$ ؛ لذا ارسم $\overline{CD}$ لتشكّل $\triangle BCD$ المتطابق الضلعين، وبناءً على نظرية المثلث المتطابق الضلعين تكون $\angle 2 \cong \angle 1$ ، واستنادًا إلى تعريف تطابق الزوايا يكون $m\angle 1 = m\angle 2$.

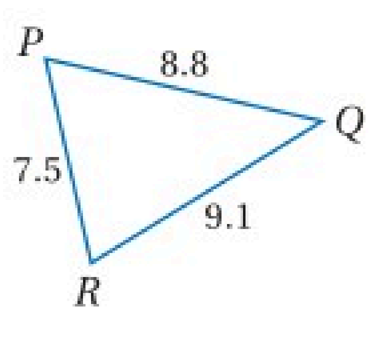
واعتمادًا على مسلمة جمع قياسات الزوايا يكون $m\angle BCA = m\angle 2 + m\angle 3$ ، إذن $m\angle BCA > m\angle 2$ بحسب تعريف المتباينة. وبالتعويض ينتج أن $m\angle BCA > m\angle 1$.

وبناءً على نظريّة متباينة الزاوية الخارجيّة يكون $m\angle 1 > m\angle A$. وبما أن $m\angle BCA > m\angle 1 , m\angle 1 > m\angle A$ ، فإن $m\angle BCA > m\angle A$ بحسب خاصية التعدّي للمتباينة.

ستبرهن النظرية **4.10** في الدرس **4-4**

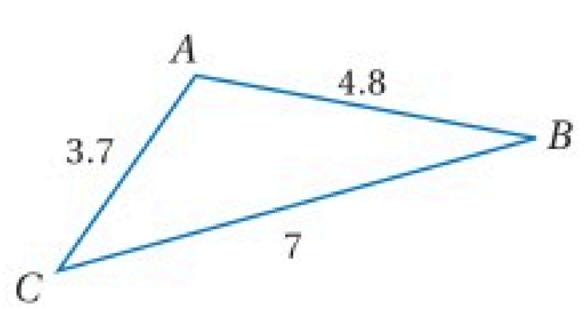
مثال 2 ترتيب زوايا المثلث وفقًا لقياساتها

اكتب زوايا $\triangle PQR$ مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر.



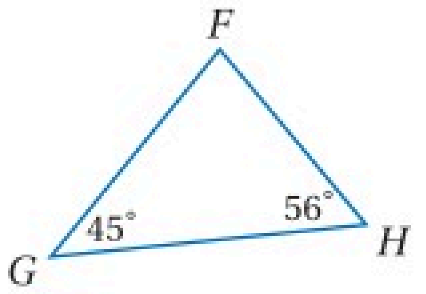
الأضلاع مرتّبة من الأقصر إلى الأطول هي: $\overline{PR}$, $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$. والزوايا المقابلة لهذه الأضلاع هي: $\angle Q$, $\angle R$, $\angle P$ على الترتيب؛ لذا فالزوايا مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر تكون على النحو الآتي: $\angle Q$, $\angle R$, $\angle P$

تحقق من فهمك



2) اكتب زوايا $\triangle ABC$ مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر.

مثال 3 ترتيب أضلاع المثلث وفقًا لأطوالها



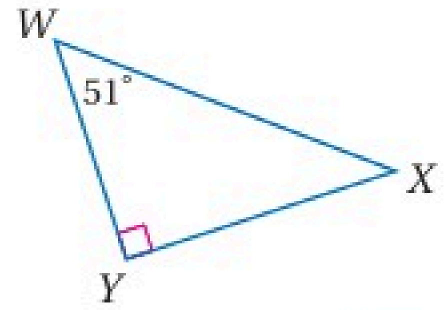
اكتب أضلاع $\triangle FGH$ مرتّبةً من الأقصر إلى الأطول.

أوجد قياس الزاوية المجهولة باستعمال نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث.

$$m\angle F = 180 - (45^\circ + 56^\circ) = 79^\circ$$

لذا فالزوايا مرتّبة من الأصغر إلى الأكبر هي: $\angle G, \angle H, \angle F$.
والأضلاع المقابلة لهذه الزوايا هي: $\overline{FH}, \overline{FG}, \overline{GH}$ على الترتيب.
إذن فالأضلاع مرتّبةً من الأقصر إلى الأطول تكون على النحو التالي: $\overline{FH}, \overline{FG}, \overline{GH}$.

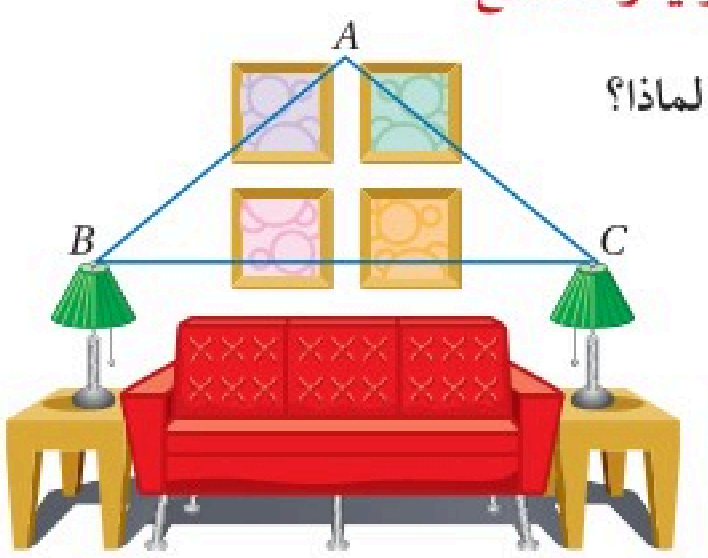
تحقق من فهمك



3) اكتب زوايا $\triangle WXY$ وأضلاعه، مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر.

ويمكنك استعمال العلاقات بين الزوايا والأضلاع في المثلثات لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال 4 من واقع الحياة العلاقات بين الزوايا والأضلاع



تصميم داخلي: **يستعمل مصمّمٌ فكرة التثليث الواردة في فقرة لماذا؟ لترتيب غرفة الاستقبال.**
فإذا أراد المصمّم أن يكون $m\angle B$ أقلّ من $m\angle A$ ، فأي مسافة يجب أن تكون أطول: المسافة بين المصباحين أم المسافة بين النقطتين A, C؟ فسّر إجابتك.

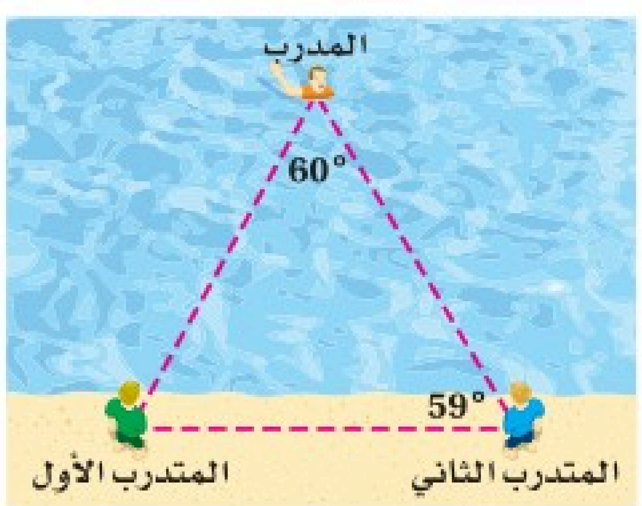
بحسب نظرية «متباينة زاوية- ضلع»، لكي يكون $m\angle B < m\angle A$ ، يجب أن يكون طول الضلع المقابل لِـ $\angle B$ أقصر من طول الضلع المقابل لِـ $\angle A$. وبما أن $\overline{AC}$ يقابل $\angle B$ ، و $\overline{BC}$ يقابل $\angle A$ ، فإنّ $AC < BC$ ؛ لذا فالمسافة BC بين المصباحين ستكون أكبرَ من المسافة بين النقطتين A, C

الربط مع الحياة

برامج إعداد المنقذين في السباحة تتضمن تدريبًا على المراقبة والإنقاذ والإسعافات الأولية، وتتراوح مدّة البرنامج عادة ما بين 30 إلى 37 ساعةً، تبعًا لطبيعة الوسط المائي مثل البرك أو شواطئ البحار.

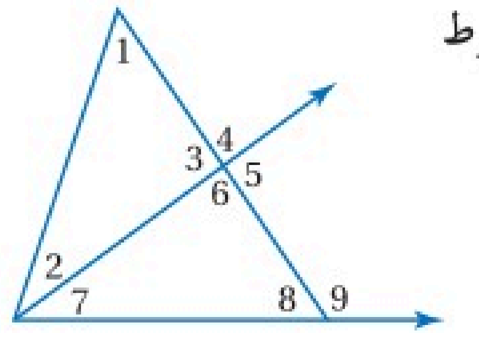
تحقق من فهمك

4) **سبّاحو الإنقاذ:** في أثناء التدريب يُمثّل المدرّب دور شخصٍ في خطر ليتمكّن المتدرِّبان من تطبيق مهارات الإنقاذ. إذا كان المدرّب والمتدرِّبان الأول والثاني في المواقع المبيّنة في الشكل، فأيُّ المتدربَين أقرب إلى المدرّب؟



تأكد

المثال 1 استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة، لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المعطى في كلٍّ مما يأتي :



1) قياساتها أقل من $m\angle 4$.

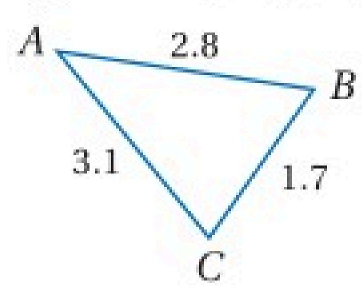
2) قياساتها أكبر من $m\angle 7$.

3) قياساتها أكبر من $m\angle 2$.

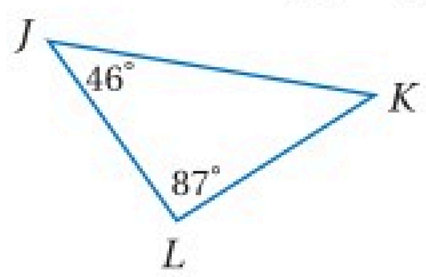
4) قياساتها أقل من $m\angle 9$.

المثالان 3 ,2 اكتب زوايا كل مثلث مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر في السؤالين الآتيين :

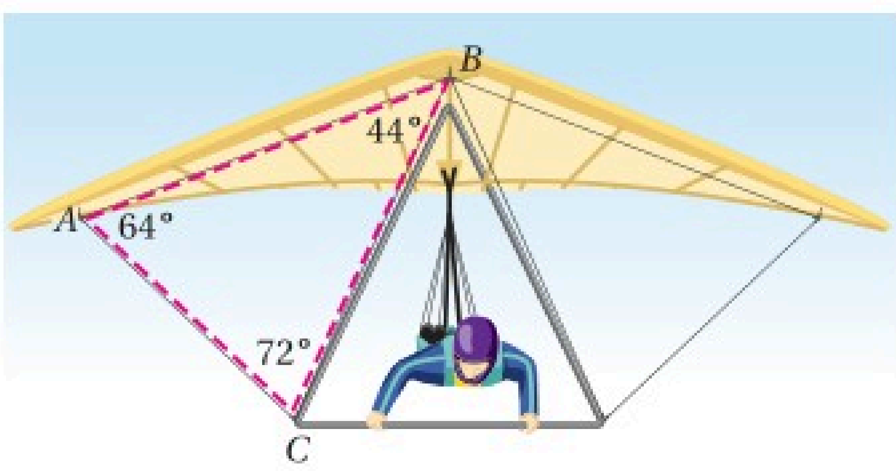
5)



6)

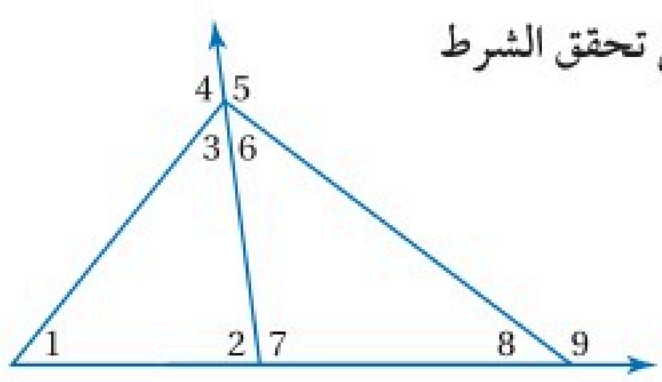


المثال 4 7) **طيران شراعي:** تشكّل دعائم الطائرة الشراعية مثلثات كالمثلث الظاهر في الصورة . فأي دعامة تكون أطول: $\overline{AC}$ أم $\overline{BC}$ ؟ وضّح إجابتك.



تدرب وحل المسائل

المثال 1 استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجية؛ لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المُعطَى في كلٍّ مما يأتي:



8) قياساتها أكبر من $m\angle 2$.

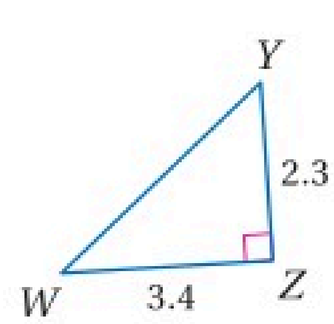
9) قياساتها أقل من $m\angle 4$.

10) قياساتها أقل من $m\angle 9$.

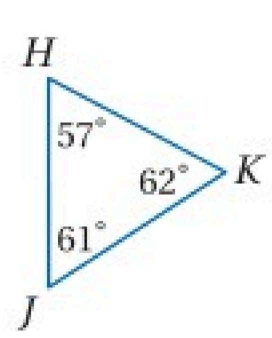
11) قياساتها أكبر من $m\angle 8$.

المثالان 3 ,2 اكتب زوايا كل مثلث مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر في كلٍّ مما يأتي:

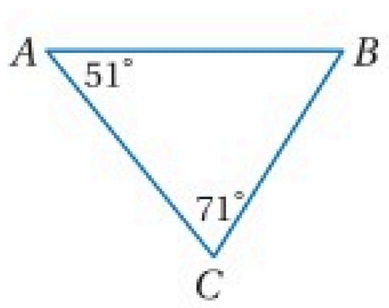
12)



13)



14)



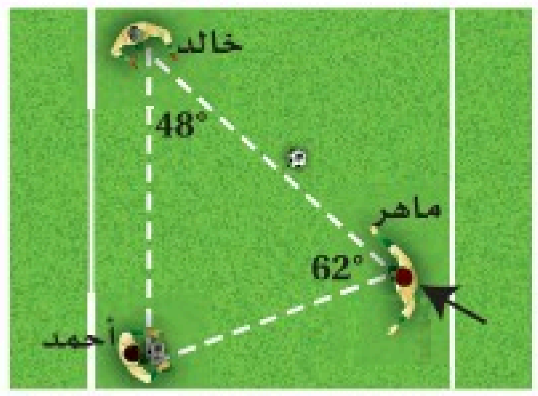
المثال 4

الربط مع الحياة

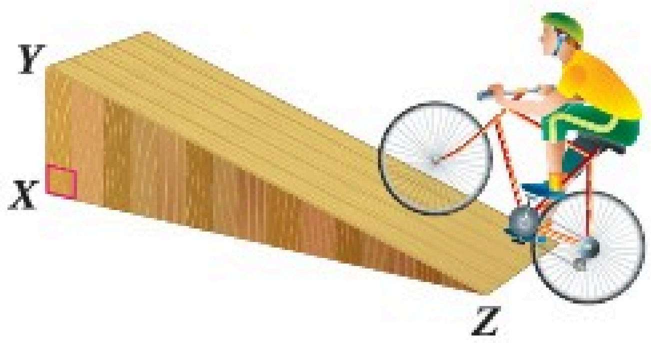
بينت إحدى الدراسات أن فريق كرة القدم يصبح في حالة الهجوم ما بين 65—45 مرةً في المباراة الواحدة.

والفريق المتميز هو الذي يتميز بقدرته على تنفيذ الهجمات بشكل جيد، وفي الوقت نفسه يستطيع الاحتفاظ بدفاع متماسك.

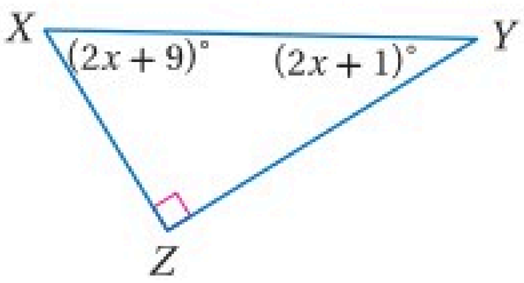
15) **كرة قدم:** يقف أحمد وخالد وماهر في ملعب كرة قدم كما في الشكل أدناه، ويريد ماهر أن يمرِّر الكرة إلى أحد زميلَيه، على أن تكون مسافة التمرير أقصر. أيهما يختار: خالدًا أم أحمد؟برّر إجابتك.



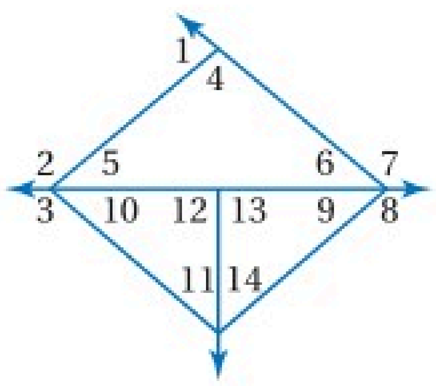
16) **منحدرات:** يمثّل المنحدر طريقًا للدراجات الهوائية. فأيّهما أطول؛ طول المنحدر $\overline{XZ}$ أم طول السطح العلوي للمنحدر $\overline{YZ}$ ؟ وضّح إجابتك باستعمال النظرية 4.9.



17) اكتب زوايا المثلث المجاور مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر :



استعمل الشكل المجاور؛ لتحدّد الزاوية ذات القياس الأكبر في كل مجموعة مما يأتي :



18) $\angle 1, \angle 5, \angle 6$

19) $\angle 2, \angle 4, \angle 6$

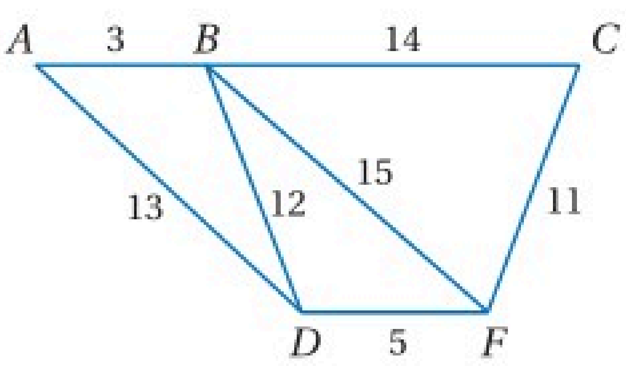
20) $\angle 7, \angle 4, \angle 5$

21) $\angle 3, \angle 11, \angle 12$

22) $\angle 3, \angle 9, \angle 14$

23) $\angle 8, \angle 10, \angle 11$

استعمل الشكل المجاور؛ لتحدد العلاقة بين قياسات الزوايا المعطاة في كلٍّ من الأسئلة الآتية :



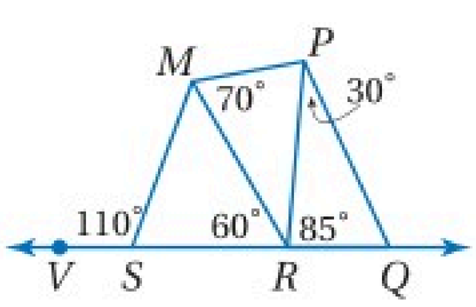
24) $\angle ABD, \angle BDA$

25) $\angle BCF, \angle CFB$

26) $\angle BFD, \angle BDF$

27) $\angle DBF, \angle BFD$

استعمل الشكل المجاور؛ لتحدد العلاقة بين أطوال الأضلاع المعطاة في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

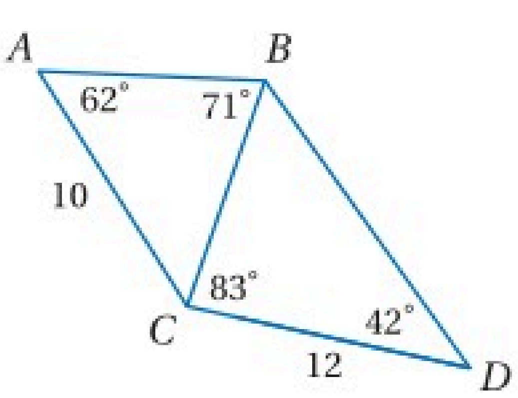


28) $\overline{SM}, \overline{MR}$

29) $\overline{RP}, \overline{MP}$

30) $\overline{RQ}, \overline{PQ}$

31) اكتب أضلاع كل مثلث في الشكل المجاور مرتّبةً من الأقصر إلى الأطول. ووضّح إجابتك.



المثلث	AB	BC	$AB+BC$	CA
الحاد الزوايا				
المنفرج الزاوية				
القائم الزاوية				

32) **تمثيلات متعدّدة:** ستكتشف في هذه المسألة العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث .

a) **هندسيًّا:** ارسم ثلاثة مثلثات: الأول حادّ الزوايا، والثاني منفرج الزاوية، والثالث قائم الزاوية، وسمّ رؤوس كل مثلث A, B, C .

b) **جدوليًّا:** استعمل المسطرة لقياس أطوال أضلاع كل مثلث، ثم انسخ الجدول في دفترك وأكمله.

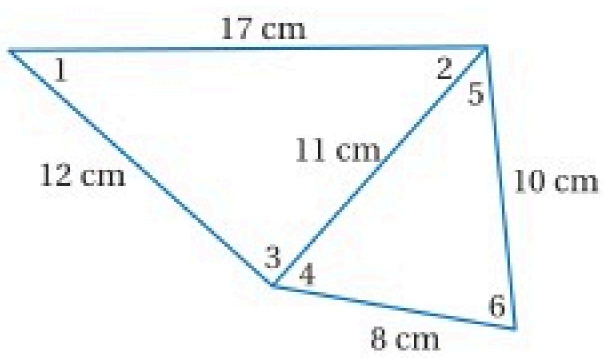
c) **جدوليًّا:** نظّم جدولين آخرين كالجدول أعلاه، وأوجد مجموع BC, CA في أحدهما، ومجموع AB, CA في الجدول الآخر.

d) **جبريًّا:** اكتب متباينةً لكل جدول كوّنته تربط بين مجموع طولَي الضلعين في مثلثٍ وطول الضلع الثالث.

e) **لفظيًّا:** خمّن العلاقة بين مجموع طولَي ضلعين في المثلث وطول الضلع الثالث .

مسائل مهارات التفكير العليا

33) **تبرير:** هل تكون قاعدة المثلث المتطابق الضلعين هي الضلع الأطول في المثلث دائمًا أم أحيانًا أم لا تكون أبدًا؟ وضّح إجابتك.



34) **تحدٍّ:** استعمل أطوال الأضلاع في الشكل المجاور؛ لترتب قياسات الزوايا المرقّمة من الأصغر إلى الأكبر، إذا علمت أنّ $m\angle 2 = m\angle 5$. ووضّح إجابتك.

35) **اكتب:** وضّح لماذا يكون الوتر في المثلث القائم الزاوية هو الضلع الأطول دائمًا ؟

تدريب على اختبار

36) إذا كان قياسا زاويتين في مثلث هما $45°$، $92°$، فما نوع هذا المثلث؟

A منفرج الزاوية ومختلف الأضلاع.

B حادّ الزوايا ومختلف الأضلاع.

C منفرج الزاوية ومتطابق الضلعين.

D حادّ الزوايا ومتطابق الضلعين.

37) أيُّ عبارةٍ عدديةٍ مما يأتي لها أصغر قيمة؟

A $|45|$

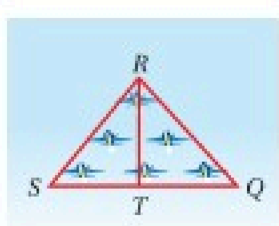
B $|15|$

C $|-28|$

D $|-39|$

مراجعة تراكمية

38) **هندسة إحداثيّة:** بصيغة الميل والمقطع اكتب معادلة العمود المنصّف للقطعة المستقيمة التي إحداثيات طرفيها $D(-2, 4)$, $E(3, 5)$. (الدرس 1-4)



39) **طائرات:** يطير سربٌ من الطائرات على هيئة مثلثين بينهما ضلع مشترك. اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن: $\triangle SRT \cong \triangle QRT$ ، إذا كانت النقطة T منتصف $\overline{SQ}$ ، $\overline{SR} \cong \overline{QR}$. (الدرس 4-3)

استعد للدرس اللاحق

إذا كان $x = 8$, $y = 2$, $z = 3$ ، فحدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحةً أم خاطئةً:

40) $z(x - y) = 13$

41) $2x = 3yz$

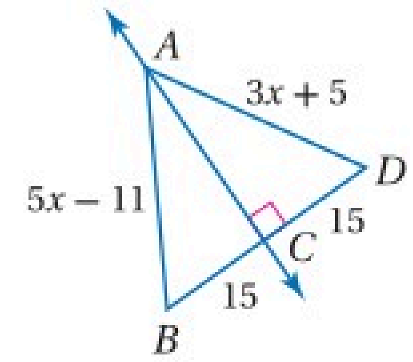
42) $x + y > z + y$

اختبار منتصف الفصل

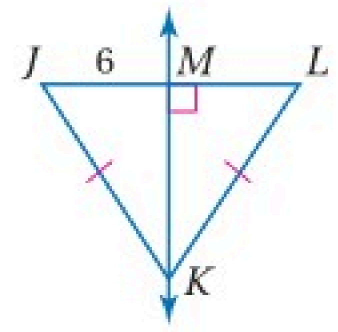
الدروس من 4-1 إلى 4-3

أوجد كلًّا من القياسين الآتيين: (الدرس 4-1)

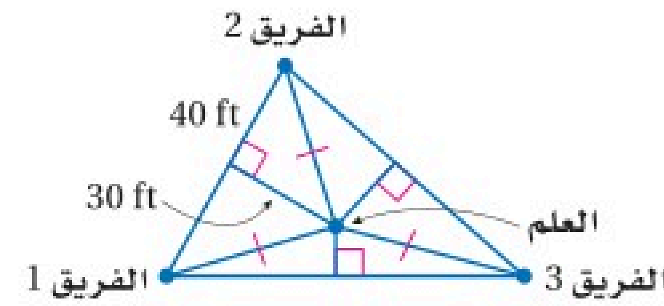
1) AB



2) JL

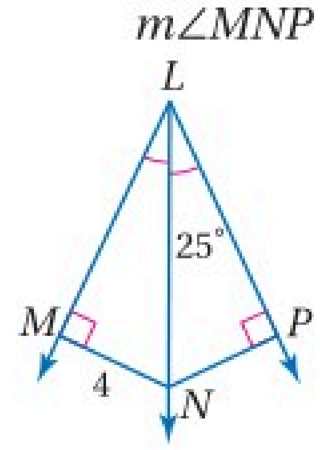


3) **مخيّم:** يلعب المشاركون في مخيَّم كشفيٍّ لعبة الفوز بالعلم. إذا كانت الفِرق الثلاثة تقف في الأماكن المبيَّنة في الشكل أدناه، والعلم مثبّت عند نقطة متساوية البعد عن الفِرق الثلاثة، فما المسافة بين العلم وكل من هذه الفِرق؟ (الدرس 4-1)

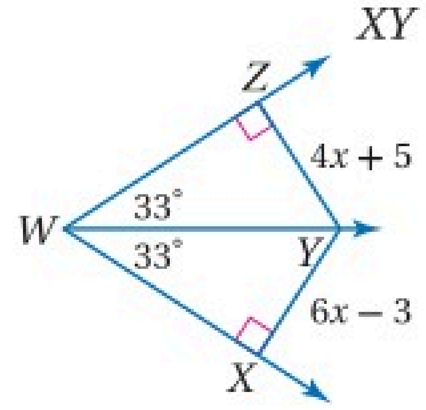


أوجد كلًّا من القياسين الآتيين: (الدرس 4-1)

4) $m\angle MNP$

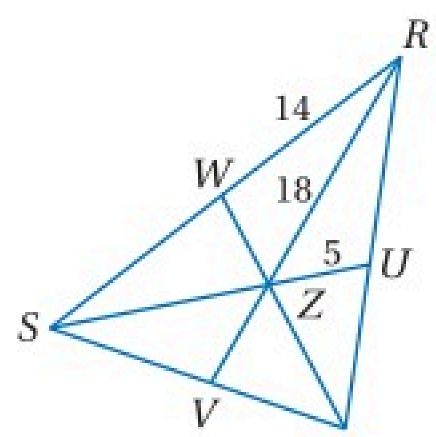


5) XY



إذا كانت Z مركز $\triangle RST$ ، $RZ = 18$.

فأوجد كلًّا من الأطوال الآتية: (الدرس 4-2)



6) ZV

7) SZ

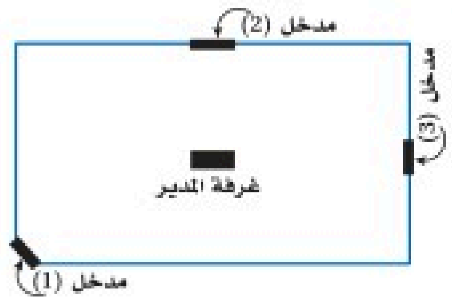
8) SR

هندسة إحداثيّة: أوجد إحداثيات مركز كل مثلث عُلمت رؤوسه في السؤالين الآتيين: (الدرس 4-2)

9) $A(1, 7), B(4, 2), C(7, 7)$

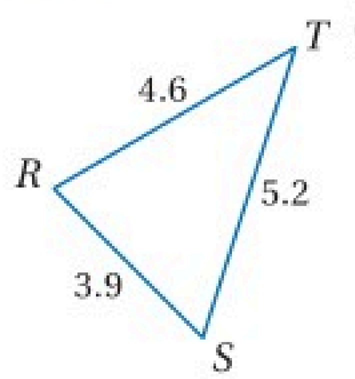
10) $J(-5, 5), K(-5, -1), L(1, 2)$

11) **تصمِيم هندسيٌّ:** في إحدى المدارس، صمَّم مهندس مبنى للإدارة، وراعى في التصميم أن تكون غرفة المدير على نفس البعد من مداخل المبنى الثلاثة. هل تقع غرفة المدير عند نقطة التقاء ارتفاعات المثلث الذي رؤوسه هي المداخل الثلاثة؟ ولماذا؟ (الدرس 4-2)

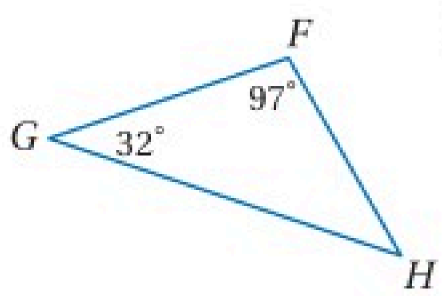


اكتب زوايا كل مثلث وأضلاعه مرتَّبةً من الأصغر إلى الأكبر في السؤالين الآتيين: (الدرس 4-3)

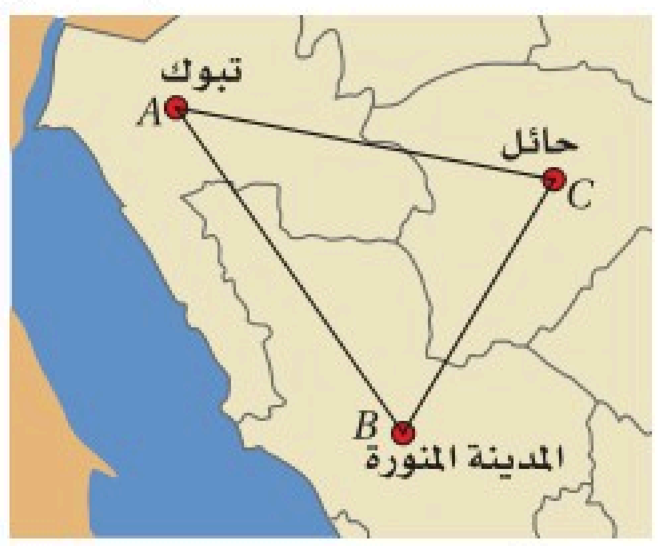
12)



13)



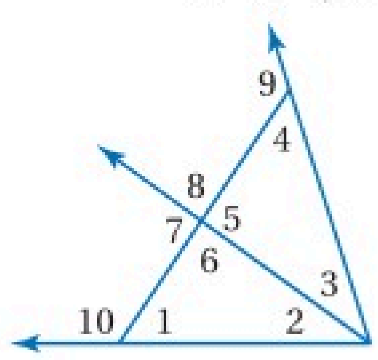
14) **مسافات:** في الخريطة أدناه، إذا علمت أن $m\angle C = 70°\ ,\ m\angle A = \frac{2}{3} m\angle B$ ، فأجب عما يأتي: (الدرس 4-3)



a) أوجد قياس كلٍّ من الزاويتين A , B.

b) رتِّب أطوال أضلاع المثلث من الأقصر إلى الأطول.

استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجية؛ لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المُعطى في كلٍّ من الأسئلة الآتية: (الدرس 4-3)



15) قياسها أقل من $m\angle 8$.

16) قياسها أكبر من $m\angle 3$.

17) قياسها أقل من $m\angle 10$.

البرهان غير المباشر
Indirect Proof

4-4

فيما سبق:

درستُ البراهين الحرّة وذات العمودين والتسلسليّة.

والآن:

- أكتُب براهين جبريّة غير مباشرة.
- أكتُب براهين هندسيّة غير مباشرة.

المفردات:

التبرير المباشر
direct reasoning

البرهان المباشر
direct proof

التبرير غير المباشر
indirect reasoning

البرهان غير المباشر
indirect proof

البرهان بالتناقض
proof by contradiction

لماذا؟

أعلن محل أحذية عن تخفيض مقداره 25٪ على جميع القطع الموجودة في المحل، **فسألت هند أختها مها خلال تسوقهما في المحل قائلةً:** إذا كان ثمن القطعة 80 ريالًا بعد التخفيض، فهل كان ثمن القطعة أكثر من 100 ريالٍ قبل التخفيض؟

فأجابت مها: نعم؛ لأنه لو كان ثمن القطعة قبل التخفيض 100 ريالٍ أو أقل، فإن ثمنها بعد التخفيض سيكون 75 ريالًا أو أقل.

البرهان الجبري غير المباشر: البراهين التي كتبتها حتى الآن استعملت فيها **التبرير المباشر**، حيث كنت تبدأ بمعطيات صحيحة وتثبت أن النتيجة صحيحة هذه الطريقة من البرهان تعتبر **برهانًا مباشرًا**، وعندما تستعمل **التبرير غير المباشر** فإنك تفترض أن النتيجة خطأ، ثم تبيّن أنّ هذا الافتراض يؤدي إلى تناقضٍ مع المعطيات أو مع أيّ حقيقةٍ سابقةٍ كتعريف، أو مسلمة، أو نظرية. وحيث إن جميع خطوات البرهان تكون صحيحة منطقيًّا، فإنّ هذا يكون إثباتًا لخطأ الافتراض، وعلى ذلك يجب أن تكون النتيجة الأصلية صحيحةً، ويسمّى هذا النوع من البرهان **برهانًا غير مباشر** أو **برهانًا بالتناقض**. والخطوات التالية تلخص عمليّة البرهان غير المباشر.

مفهوم أساسي — خطوات كتابة البرهان غير المباشر

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1: حدّد النتيجة التي ستبرهنها. ثم افترض خطأها، وذلك بافتراض أنّ نفيها صحيح.

الخطوة 2: استعمل التبرير المنطقي لتبين أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقضٍ مع المعطيات أو مع حقيقةٍ أخرى، مثل تعريف أو مسلمة أو نظريّة.

الخطوة 3: بما أن الافتراض الذي بدأت به أدّى إلى تناقض، فبيِّن أن النتيجة الأصلية المطلوب إثباتها يجب أن تكون صحيحة.

مثال 1 — صياغة افتراض للبدء في برهان غير مباشر

اكتب الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي:

a) $\angle ABC \ncong \angle XYZ$

الافتراض هو: $\angle ABC \cong \angle XYZ$

b) إذا كان العدد 6 عاملًا للعدد n، فإن 2 عامل للعدد n.

نتيجة هذه العبارة الشرطية هي 2 عامل للعدد n، ونفي هذه النتيجة هو 2 ليس عاملًا للعدد n؛ لذا فالافتراض هو: العدد 2 ليس عاملًا للعدد n.

c) $\angle 3$ زاوية منفرجة.

الافتراض هو: $\angle 3$ ليست زاويةً منفرجةً.

تحقق من فهمك

1A) $x > 5$

1B) النقاط J, K, L تقع على استقامة واحدة.

1C) $\triangle XYZ$ متطابق الأضلاع.

قراءة الرياضيات

التناقض

التناقض مبدأ في المنطق ينصُّ على أنه لا يمكن تحقق الافتراض ونفيه في آنٍ واحدٍ.

يمكن أن تُستعمل البراهين غير المباشرة لإثبات صحّة المفاهيم الجبريّة.

مثال 2 كتابة برهان جبري غير مباشر

اكتب برهانًا غير مباشر لتبين أنه: إذا كان $-3x + 4 > 16$ ، فإن $x < -4$

المعطيات: $-3x + 4 > 16$

المطلوب: إثبات أن $x < -4$

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: نفي $x < -4$ هو $x \geq -4$ ؛ لذا افترض أن $x \geq -4$ صحيحة.

الخطوة 2:

$x \geq -4$	افترض
$-3x \leq 12$	اضرب الطرفين بـ -3
$-3x + 4 \leq 12 + 4$	اجمع 4 للطرفين
$-3x + 4 \leq 16$	بسّط

ولكن $-3x + 4 > 16$ معطى

الخطوة 3: الافتراض يؤدي إلى تناقض مع المعلومة المعطاة $-3x + 4 > 16$ ؛ لذا فالافتراض بأن $x \geq -4$ يجب أن يكون خطأً، وأن النتيجة الأصليّة $x < -4$ هي الصحيحة.

✓ تحقق من فهمك

اكتب برهانًا غير مباشر لكلٍّ من العبارتين الآتيتين:

2A) إذا كانت $7x > 56$ ، فإنّ $x > 8$

2B) إذا كان $-c$ موجبًا ، فإنّ c سالبٌ.

ويمكنك أن تستعمل البرهان غير المباشر في المواقف الحياتية اليوميّة.

مثال 3 من واقع الحياة استعمال البرهان الجبري غير المباشر

تسوق: **اشترى فهد قميصين بأكثر من 60 ريالًا، وبعد عدّة أسابيع سأله صديقه حامدٌ عن ثمن كل قميص، ولكن فهدًا لم يتذكر ثمن كل قميص. استعمل البرهان غير المباشر لتبين أن أحد القميصين على الأقل ثمنه أكثر من 30 ريالًا.**

المعطيات: ثمن القميصين معًا أكثر من 60 ريالًا.

$x + y > 60$ ، حيث x ثمن القميص الأول، وy ثمن القميص الثاني.

المطلوب: إثبات أن قميصًا واحدًا على الأقل ثمنه أكثر من 30 ريالًا؛ أي $x > 30$ أو $y > 30$

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أن ثمن كلٍّ من القميصين لا يزيد على 30 ريالًا، أي أنّ $x \leq 30 , y \leq 30$

الخطوة 2: إذا كانت $x \leq 30 , y \leq 30$ ، فإنّ $x + y \leq 30 + 30$ ؛ أي $x + y \leq 60$. وهذا تناقض، لأن ثمن القميصين معًا أكثر من 60 ريالًا.

الخطوة 3: بما أن الافتراض أدّى إلى تناقض مع حقيقة معلومة، فإن الافتراض بأن $x \leq 30 , y \leq 30$ افتراض خطأ. لذا يجب أن يكون ثمن أحد القميصين على الأقل أكثر من 30 ريالًا.

✓ تحقق من فهمك

3) **رحلة:** قطع رياض أكثر من 360 كيلومترًا في رحلة، وتوقّف في أثناء سفره مرتين فقط. استعمل البرهان غير المباشر لإثبات أن رياضًا قطع أكثر من 120 كيلومترًا في إحدى مراحل رحلته الثلاث على الأقل.

تُستعمل البراهين غير المباشرة عادة لإثبات مفاهيم في نظرية الأعداد، ويكون من المفيد في هذه البراهين تذكّر أنّه يمكنك تمثيل العدد الزوجي على الصورة $2k$، والعدد الفردي على الصورة $2k + 1$ حيث k، عدد صحيح.

مثال 4 براهين غير مباشرة في نظرية الأعداد

اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنه إذا كان $x + 2$ عددًا زوجيًّا، فإنّ x عدد زوجي.

المعطيات: $x + 2$ عدد زوجي.

المطلوب: x عدد زوجي.

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أنّ x عدد فردي، وهذا يعني أن $x = 2k + 1$، حيث k عدد صحيح.

الخطوة 2:

$x + 2 = (2k + 1) + 2$	عوّض
$= (2k + 2) + 1$	خاصيّة الإبدال
$= 2(k + 1) + 1$	خاصية التوزيع

والآن حدّد ما إذا كان $2(k + 1) + 1$ عددًا زوجيًّا أو فرديًّا. بما أن k عدد صحيح، فإنّ $k + 1$ عدد صحيح أيضًا. افترض أن m تساوي $k + 1$، فيكون:

$2(k + 1) + 1 = 2m + 1$ عوّض

إذن $x + 2$ يمكن أن يُمثَّل بـ $2m + 1$، حيث m عدد صحيح، ولكن هذا التمثيل يعني أنّ $x + 2$ عدد فردي. وهذا يتناقض مع العبارة المعطاة $x + 2$ عدد زوجي.

الخطوة 3: بما أنّ افتراض x عدد فردي أدّى إلى تناقضٍ مع العبارة المعطاة، فإنّ النتيجة الأصليّة x عدد زوجي يجب أن تكون صحيحةً.

تحقق من فهمك

4) اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنه "إذا كان مربع عدد صحيح فرديًّا، فإنّ العدد الصحيح فرديٌّ".

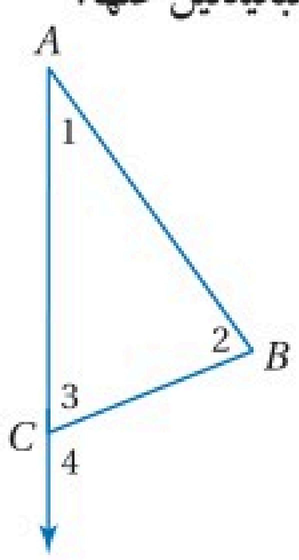
إرشادات للدراسة

نظرية الأعداد
هي فرع من فروع الرياضيات تختص بدراسة الأعداد وخصائصها والعمليات عليها وتصنيفها إلى: زوجي، فردي، أولي، غير أولي...، وتثبت النظريات والحقائق لهذه الأعداد.

البرهان غير المباشر في الهندسة: يمكن أن يستعمل التبرير غير المباشر لإثبات صحة عبارات في الهندسة، مثل نظرية متباينة الزاوية الخارجيّة.

مثال 5 برهان هندسي

أثبت أنّ قياس الزاوية الخارجيّة لمثلث يكون أكبر من قياس كلٍّ من الزاويتين الداخليتين البعيدتين عنها.



ارسم شكلًا توضيحيًّا، ثم عيّن عليه المعطيات والمطلوب.

المعطيات: $\angle 4$ زاوية خارجية لِـ $\triangle ABC$.

المطلوب: إثبات أن $m\angle 4 > m\angle 2$، وأن $m\angle 4 > m\angle 1$.

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: افترض أن $m\angle 4 \not> m\angle 1$، أو $m\angle 4 \not> m\angle 2$.
أيْ أنّ $m\angle 4 \leq m\angle 1$، أو $m\angle 4 \leq m\angle 2$.

تنبيه!

البرهان بالتناقض مقابل المثال المضاد
البرهان بالتناقض وإعطاء مثال مضاد أمران مختلفان؛ إذ يُستعمل المثال المضاد لإثبات خطأ تخمين أو افتراض، ولا يمكن استعماله لإثبات صحة التخمين أو الافتراض.

الخطوة 2: تحتاج فقط إلى بيان أن الافتراض $m\angle 4 \leq m\angle 1$ يؤدي إلى تناقضٍ، وبالمثل سيؤدي الافتراض $m\angle 4 \leq m\angle 2$ إلى تناقضٍ أيضًا .

الافتراض $m\angle 4 \leq m\angle 1$ يعني أن: $m\angle 4 = m\angle 1$ أو $m\angle 4 < m\angle 1$.

الحالة 1: $m\angle 4 = m\angle 1$

$m\angle 4 = m\angle 1 + m\angle 2$	نظرية الزاوية الخارجيّة
$m\angle 4 = m\angle 4 + m\angle 2$	عوّض
$0 = m\angle 2$	اطرح $m\angle 4$ من كلا الطرفين.

وهذا يناقض حقيقة أن قياس الزاوية أكبر من 0 ؛ لذا فإن $m\angle 4 \neq m\angle 1$.

الحالة 2: $m\angle 4 < m\angle 1$

$m\angle 4 = m\angle 1 + m\angle 2$	نظرية الزاوية الخارجيّة
$m\angle 4 > m\angle 1$	قياسات الزوايا موجبة

هذا يناقض الفرض بأن $m\angle 4 < m\angle 1$

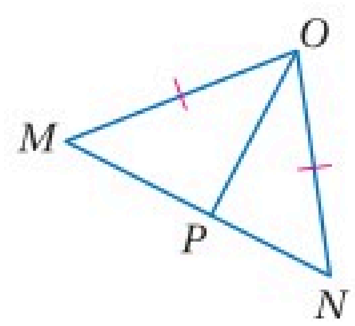
الخطوة 3: في الحالتين يؤدي الافتراض إلى تناقض مع نظرية أو تعريف؛ لذا فالنتيجة الأصليّة بأنّ $m\angle 4 > m\angle 2$ وأن $m\angle 4 > m\angle 1$ يجب أن تكون صحيحة.

تحقق من فهمك

5) اكتب برهانًا غير مباشر.

المعطيات: $\overline{MO} \cong \overline{ON}$, $\overline{MP} \not\cong \overline{NP}$

المطلوب: $\angle MOP \not\cong \angle NOP$



إرشادات للدراسة

تعرّف التناقضات

تذكّر أن التناقض في البرهان غير المباشر لا يكون دائمًا مع المعطيات أو الفرض الذي تبدأ به، بل يمكن أن يكون مع حقيقة معلومة أو تعريف كما ورد في الحالة 1 من المثال 5 ، حيث إن قياس أي زاوية في مثلث يجب أن يكون أكبر من 0.

تأكـد

المثال 1 اكتب الافتراض الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي :

1) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

2) $\triangle XYZ$ مختلف الأضلاع.

3) إذا كان $4x < 24$ ، فإنّ $x < 6$

4) $\angle A$ ليست زاوية قائمة.

المثال 2 اكتب برهانًا غير مباشر لكل عبارة من العبارتين الآتيتين :

5) إذا كان $2x + 3 < 7$ ، فإنّ $x < 2$

6) إذا كان $3x - 4 > 8$ ، فإنّ $x > 4$

المثال 3

7) **كرة قدم:** سجّل فهد 13 هدفًا لصالح فريقه المدرسي في المباريات الست الأخيرة. أثبت أنّ متوسط عدد الأهداف التي سجلها في كل مباراة كان أقل من 3

المثال 4

8) اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنّه إذا كان $5x - 2$ عددًا فرديًّا، فإن x عدد فردي.

المثال 5 اكتب برهانًا غير مباشر لكل عبارة من العبارتين الآتيتين:

9) وتر المثلث القائم الزاوية هو أطول أضلاعه.

10) إذا كانت الزاويتان متكاملتين، فإنّه لا يمكن أن تكونا منفرجتين معًا.

تدرب وحل المسائل

المثال 1 اكتب الافتراض الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي:

11) إذا كان $2x > 16$ ، فإنّ $x > 8$.

12) $\angle 1 , \angle 2$ زاويتان غير متكاملتين.

13) إذا تساوى ميلا مستقيمين، فإنّ المستقيمين متوازيان.

14) العدد الفردي لا يقبل القسمة على 2 .

المثال 2 اكتب برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي:

15) إذا كان $-3x + 4 < 7$ ، فإنّ $x > -1$.

16) إذا كان $-2x - 6 > 12$ ، فإنّ $x < -9$.

المثال 3

17) **ألعاب حاسوب:** اشترى منصور لعبتي حاسوب بأكثر من 400 ريال، وبعد أسابيع قليلة سأله صديقه كم تكلفة اللعبة الواحدة. فلم يتذكر منصور ذلك. استعمل التبرير غير المباشر؛ لتبين أن إحدى اللعبتين على الأقلّ كلّفت أكثر من 200 ريال.

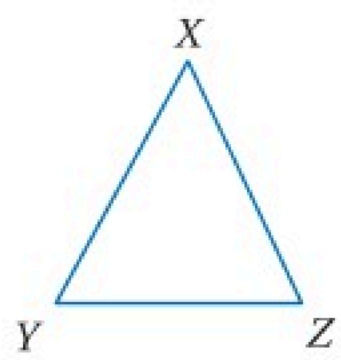
18) **جمع التبرّعات:** أقامت جمعيّة خيرية حفلة لجمع التبرعات لمساعدة الفقراء والمحتاجين، وكان سعر تذكرة الدخول للكبار 30 ريالًا، وللأطفال 12.5 ريالًا. إذا بيعت 375 تذكرة، وكان ريعها أكثر من 7300 ريال، فأثبت أنه تم بيع 150 تذكرة على الأقل للكبار.

المثالان 4, 5 اكتب برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي:

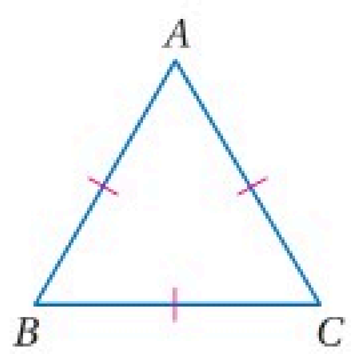
19) **المعطيات:** xy عدد صحيح فردي.
المطلوب: كلًّا من x, y عدد صحيح فردي

20) **المعطيات:** n^2 عدد زوجي.
المطلوب: n عدد زوجي.

21) **المعطيات:** $XZ > YZ$
المطلوب: $\angle X \ncong \angle Y$



22) **المعطيات:** $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع.
المطلوب: $\triangle ABC$ متطابق الزوايا.



23) اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنه لا يمكن أن يكون للمثلث أكثر من زاوية قائمة.

24) اكتب برهانًا غير مباشر للنظرية 4.10.

25) اكتب برهانًا غير مباشر لإثبات أنّه إذا كان $\frac{1}{b} < 0$ ، فإن b عدد سالب.

26) **كرة سلّة:** عندما خرج عدنان من الملعب ليدخل زميل له قُبيل نهاية الشوط الأول من المباراة كان فريق مدرسته متقدّمًا بـ 28 نقطة مقابل 26 . وعندما عاد مع بداية الشوط الثاني كان الفريق المنافس متقدمًا بـ 29 نقطة مقابل 28 نقطة. استنتج أخو عدنان حين علم ذلك أنّ لاعبًا من الفريق المنافس سجّل ثلاث نقاط من رمية واحدة. أثبت صحّة أو خطأ استنتاجه باستعمال البرهان غير المباشر ومعلومات الربط مع الحياة.

الربط مع الحياة

هناك أكثر من طريقة لتسجيل ثلاث نقاط في كرة السلة، منها التسجيل من خارج المنطقة، ومنها أن يسجّل اللاعب نقطتين ويحصل على رمية حرة نتيجة خطأ من الفريق المنافس ويسجل منها نقطة.

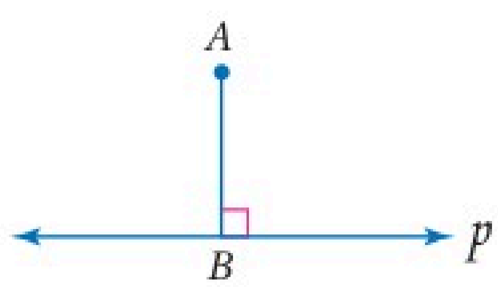
27) ألعاب إلكترونية: تتضمن لعبة حاسوبية فارسًا في رحلةٍ للبحث عن الكنز، وفي نهاية الرحلة يقترب الفارس من البابين المبيَّنين أدناه.

أخبر خادمٌ الفارس بأن أحد الإعلانين صحيح والآخر خطأ. استعمل التبرير غير المباشر لتحدد أيّ البابين سيختاره الفارس. وضح إجابتك.

حدّد ما إذا كان إثبات كل عبارة حول أقصر مسافة بين نقطة وخط مستقيم أو مستوٍ، يمكن إثباتها باستعمال البرهان المباشر أو البرهان غير المباشر، ثم اكتب برهانًا لكلٍّ منهما.

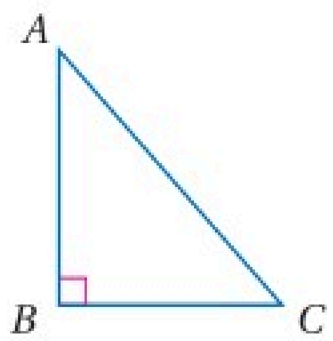
28) المعطيات: $\overline{AB}$ عمودي على المستقيم p

المطلوب: $\overline{AB}$ أقصر قطعة مستقيمة من A إلى المستقيم p.



29) المعطيات: ABC مثلث قائم الزاوية

المطلوب: الوتر $\overline{AC}$ أطول ضلع في المثلث



30) نظريّة الأعداد: في هذه المسألة ستُخمِّن علاقةً في نظرية الأعداد، وتُثبت صحة تخمينك.

a) اكتب عبارة جبرية تمثل "مجموع مكعب العدد n والعدد ثلاثة".

b) كوّن جدولًا يعطي قيم العبارة لعشر قيم زوجية وفردية مختلفة لِـ n.

c) اكتب تخمينًا حول n عندما تكون قيمة العبارة زوجيّة.

d) اكتب برهانًا غير مباشر لتخمينك.

مراجعة المفردات

مجموعة الأعداد الصحيحة هي:
$\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

مسائل مهارات التفكير العليا

31) مسألة مفتوحة: اكتب عبارة يمكن إثبات صحتها باستعمال البرهان غير المباشر ثم أثبتها.

32) تحدٍّ: إذا كان x عددًا نسبيًّا، فإنه يمكن تمثيله بالصورة $\frac{a}{b}$، حيث a, b عددان صحيحان، و $b \neq 0$. ولا يمكن تمثيل العدد غير النسبي في صورة ناتج قسمة عددين صحيحين. اكتب برهانًا غير مباشر تبيّن فيه أن ناتج ضرب عدد نسبي لا يساوي الصفر في عدد غير نسبي، هو عدد غير نسبي.

33) **اكتشف الخطأ:** يحاول أسعد ورضوان أن يُثبتا العبارة التالية باستعمال البرهان غير المباشر. فهل أيٌّ منهما إجابته صحيحة؟ وضح إجابتك.

"إذا كان مجموع عددين زوجيًّا، فإنّ العددين زوجيّان".

أسعد

العبارة صحيحة. إذا كان أحد العددين زوجيًّا والآخر صفرًا، فإن المجموع يكون عددًا زوجيًّا. وبما أنّ الافتراض صحيح حتى عندما تكون النتيجة خطأ، فإن العبارة صحيحة.

رضوان

العبارة صحيحة. إذا كان العددان فرديين فإنّ مجموعهما يكون عددًا زوجيًّا. وبما أن الافتراض صحيح عندما تكون النتيجة خطأ، فإنّ العبارة صحيحة.

34) **اكتب:** اكتب المعاكس الإيجابي للعبارة الموجودة في السؤال 8، واكتب برهانًا مباشرًا للمعاكس الإيجابي. كيف يرتبط البرهان المباشر للمعاكس الإيجابي للعبارة بالبرهان غير المباشر للعبارة الأصلية؟

تدريب على اختبار

35) إذا كان طولا ضلعين في مثلث 12 ,7، فأيٌّ مما يأتي **لا** يمكن أن يكون محيط المثلث؟

A 29

B 34

C 37

D 38

36) إذا كان $b > a$، فأيٌّ مما يأتي يكون صحيحًا دائمًا؟

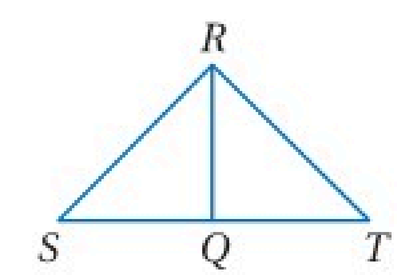
A $-a > -b$

B $3a > b$

C $a^2 < b^2$

D $a^2 < ab$

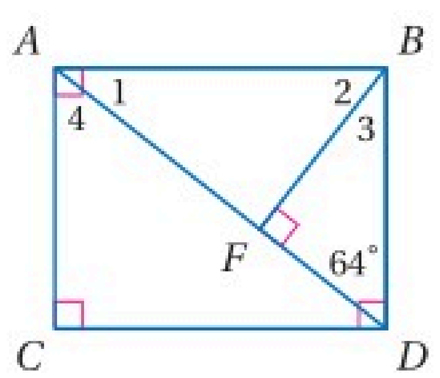
مراجعة تراكمية



37) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 3-4)

المعطيات: $\overline{RQ}$ تنصّف $\angle SRT$.

المطلوب: إثبات أنّ $m\angle SQR > m\angle SRQ$



أوجد كلًّا من القياسين الآتيين: (الدرس 2-3)

38) $m\angle 1$

39) $m\angle 4$

40) **هندسة إحداثية:** أوجد المسافة بين المستقيمين المتوازيين: (مهارة سابقة)

$$y = 2x + 2$$
$$y = 2x - 3$$

استعد للدرس اللاحق

حُلَّ كلًّا من المتباينات الآتية:

41) $4x + 7 < 180$

42) $8x - 14 < 3x + 19$

43) $3x + 54 < 90$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

استكشاف

4-5

معمل الحاسبة البيانية: متباينة المثلث

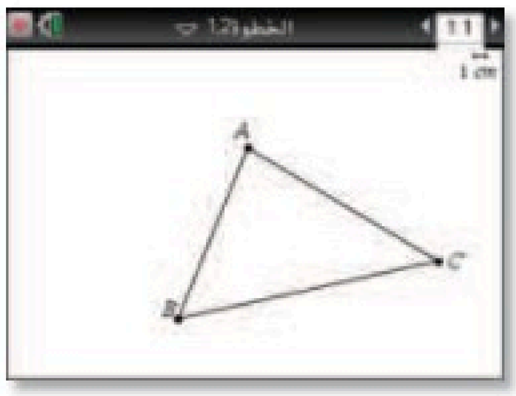
The Triangle Inequality

يمكنك استعمال تطبيق الهندسة في الحاسبة TI–nspire؛ لاستكشاف خصائص المثلث.

النشاط 1

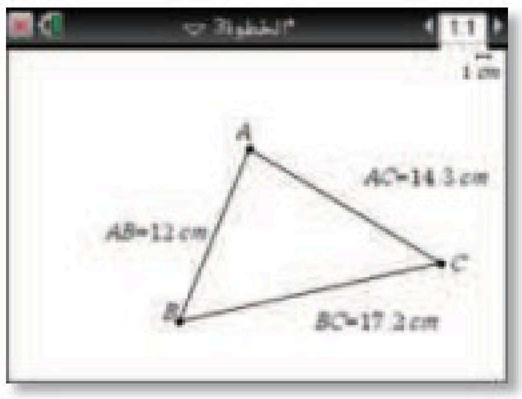
أنشئ مثلثًا، ولاحظ العلاقة بين مجموع طولَي ضلعين وطول الضلع الثالث.

الخطوة 1: أنشئ مثلثًا بالضغط على المفاتيح on ، menu ثم اختر 5: الأشكال الهندسية واختر منها 2: مثلث ثم ارسم المثلث واضغط esc



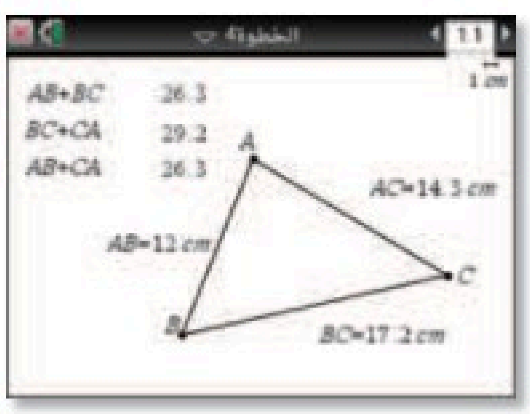
الخطوة 2: سمِّ رؤوس المثلث، وذلك بوضع المؤشر عند كل نقطة ثم الضغط على menu ctrl ، ثم اختيار 2: التسمية ، وعلى زر Shift لجعل الحروف كبيرة ثم سمِّ الرؤوس A, B, C

الخطوة 3: • حدد طول كل ضلع من أضلاع المثلث بالضغط على menu واختر 6: القياس واختر منها 1: الطول ، ولإيجاد طول كل ضلع: اضغط على رأسين في المثلث، ثم ضع المؤشر في مكان مناسب لظهور النتيجة ثم اضغط enter



• اكتب اسم الضلع بجانب الطول المقِيس بالضغط على menu ctrl ، ثم اختيار 5: النص ثم اكتب اسم الضلع واضغط enter

الخطوة 4: ولحساب مجموع طول ضلعين في المثلث، اضغط menu ctrl واختر منها 5: النص ، واكتب اسم ضلعين مثل: $AB + BC$ ، ثم ظلِّل النص $AB + BC$ واضغط menu ctrl واختر منها 5: الأشكال الهندسية ، واضغط على الرقم الذي يمثل طول الضلع AB ، ثم على الرقم الذي يمثل طول الضلع BC ، وسيظهر مجموع الضلعين، ثم ضع المؤشر في مكانٍ مناسبٍ لظهور النتيجة ثم اضغط enter



تحليل النتائج:

1) ضع إشارة > أو < أو = داخل ○؛ لتحصل على عبارة صحيحة فيما يأتي:

$AB + BC$ ○ CA $\qquad$ $AB + CA$ ○ BC $\qquad$ $BC + CA$ ○ AB

2) خمّن العلاقة بين مجموع طولَي ضلعين في المثلث وطول الضلع الثالث.

3) ضع إشارة > أو < أو = داخل ○؛ لتحصل على عبارةٍ صحيحةٍ فيما يأتي:

$|AB - BC|$ ○ CA $\qquad$ $|AB - CA|$ ○ BC $\qquad$ $|BC - CA|$ ○ AB

4) كيف يمكنك استعمال ملاحظاتك؛ لتحديد مدى طول الضلع الثالث لمثلث إذا علمتَ طولَي الضلعين الآخرين؟

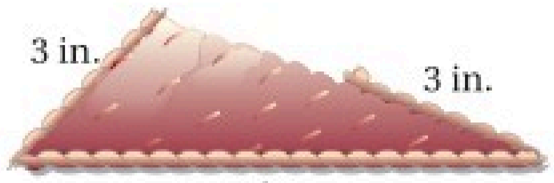
رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

4-5 متباينة المثلث
The Triangle Inequality

فيما سبق:
درستُ خصائص المتباينات وتطبيقها على العلاقات بين زوايا المثلث وأضلاعه.

والآن:
- أستعمل نظرية متباينة المثلث لأعيّن الأطوال التي تكوّن مثلثًا.
- أُثبت العلاقات في المثلث باستعمال نظرية متباينة المثلث.

لماذا؟
يريد أحد المصمِّمين أن يستعمل قطع الخيوط المجدُولة والمتبقية من أحد أعماله لتزيين الوسائد المثلثة الشكل أدناه. ولتقليل الإهدار، أراد المصمّم أن يستعمل القطع دون قصها، فاختار ثلاث قطع عشوائيًا وحاول أن يشكّل مثلثًا. والشكلان الآتيان يبيّنان اثنتين من هذه المحاولات.



متباينة المثلث: بما أن المثلث يتكون من ثلاث قطع مستقيمة، فيجب أن تتوافر علاقة خاصّة بين أطوال هذه القطع؛ كي تشكّل مثلثًا.

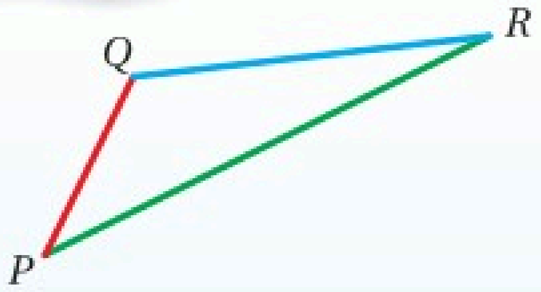
نظرية 4.11 نظرية متباينة المثلث
أضف إلى مطويتك

مجموع طولَي أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

أمثلة $PQ + QR > PR$

$QR + PR > PQ$

$PR + PQ > QR$



ستبرهن النظريّة 4.11 في السؤال 19

ولتوضيح عدم إمكانية رسم مثلثٍ من ثلاث قطعٍ مستقيمةٍ عُلمت أطوالها، يجب بيان أن إحدى متباينات المثلث الثلاث غير صحيحة.

مثال 1 تعيين الأطوال التي تكوّن مثلثًا

حدد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث في كلٍّ من السؤالين الآتيين، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فوضح السبب:

a) 8 in, 15 in, 17 in .

تحقق من صحة كل متباينة.

$8 + 15 \stackrel{?}{>} 17$	$8 + 17 \stackrel{?}{>} 15$	$15 + 17 \stackrel{?}{>} 8$
$23 > 17$ ✓	$25 > 15$ ✓	$32 > 8$ ✓

بما أنّ مجموع طولَي أيِّ قطعتين أكبر من طول القطعة الثالثة، فإنّ القطع المستقيمة التي أطوالها 17 , 15 , 8 تكوّن مثلثًا.

b) 6 m, 8 m, 14 m

$6 + 8 \stackrel{?}{>} 14$

$14 \ngtr 14$ ✗

بما أن مجموع طولَي قطعتين ليس أكبر من طول القطعة الثالثة، فإن القطع المستقيمة التي أطوالها 14 , 8 , 6 لا يمكن أن تكوِّن مثلثًا.

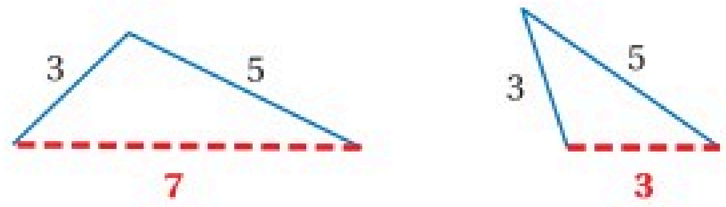
إرشادات للدراسة
إذا كان مجموع أقصر طولين أكبر من طول الضلع الثالث، فإن الأطوال الثلاثة تمثل أطوال أضلاع مثلث.

تحقق من فهمك

1A) 15 cm , 16 cm , 30 cm

1B) 2 ft , 8 ft , 11 ft

عندما يُعلم طولا ضلعين في مثلثٍ، يمكن تحديد مدى القيم الممكنة لطول الضلع الثالث باستعمال نظرية متباينة المثلث.



مثال 2 من الاختبار

إذا كان طولا ضلعين في مثلث هما 3 cm , 7 cm ، فما أصغر عدد طبيعي يمكن أن يمثل طول الضلع الثالث؟

A 3 cm
B 4 cm
C 5 cm
D 10 cm

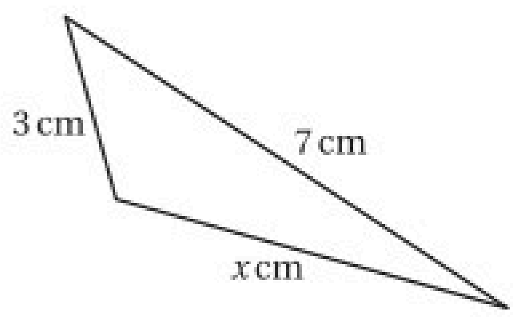
إرشادات للاختبار

اختبار البدائل
إذا كان الوقت غير كافٍ يمكنك اختبار كل بديل لإيجاد الإجابة الصحيحة واستبعاد البدائل الأخرى.

اقرأ فقرة الاختبار

المطلوب هو تحديد أصغر قيمة ممكنة لطول الضلع الثالثِ في مثلثٍ طولا ضلعين من أضلاعه 3 cm , 7 cm

حل فقرة الاختبار



لتحديد أصغر طول ممكن من بين البدائل المعطاة، حدّد مدى القيم الممكنة لطول الضلع الثالث أولًا؛ لذا ارسم شكلًا وافترض أن طول الضلع الثالث يساوي x ، ثم اكتب متباينات المثلث الثلاث، وحل كل واحدةٍ منها.

$3 + 7 > x$	$3 + x > 7$	$x + 7 > 3$
$10 > x$ أو $x < 10$	$x > 4$	$x > -4$

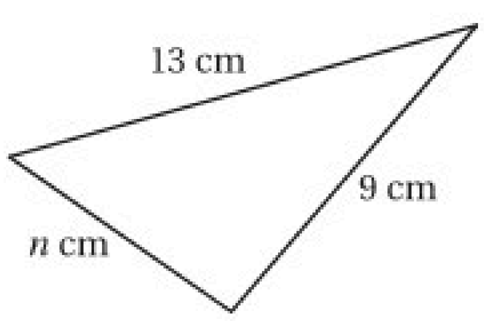
لاحظ أن $x > -4$ تكون صحيحةً دائمًا لأي قيمةٍ صحيحةٍ موجبةٍ لِـ x ، وبربط المتباينتين المتبقيتين، يكون مدى القيم التي تحقق كلتا المتباينتين هو $x > 4$ وَ $x < 10$، والذي يمكن كتابته في الصورة $4 < x < 10$

وأقلّ عدد صحيح موجب بين 4 وَ 10 هو 5 ؛ لذا فالإجابة الصحيحة هي C .

قراءة الرياضيات

المتباينة المركبة
تقرأ المتباينة المركبة $4 < x < 10$ على النحو التالي: تقع x بين 4 وَ 10 أو x أكبر من 4 وأقل من 10

تحقق من فهمك

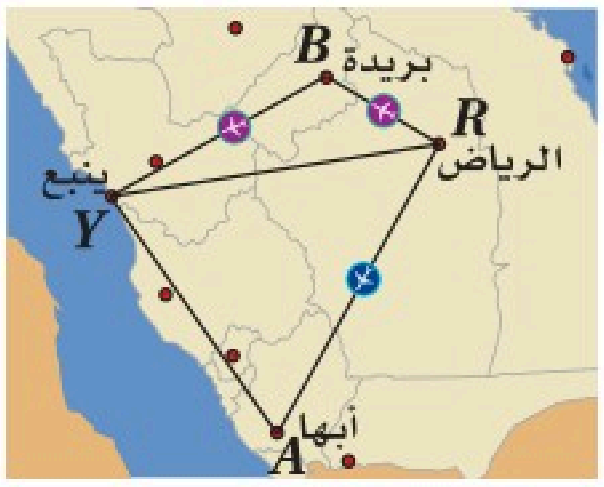


2) في الشكل المجاور، أيُّ الأعداد الآتية لا يمكن أن يكون قيمة لِـ n؟

A 7
B 13
C 10
D 22

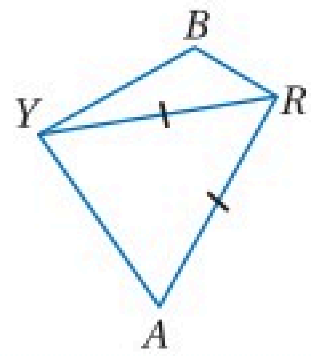
استعمال نظريّة متباينة المثلث في البراهين: يمكنك استعمال نظرية متباينة المثلث في البراهين المختلفة.

مثال 3 من واقع الحياة استعمال نظرية متباينة المثلث في البرهان



طيران: المسافة الجوية من الرياض إلى ينبع تساوي المسافة الجوية من الرياض إلى أبها، أثبت أن الطيران المباشر من الرياض إلى ينبع مرورًا بمدينة بريدة يقطع مسافةً أكبر من المسافة المقطوعة عند الطيران من الرياض إلى أبها دون توقّف.

ارسم شكلًا تقريبيًّا يمثل المسألة، وضع عليه رموز أسماء المدن، وارسم القطعة $\overline{YA}$ لتشكّل $\triangle YRA$.



المعطيات: $RY = RA$

المطلوب: $RB + BY > RA$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $RY = RA$	1) معطى
2) $RB + BY > RY$	2) نظرية متباينة المثلث
3) $RB + BY > RA$	3) بالتعويض

الربط مع الحياة

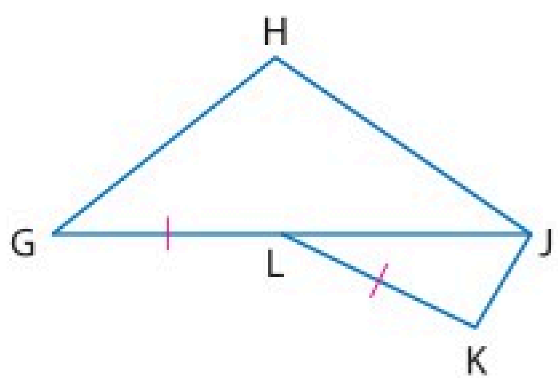
يختلف الطيران المباشر عن الطيران من دون توقف، ففي حالة الطيران المباشر لا يغيّر المسافرون الطائرة، ولكن قد تحط الطائرة في مطار واحد أو أكثر قبل وصولها لغايتها.

تحقق من فهمك

3) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $GL = LK$

المطلوب: $JH + GH > JK$



تأكد

المثال 1 حدِّد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث في كلٍّ مما يأتي، وإن لم يكن ذلك ممكنًا فوضِّح السبب.

1) 5 cm, 7 cm, 10 cm   2) 3 in, 4 in, 8 in   3) 6 m, 14 m, 10 m

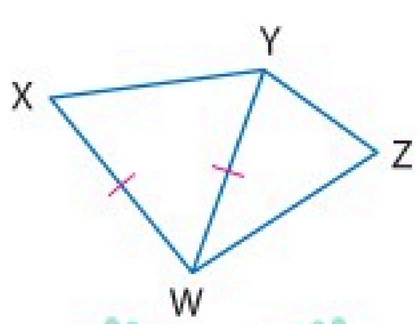
المثال 2 4) **اختيار من متعدّد:** إذا كان طولَا ضلعين في مثلث 5 m , 9 m ، فما أصغر عدد صحيح يمكن أن يمثّل طول الضلع الثالث فيه؟

A 5 m   B 4 m   C 14 m   D 6 m

المثال 3 5) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{XW} \cong \overline{YW}$

المطلوب: $YZ + ZW > XW$



تدرب وحل المسائل

المثال 1 حدد ما إذا كانت كلٌّ من القياسات الآتية تمثل أطوال أضلاع مثلث في كلٍّ ممَّا يأتي، وإن لم يكن ذلك ممكنًا فوضح السبب.

6) 4 ft, 9 ft, 15 ft

7) 11 mm, 21 mm, 16 mm

8) 9.9 cm, 1.1 cm, 8.2 cm

9) $2\frac{1}{2}$ m, $1\frac{3}{4}$ m, $5\frac{1}{8}$ m

المثال 2 اكتب متباينةً تمثل مدى طول الضلع الثالث في مثلثٍ عُلم طولَا ضلعين من أضلاعه في كلٍّ مما يأتي:

10) 4 ft, 8 ft

11) 5 m, 11 m

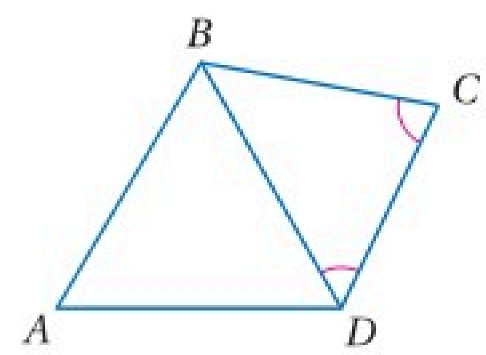
12) 2.7 cm, 4.2 cm

13) $\frac{1}{2}$ km, $3\frac{1}{4}$ km

المثال 3 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين لكلٍّ مما يأتي:

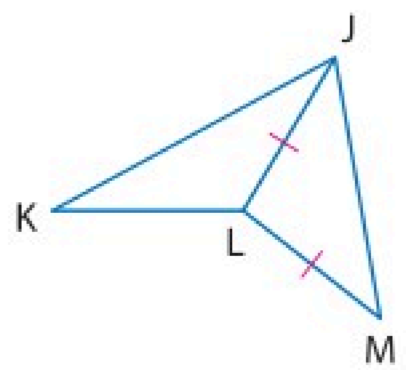
14) **المعطيات:** $\angle BCD \cong \angle CDB$

المطلوب: $AB + AD > BC$



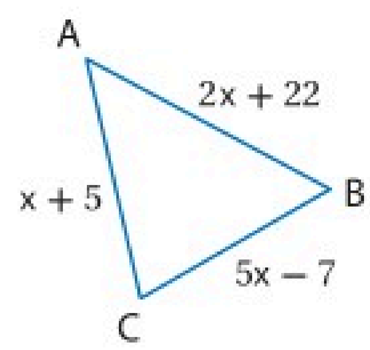
15) **المعطيات:** $\overline{JL} \cong \overline{LM}$

المطلوب: $KJ + KL > LM$

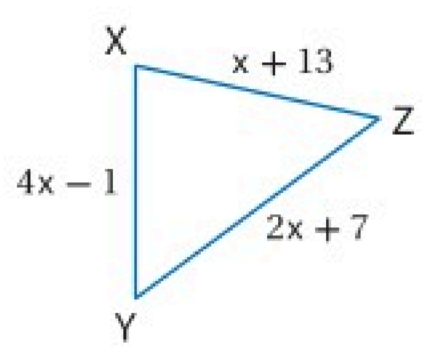


جبر: حدّد القيم الممكنة لـ x في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

16)



17)



18) **قيادة:** يُريد توفيق أن يسلك المسار الأقصر من بيته إلى المجمع الرياضي، و يمكنه أن يسلك الطريق 1 أو الطريق 2 ثم الطريق 3 .

a) أيُّ المسارين أقصر من بيت توفيق إلى المجمع الرياضي؟ وضح إجابتك.

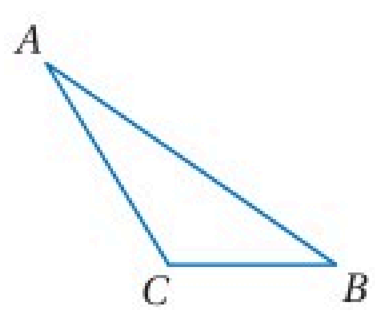
b) افترض أن توفيقًا يقود سيارته بسرعةٍ قريبةٍ جدًّا من السرعة القُصوى المسموح بها ولا تتعداها. إذا كانت السرعة القُصوى على الطريق 1 تساوي 60 km/h ، وعلى كلٍّ من الطريقين 3 ,2 تساوي 100 km/h ، فأيُّ المسارَين سيستغرق وقتًا أقل؟ وضح إجابتك.

19) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\triangle ABC$

المطلوب: $AC + BC > AB$ (نظرية متباينة المثلث)

(إرشاد: ارسم قطعة مستقيمة مساعدة $\overline{CD}$ ، على أن تكون C بين B , D ويكون $\overline{CD} \cong \overline{AC}$) .



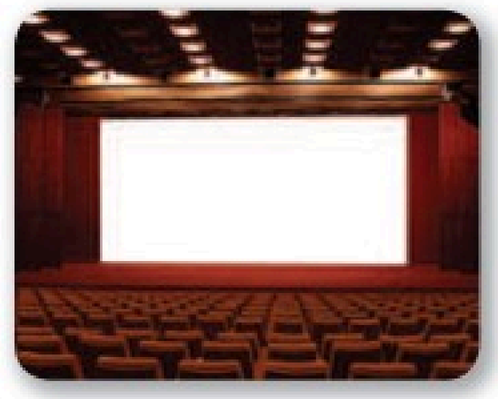
إذا كانت كل مجموعة تمثل أطوال أضلاع مثلث، فاكتب متباينةً تمثِّل مدى القيم الممكنة لِـ x في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

20) $x, 4, 6$

21) $8, x, 12$

22) $x+1, 5, 7$

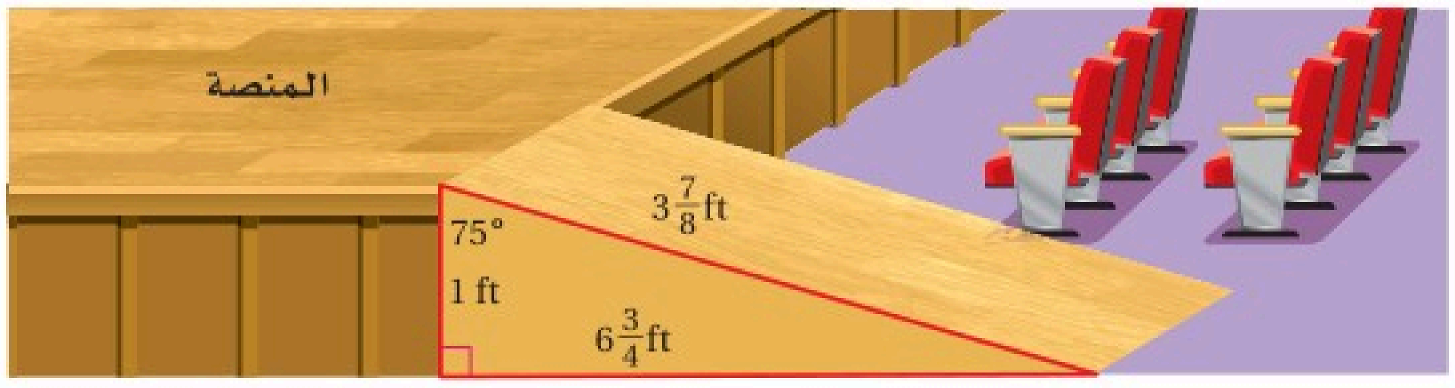
23) $x+2, x+4, x+6$



الربط مع الحياة

تصمم المسارح وفق نظام هندسي دقيق يُراعى فيه إمكانية مشاهدة جميع الحضور للمنصة، وسماع الصوت بوضوح دون صدى.

24) **مسرحٌ:** يصمم عبد الرحمن وخليل منحدرًا للصعود إلى منصة المسرح، فخطَّط عبد الرحمن المنحدر كما في الشكل أدناه، ولكن خليلًا كان قلقًا بشأن القياسات ويريد أن يتحقق منها قبل البدء في قص الخشب، فهل يوجد ما يبرر هذا القلق؟ وضح إجابتك.



تقدير: حدد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث في كلٍّ مما يأتي، وذلك دون استعمال الآلة الحاسبة. وضِّح إجابتك.

25) $\sqrt{8}\text{ ft}, \sqrt{2}\text{ ft}, \sqrt{35}\text{ ft}$

26) $\sqrt{99}\text{ cm}, \sqrt{48}\text{ cm}, \sqrt{65}\text{ cm}$

27) حدّد ما إذا كانت النقاط $X(1,-3), Y(6,1), Z(2,2)$ تمثل رؤوس مثلث. وضح إجابتك.

28) **تمثيلات متعدّدة:** في هذه المسألة ستكتشف العلاقة بين أضلاع مثلثين وزواياهما.

a) **هندسيًّا:** ارسم ثلاثة أزواج من المثلثات في كل مثلثين منها زوجان من الأضلاع المتطابقة فقط، وضع إشارات على كل ضلعين متطابقين، وسمِّ كل زوج من المثلثات ABC, DEF، حيث $\overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{AC} \cong \overline{DF}$.

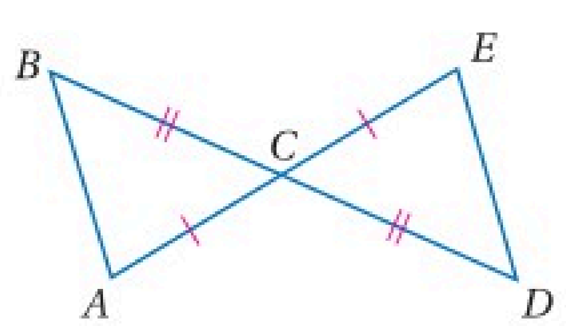
b) **جدوليًّا:** انسخ الجدول أدناه في دفترك، ثم أوجد بالقياس قيمة كلٍّ من $BC, m\angle A, EF, m\angle D$، وسجّلها في الجدول.

أزواج المثلثات	BC	$m\angle A$	EF	$m\angle D$
1				
2				
3				

c) **لفظيًّا:** خمّن العلاقة بين الزاويتين المقابلتين للضلعين غير المتطابقين في كل زوجٍ من المثلثات التي فيها زوجان من الأضلاع المتطابقة.

مسائل مهارات التفكير العليا

29) **تحدّ:** ما مدى القيم الممكنة لمحيط الشكل $ABCDE$، إذا كان $AC = 7, DC = 9$؟ وضحّ إجابتك.



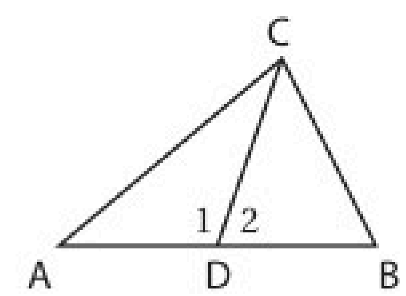
30) **تبرير:** ما مدى طول كلٍّ من الضلعين المتطابقين في مثلثٍ طول قاعدته 6 cm؟ وضح إجابتك.

31) مسألة مفتوحة: طول أحد أضلاع مثلث 5 سم. ارسم مثلثًا يكون الضلع الذي طوله 5 سم أقصر أضلاعه، ومثلثًا آخر يكون الضلع الذي طوله 5 سم أطول أضلاعه. مضمِّنًا رسمَكَ أطوال أضلاع المثلث وقياسات زواياه.

32) اكتب: اشرح الطريقة التي تستعملها لإيجاد أصغر قيمةٍ وأكبر قيمةٍ لطول ضلع مثلثٍ إذا علمت طولَي الضلعين الآخرين.

تدريب على اختبار

33) إذا كانت $\overline{DC}$ قطعةً متوسطةً في $\triangle ABC$ وكان $m\angle 1 > m\angle 2$ ، فأي عبارة مما يأتي **غير** صحيحة؟



A $AD = BD$

B $m\angle ADC = m\angle BCD$

C $AC > BC$

D $m\angle 1 > m\angle B$

34) أيُّ معادلة مما يأتي تمثل العبارة: "ناتج طرح 7 من $14w$ يساوي z" ؟

A $7 - 14w = z$

B $z = 14w + 7$

C $7 - z = 14w$

D $z = 14w - 7$

مراجعة تراكمية

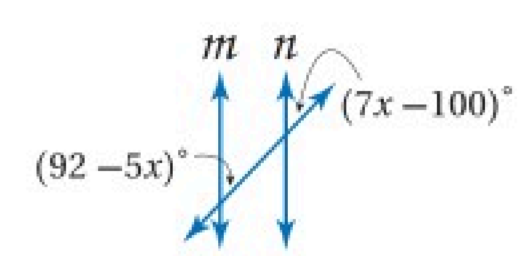
اكتب الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي: (الدرس 4-4)

35) إذا كان $4y + 17 = 41$، فإن $y = 6$

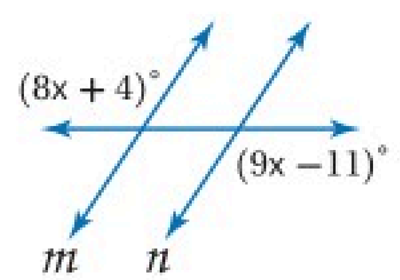
36) إذا قطع مستقيم مستقيمين آخرين، وكانت الزاويتان المتبادلتان داخليًّا متطابقتين، فإنّ المستقيمين متوازيان.

أوجد قيمة x ، على أن يكون $m \parallel n$ في كلٍّ مما يأتي، واذكر المسلّمة أو النظرية التي استعملتها: (مهارة سابقة)

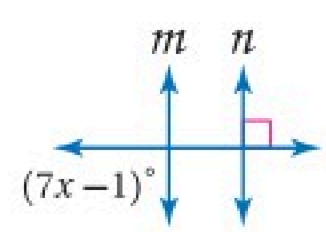
37)



38)



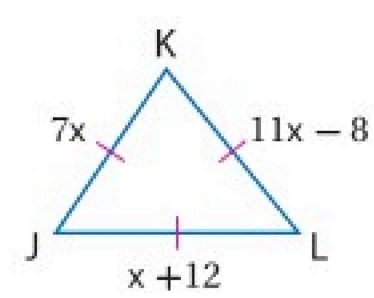
39)



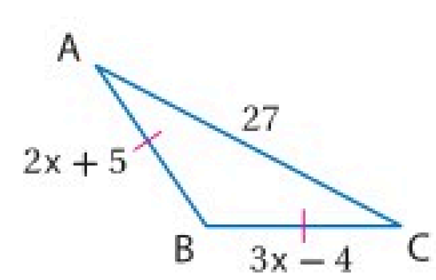
استعد للدرس اللاحق

أوجد قيمة x ، وأطوال الأضلاع المجهولة في كل مثلث مما يأتي:

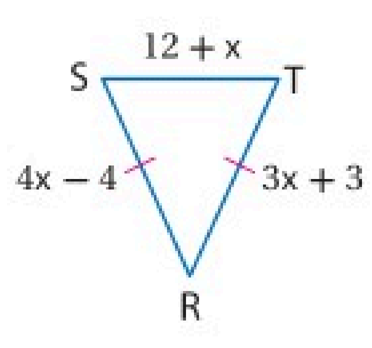
40)



41)



42)



رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-6 المتباينات في مثلثين
Inequalities in Two Triangles

فيما سبق:

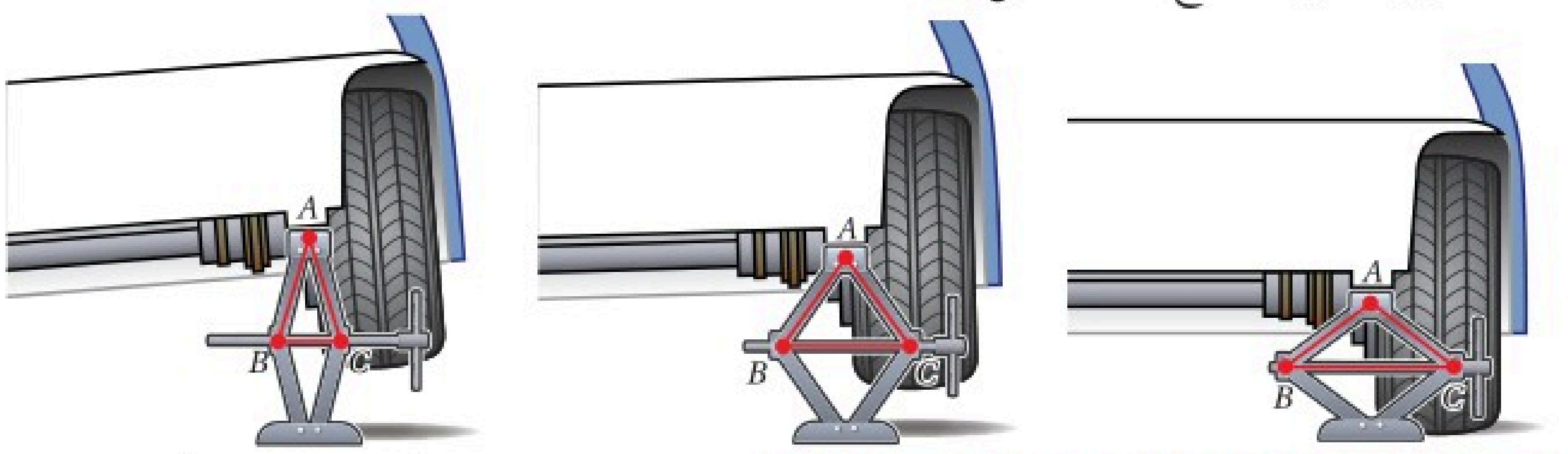
درستُ المتباينات في المثلث الواحد.

والآن:

- أطبق متباينة SAS أو عكسها؛ لإجراء مقارنات بين عناصر مثلثين.
- أثبت صحة العلاقات باستعمال متباينة SAS أو عكسها.

لماذا؟

تُستعمل الرافعة عند تغيير إطارات السيارات، والرافعة المبيّنة أدناه واحدة من الرافعات البسيطة التي ما زالت تُستعمل حتى يومنا هذا. لاحظ أنّه عندما تُنزَّلُ الرافعة فإنّ ساقَي $\triangle ABC$ يظلّان متطابقين، في حين تزداد الزاوية A اتّساعًا ويزداد طول الضلع $\overline{BC}$ المقابل لِـ $\angle A$.



متباينة ضلعين والزاوية المحصورة بينهما (SAS): الملاحظة في المثال أعلاه صحيحة لأي نوعٍ من المثلثات وتوضّح النظريتين الآتيتين:

نظريتان — المتباينات في مثلثين

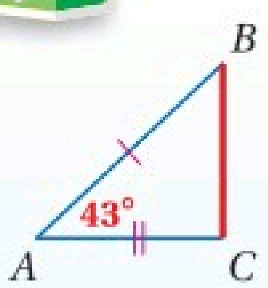
أضف إلى مطويتك

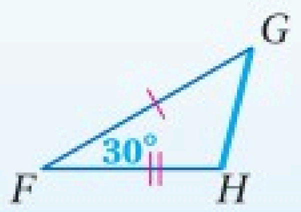
4.12 متباينة SAS

إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني، فإنَ الضلع الثالث في المثلث الأول يكون أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني.

مثال: إذا كان: $\overline{AB} \cong \overline{FG}$, $\overline{AC} \cong \overline{FH}$, $m\angle A > m\angle F$ ،

فإنّ $BC > GH$.



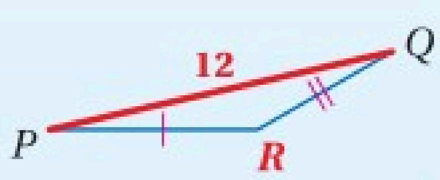


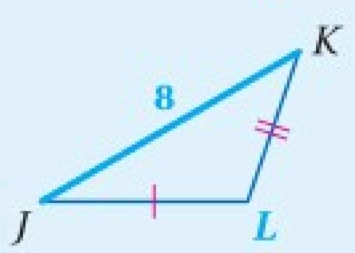
4.13 عكس متباينة SAS (SSS)

إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان الضلع الثالث في المثلث الأول أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني، فإنَ قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول يكون أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني.

مثال: إذا كان: $\overline{PR} \cong \overline{JL}$, $\overline{QR} \cong \overline{KL}$, $PQ > JK$ ،

فإن $m\angle R > m\angle L$.



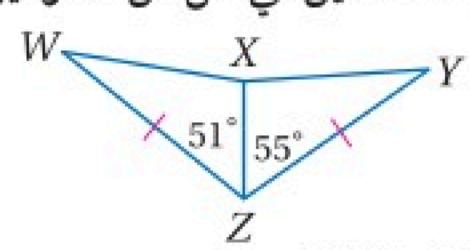


ستبرهن النظرية 4.12 في الصفحة التالية ، وستبرهن النظرية 4.13 في السؤال 18

مثال 1 — استعمال متباينة SAS وعكسها

قارن بين القياسين المحددين في كلٍّ من السؤالين الآتيين :

a) WX, XY

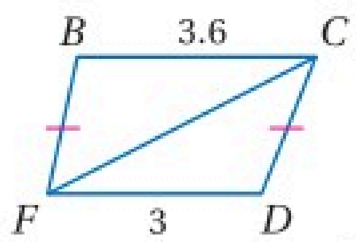


في المثلثين WXZ, YXZ ،

$\overline{WZ} \cong \overline{YZ}, \overline{XZ} \cong \overline{XZ}$, $m\angle YZX > m\angle WZX$ ،

وبحسب متباينة SAS فإن $WX < XY$

b) $m\angle FCD, m\angle BFC$



في المثلثين BCF, DFC ،

$\overline{BF} \cong \overline{DC}, \overline{FC} \cong \overline{CF}, BC > FD$ ،

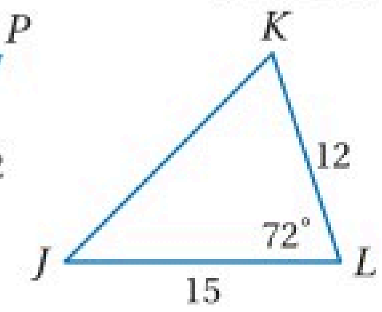
وبحسب عكس متباينة SAS فإن

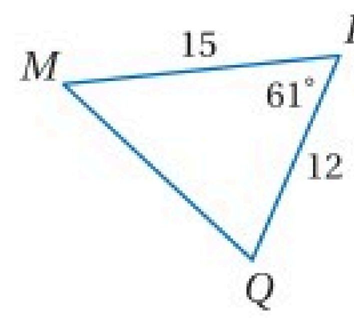
$m\angle BFC > m\angle DCF$

تحقق من فهمك

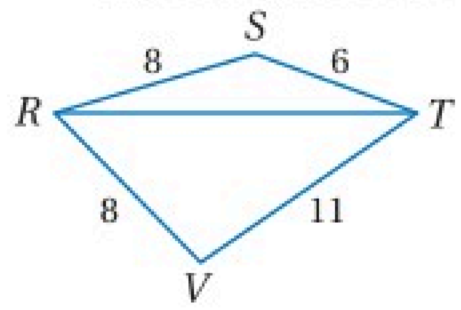
قارن بين القياسات المعطاة في كلٍّ من السؤالين الآتيين :

1A) JK , MQ





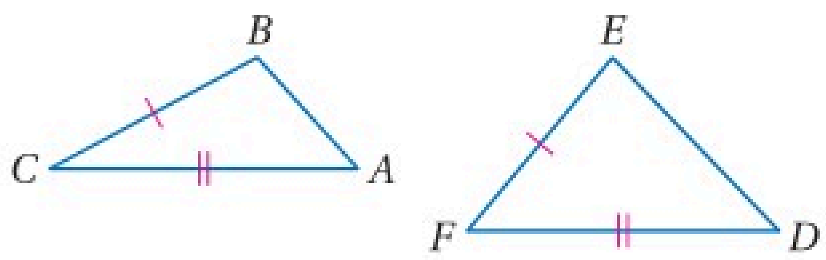
1B) $m\angle SRT$, $m\angle VRT$



برهان متباينة SAS

المعطيات: في المثلثين ABC , DEF ،
$\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $m\angle F > m\angle C$

المطلوب: $DE > AB$

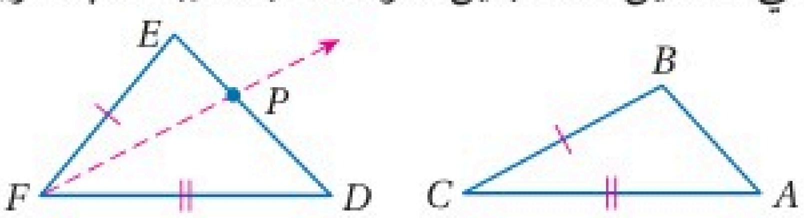


البرهان:

تعلم أنَّ: $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ ، $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ ، وتعلم أيضًا أن: $m\angle F > m\angle C$.

ارسم نصف المستقيم FP،على أن يكون $\overline{PF} \cong \overline{BC}$, $m\angle DFP = m\angle C$ ، وهذا سيقودنا إلى حالتين هما :

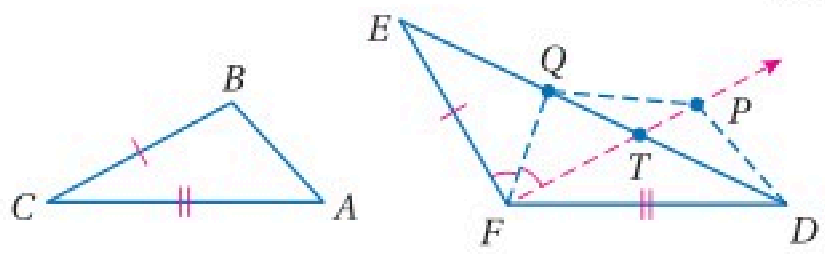
الحالة 1 P تقع على $\overline{DE}$، وعندها يكون $\triangle FPD \cong \triangle CBA$ بحسب SAS، لذا يكون $PD = BA$ ؛ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة، وبحسب تعريف تطابق القطع المستقيمة،



ومسلمة جمع قياسات القطع المستقيمة يكون $DE = EP + PD$ ؛ لذا يكون $DE > PD$ بناءً على تعريف المتباينة، وبالتعويض يكون $DE > AB$

الحالة 2 P لا تقع على $\overline{DE}$

وعندئذٍ سمِّ نقطة تقاطع $\overline{FP}$, $\overline{ED}$ بالحرف T، وارسم القطعة المستقيمة المساعدة $\overline{FQ}$ على أن تكون Q على $\overline{DE}$ ، وتكون $\angle EFQ \cong \angle QFP$ ، ثم ارسم القطعتين المستقيمتين المساعدتين $\overline{PD}$, $\overline{PQ}$.



$\overline{FP} \cong \overline{BC}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	معطى
$\overline{FP} \cong \overline{EF}$	خاصية التعدّي للتطابق
$\overline{QF} \cong \overline{QF}$	خاصية الانعكاس للتطابق
$\angle EFQ \cong \angle QFP$	شرط تحديد النقطة Q
$\triangle EFQ \cong \triangle PFQ$	مسلّمة SAS
$\overline{EQ} \cong \overline{PQ}$	تطابق العناصر المتناظرة
$EQ = PQ$	تعريف التطابق
$m\angle DFP = m\angle C$	شرط تحديد النقطة
$\triangle FPD \cong \triangle CBA$	مسلّمة SAS
$\overline{PD} \cong \overline{BA}$	تطابق العناصر المتناظرة
$PD = BA$	تعريف التطابق
$QD + PQ > PD$	متباينة المثلث
$QD + EQ > PD$	بالتعويض
$ED = QD + EQ$	مسلّمة جمع أطوال القطع المستقيمة
$ED > PD$	بالتعويض
$ED > BA$	بالتعويض

إرشادات للدراسة

متباينتا SSS, SAS
تُعرف المتباينة SAS باسم متباينة الرافعة، وعكسها يُعرف بالمتباينة SSS.

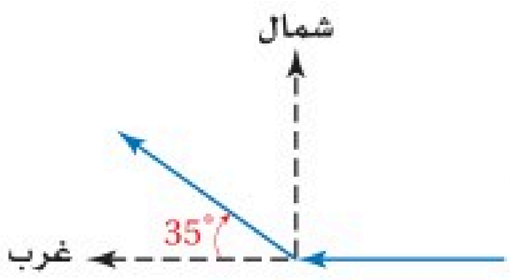
يمكنك استعمال متباينة SAS لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال متباينة SAS

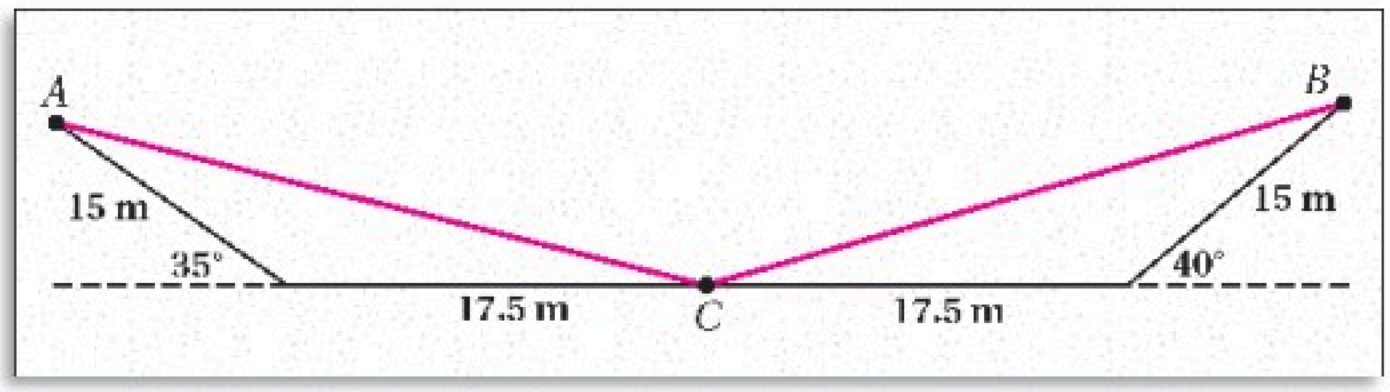
التزلُّج على الجليد: **في إحدى صالات التزلُّج، انطلق اثنان من المتزلِّجين على الجليد من المكان نفسه، فقطع المتزلج A مسافة 17.5 m في اتجاه الغرب، ثم انحرف $35°$ في اتجاه الشمال الغربي قاطعًا 15 m ، بينما قطع المتزلِّج B مسافة 17.5 m في اتجاه الشرق، ثم انحرف $40°$ في اتجاه الشمال الشرقي قاطعًا 15 m ، أيُّهما كان الأبعد عن مكان الانطلاق عند هذه اللحظة؟ وضّح إجابتك.**

افهم: **المعطيات:** قطع المتزلج A مسافة 17.5 m في اتجاه الغرب، ثم انحرف $35°$ في اتجاه الشمال الغربي قاطعًا 15 m، والمتزلج B قطع مسافة 17.5 m في اتجاه الشرق، ثم انحرف $40°$ في اتجاه الشمال الشرقي قاطعًا 15 m.

المطلوب: أيُّهما كان أبعد عن مكان الانطلاق.



خطط: ارسم شكلًا لهذا الوضع.



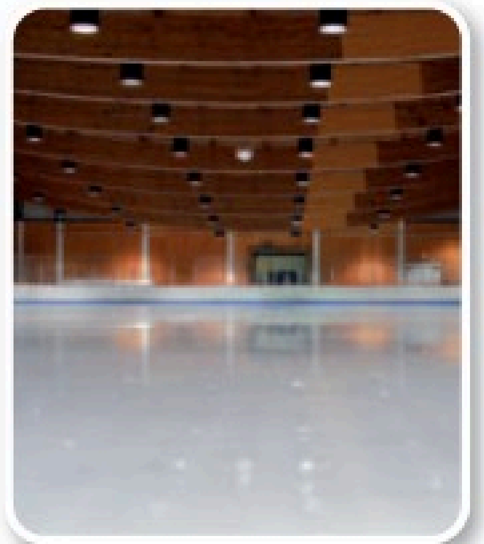
المسار الذي اتّبعه كل متزلج وبعده عن مكان الانطلاق يشكّل مثلثًا؛ إذ قطع كلُّ متزلجٍ 17.5 m ، ثم انحرف وقطع 15 m أخرى.

استعمل أزواج الزوايا المستقيمة لإيجاد قياس الزاويتين المحصورتين، ثم طبّق متباينة SAS؛ لتقارن بين بُعدي المتزلِّجين عن مكان الانطلاق.

حل: قياس الزاوية المحصورة لمسار المتزلج A يساوي $180° - 35°$ أو $145°$ ، وقياس الزاوية المحصورة لمسار المتزلج B يساوي $180° - 40°$ أو $140°$

بما أنّ $145° > 140°$ ، إذن $AC > BC$ بحسب متباينة SAS؛ لذا فالمتزلج A أبعد عن مكان الانطلاق من المتزلج B .

تحقق: المتزلج B انحرف $5°$ أكثر مما فعل المتزلج A في اتجاه مكان الانطلاق؛ لذا سيكون المتزلج B أقرب إلى مكان الانطلاق من المتزلج A . ✔



الربط مع الحياة

ظهرت رياضة التزلج على الجليد في منتصف القرن التاسع عشر، ونُظّمت أولُ بطولة لها عام 1891م، وهي رياضة مشهورة في البلاد الباردة، مثل كندا والدول الاسكندنافية.

إرشادات لحل

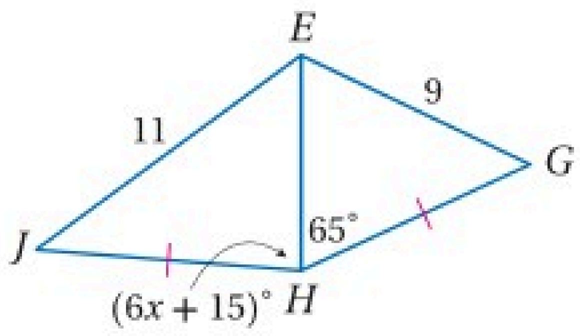
رسم شكل توضيحي
ارسم شكلًا لمساعدتك على فهم المسألة اللفظية وتوضيحها بصورة صحيحة.

تحقق من فهمك

2) **التزلج على الجليد:** انطلقت مجموعتان من المتزلجين من المكان نفسه، فقطعت المجموعة A مسافة 4 mi في اتجاه الشرق، ثم انحرفت $70°$ في اتجاه الشمال الشرقي قاطعةً مسافة 3 mi، وقطعت المجموعة B مسافة 4 mi في اتجاه الغرب، ثم انحرفت $75°$ في اتجاه الشمال الغربي قاطعةً 3 mi، أي مجموعة كانت الأبعد عن مكان الانطلاق عند هذه اللحظة؟ وضح إجابتك.

لإثبات أن الزاوية المحصورة في مثلثٍ أكبر من الزاوية المحصورة في مثلث آخر، استعمل عكس متباينة SAS في الحل.

مثال 3 استعمال الجبر في العلاقات بين مثلثين



جبر: أوجد متباينة تمثل مدى القيم الممكنة لِـ x .

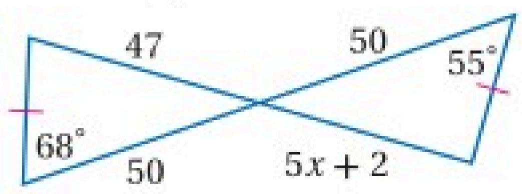
الخطوة 1: من الشكل نعلم أن:
. $\overline{JH} \cong \overline{GH}, \overline{EH} \cong \overline{EH}, JE > EG$

إذن، $m\angle JHE > m\angle EHG$	عكس متباينة SAS
$6x + 15 > 65$	عوِّض
$x > 8\frac{1}{3}$	حُل بالنسبة لِـ x

الخطوة 2: استعمل حقيقة أن قياس أيّ زاوية في المثلث أقل من 180 لكتابة متباينة أخرى.

$m\angle JHE < 180°$	
$6x + 15 < 180$	عوِّض
$x < 27.5$	حُل بالنسبة لِـ x

الخطوة 3: اكتب المتباينتين $x > 8\frac{1}{3}$, $x < 27.5$ في صورةِ متباينةٍ مركّبةٍ بالشكل $8\frac{1}{3} < x < 27.5$

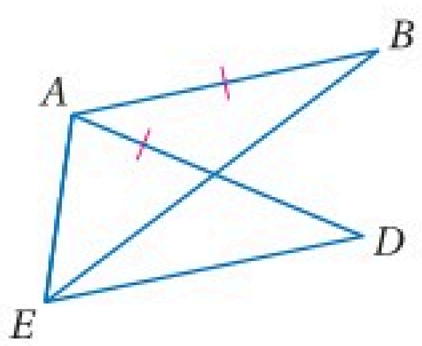


تحقق من فهمك

3) أوجد متباينة تمثل مدى القيم الممكنة لِـ x .

إثبات العلاقات في مثلثين: يمكنك استعمال متباينة SAS وعكسها لإثبات صحّة العلاقات في مثلثين.

مثال 4 إثبات علاقات المثلث باستعمال متباينة SAS



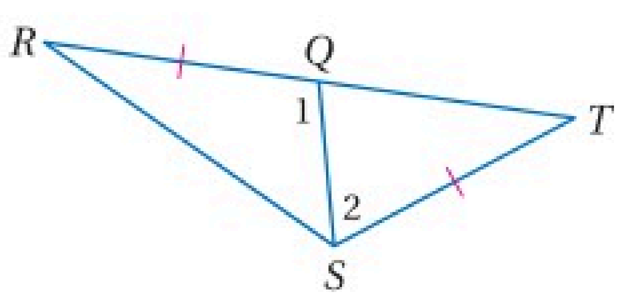
اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{AD}$

المطلوب: $EB > ED$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{AB} \cong \overline{AD}$	**1)** معطى
2) $\overline{AE} \cong \overline{AE}$	**2)** خاصية الانعكاس
3) $m\angle EAB = m\angle EAD + m\angle DAB$	**3)** مسلّمة جمع قياسات الزوايا
4) $m\angle EAB > m\angle EAD$	**4)** تعريف المتباينة
5) $EB > ED$	**5)** متباينة SAS



تحقق من فهمك

4) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$

المطلوب: $RS > TQ$

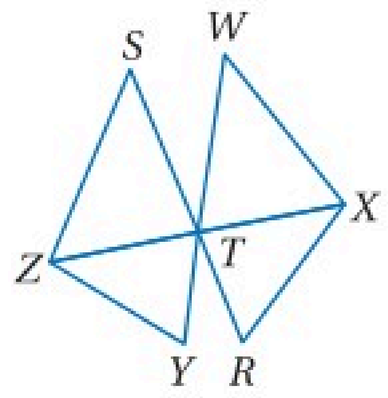
إرشادات للدراسة

استعمال حقائق إضافية

عند إيجاد مدى القيم الممكنة للمتغير x، قد تحتاج إلى استعمال إحدى الحقائق الآتية:

- قياس أي زاوية في المثلث يكون أكبر من 0 وأقل من 180 دائمًا.
- طول أي قطعة مستقيمة يكون أكبر من 0 دائمًا.

مثال 5 إثبات علاقات باستعمال عكس متباينة SAS



اكتب برهانًا تسلسليًّا.

المعطيات: T نقطة منتصف $\overline{ZX}$.

$\overline{ST} \cong \overline{WT}$

$SZ > WX$

المطلوب: $m\angle XTR > m\angle ZTY$

البرهان التسلسلي:

T نقطة منتصف $\overline{ZX}$
معطى

$\overline{ZT} \cong \overline{TX}$
نظرية نقطة المنتصف

$\overline{ST} \cong \overline{WT}$
معطى

$SZ > WX$
معطى

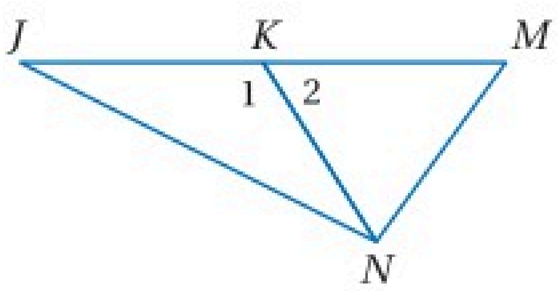
$m\angle STZ > m\angle WTX$
عكس نظرية الرافعة

$\angle STZ \cong \angle XTR$
$\angle WTX \cong \angle ZTY$
الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة

$m\angle STZ = m\angle XTR$
$m\angle WTX = m\angle ZTY$
تعريف تطابق الزوايا

$m\angle XTR > m\angle ZTY$
بالتعويض

تحقق من فهمك



5) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{NK}$ قطعة متوسطة في $\triangle JMN$.

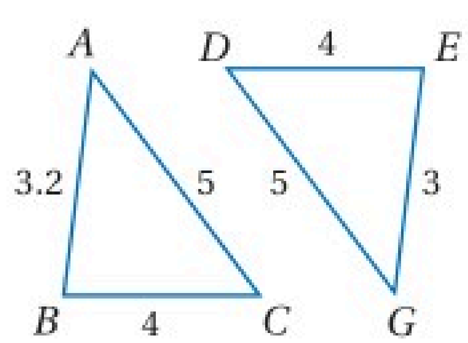
$JN > NM$

المطلوب: $m\angle 1 > m\angle 2$

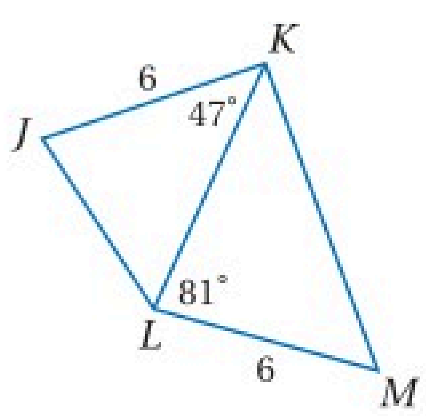
تأكد

المثال 1 قارن بين القياسين المحددين في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

1) $m\angle ACB, m\angle GDE$



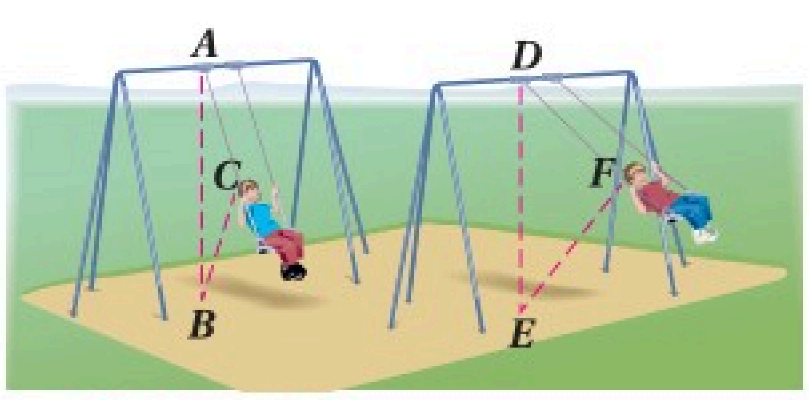
2) JL, KM



المثال 2 **3)** **أراجيح:** يتغيّر موضع الأرجوحة تبعًا لقوّة دفعها.

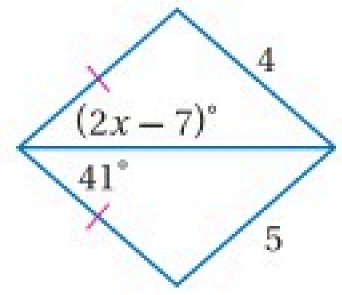
a) أي الأزواج متطابق من هذه القطع المستقيمة؟

b) أيّهما أكبر: قياس $\angle A$ أم قياس $\angle D$ ؟ وضح إجابتك.

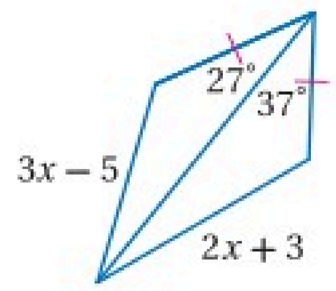


المثال 3 اكتب متباينة تمثل مدى القيم الممكنة لِـ x في كلٍّ مما يأتي:

4)



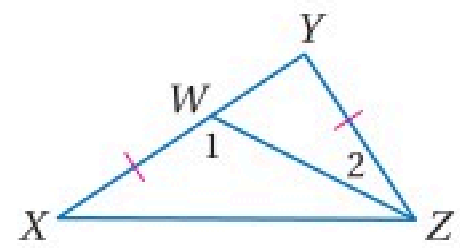
5)



المثالان 4, 5 **برهان** اكتب برهانًا ذا عمودين في كلٍّ من السؤالين 6, 7:

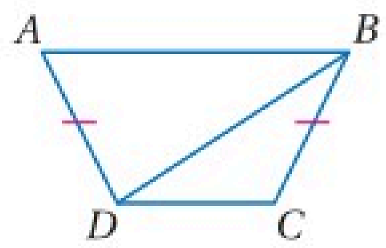
6) **المعطيات:** $\triangle YZX$
$\overline{YZ} \cong \overline{XW}$

المطلوب: $ZX > YW$



7) **المعطيات:** $\overline{AD} \cong \overline{CB}$
$DC < AB$

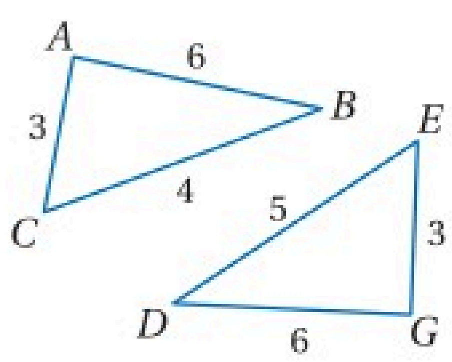
المطلوب: $m\angle CBD < m\angle ADB$



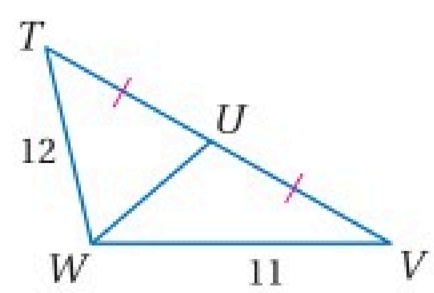
تدرب وحل المسائل

المثال 1 قارن بين القياسين المحددين في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

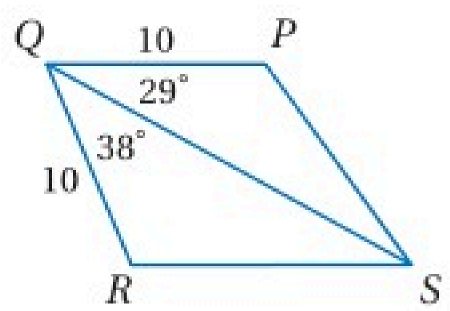
8) $\angle BAC, \angle DGE$



9) $\angle TUW, \angle VUW$



10) PS, SR



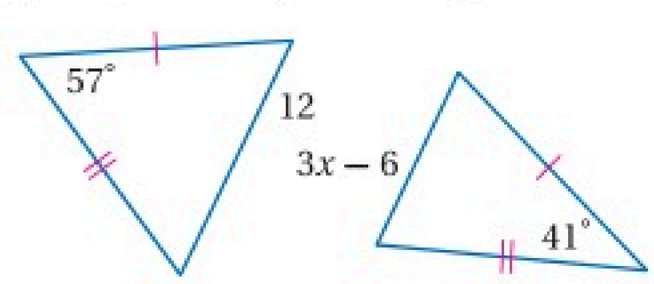
المثال 2 **11)** **رحلة برية:** أقام باسم وعثمان مخيّمًا في الصحراء، وقرّرا أن يقوما برحلة برية، فانطلق باسم من المخيّم وسار $5\,km$ في اتجاه الشرق، ثم انعطف 15° جهة الجنوب الشرقي وسار $2\,km$ أخرى، وانطلق عثمان من المخيم وسار $5\,km$ في اتجاه الغرب، ثم انعطف 35° جهة الشمال الغربي وسار $2\,km$ أخرى.

a) أيُّهما أقرب إلى المخيّم؟ وضّح إجابتك، وارسم شكلًا توضيحيًّا.

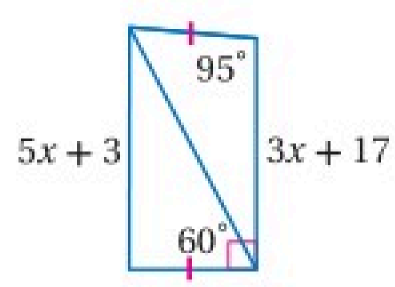
b) افترض أنّ عثمان انعطف 10° في اتجاه الجنوب الغربي بدلًا من 35° في اتجاه الشمال الغربي، فأيهما يكون أبعد عن المخيم؟ وضح إجابتك، وارسم شكلًا توضيحيًّا.

المثال 3 اكتب متباينةً تمثل مدى القيم الممكنة لِـ x في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

12)



13)



14) **خزائن:** خزانتا سليم وماجد مفتوحتان، كما في الشكل المجاور. أيُّ بابَيْ الخزانتين يشكّل زاويةً قياسها أكبر؟ وضّح إجابتك.

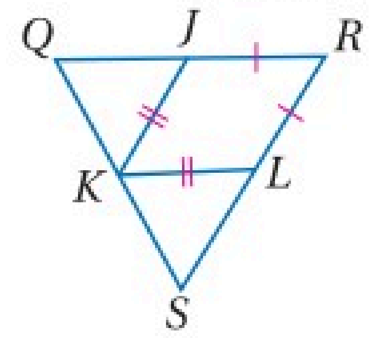
المثالان 5 ,4 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

15) **المعطيات:** $\overline{LK} \cong \overline{JK}$, $\overline{RL} \cong \overline{RJ}$

K نقطة منتصف $\overline{QS}$.

$m\angle SKL > m\angle QKJ$

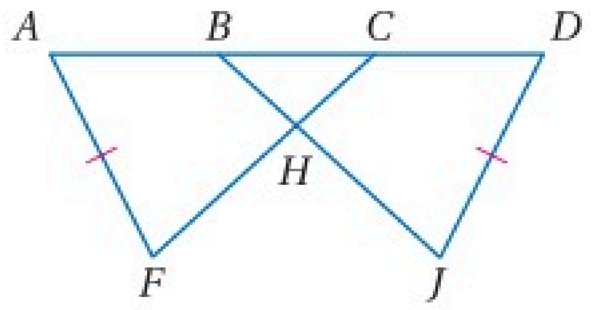
المطلوب: $RS > QR$



16) **المعطيات:** $\overline{AF} \cong \overline{DJ}$, $\overline{FC} \cong \overline{JB}$

$AB > DC$

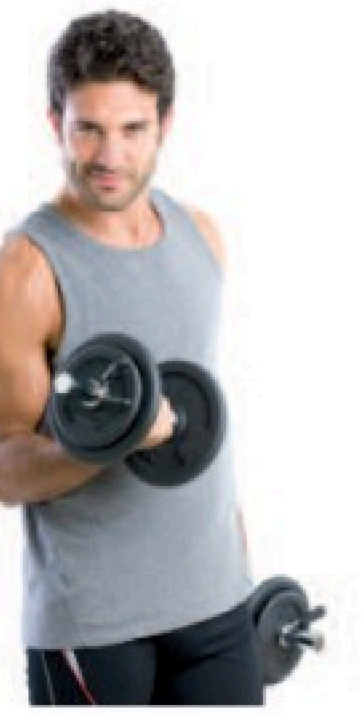
المطلوب: $m\angle AFC > m\angle DJB$



17) **تمرين:** يقوم عبد الله بتمرين العضلة ذات الرأسين .

a) أيُّهما أكبر: المسافة من قبضة اليد إلى الكتف في الوضع 1 ، أم المسافة نفسها في الوضع 2؟ وضّح إجابتك بالقياس.

b) أيُّهما أكبر: قياس الزاوية المتكونة عند المرفق في الوضع 1 ، أم المتكونة في الوضع 2؟ وضّح إجابتك مستعملًا القياسات التي أوجدتها في الفرع **a** وعكس متباينة SAS .



الربط مع الحياة

تمارين اللياقة تزيد القوة والقدرة على التحمل، وينصح معظم خبراء اللياقة الأشخاص المبتدئين بالتدريب ثلاث جلسات في الأسبوع، بحيث تتراوح مدة الجلسة الواحدة من 20 دقيقة إلى ساعة كاملة (متضمنة فترة الإحماء والاسترخاء) على أن يفصل ما بين الجلسة والأخرى يوم واحد على الأقل.

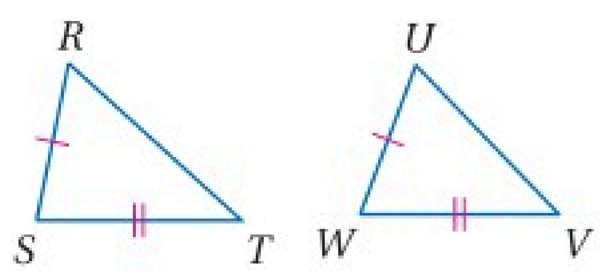
18) **برهان:** استعمل البرهان غير المباشر؛ لإثبات النظرية 4.13 (عكس متباينة SAS).

المعطيات: $\overline{RS} \cong \overline{UW}$

$\overline{ST} \cong \overline{WV}$

$RT > UV$

المطلوب: $m\angle S > m\angle W$



19) **تمثيلات متعدِّدة:** في هذه المسألة ستكتشف مجموع زوايا مضلع.

a) **هندسيًّا:** ارسم ثلاثة مضلعات: ثلاثي، رباعي، خماسي. وسمِّ المضلع الثلاثي ABC ، والرباعي $FGHJ$ ، والخماسي $PQRST$.

b) **جدوليًّا:** انسخ الجدول أدناه في دفترك وأكمله مستعملًا المنقلة لقياس كل زاويةٍ.

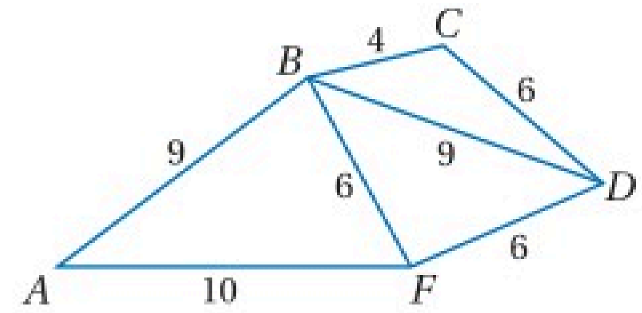
عدد الأضلاع	قياسات الزوايا				مجموع قياسات الزوايا
3	$m\angle A$		$m\angle C$		
	$m\angle B$				
4	$m\angle F$		$m\angle H$		
	$m\angle G$		$m\angle J$		
5	$m\angle P$		$m\angle S$		
	$m\angle Q$		$m\angle T$		
	$m\angle R$				

c) **لفظيًّا:** خمّن العلاقة بين عدد أضلاع المضلع ومجموع قياسات زواياه.

d) **منطقيًّا:** ما نوع التبرير الذي استعملته في الفرع **c** ؟ وضِّح إجابتك.

e) **جبريًّا:** اكتب عبارةً جبريةً؛ لإيجاد مجموع قياسات زوايا مضلعٍ عدد أضلاعه n.

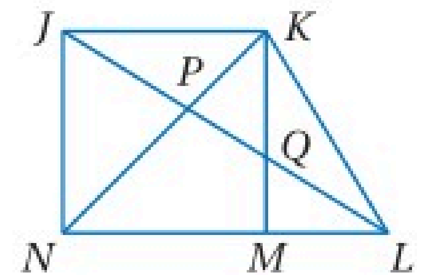
استعمل الشكل المجاور لكتابة متباينةٍ تربط بين قياس كل زوج من الزوايا في السؤالين الآتيين:



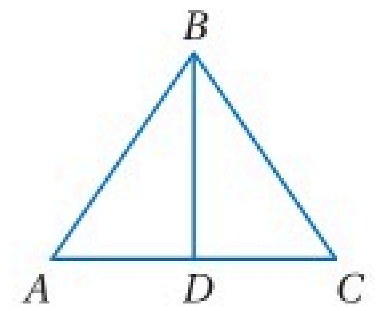
20) $m\angle BDC, m\angle FDB$

21) $m\angle ABF, m\angle FDB$

مسائل مهارات التفكير العليا



22) **تحدٍّ:** في الشكل المجاور، إذا كان: $\overline{KJ} \cong \overline{JN}$ ، $m\angle LJN > m\angle KJL$ ، فأيّ الزاويتين هي الأكبر: $\angle LKN$ أم $\angle LNK$ ؟ وضّح إجابتك.

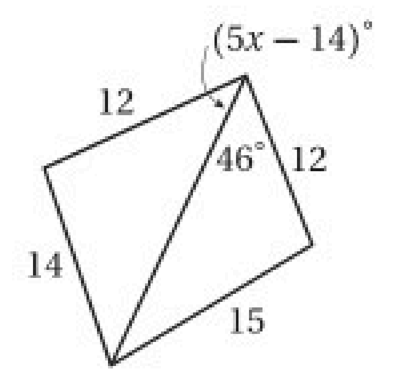


23) **تبرير:** إذا كانت $\overline{BD}$ قطعة متوسطة في $\triangle ABC$ كما في الشكل المجاور، وكان $AB < BC$ ، فهل تكون $\angle BDC$ حادة دائمًا، أو أحيانًا، أو لا تكون حادةً أبدًا؟ وضّح إجابتك.

24) **اكتب:** بيِّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين متباينة SAS والمسلّمة SAS لتطابق المثلثات.

تدريب على اختبار

25) أيٌّ متباينة مما يأتي تصف مدى القيم الممكنة لـ x ؟



A $x > 6$

B $0 < x < 14$

C $2.8 < x < 12$

D $12 < x < 15$

26) إذا كان طول ضلع مربّعٍ $x + 3$ ، فإن طول قطره يساوي:

A $x^2 + 1$

B $x\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$

C $2x + 6$

D $x^2\sqrt{2} + 6$

مراجعة تراكمية

اكتب متباينةً تمثل مدى طول الضلع الثالث في مثلث عُلم طولا ضلعين من أضلاعه في كلٍّ من الأسئلة الآتية: (الدرس 5-4)

27) 3.2 cm, 4.4 cm

28) 5 ft, 10 ft

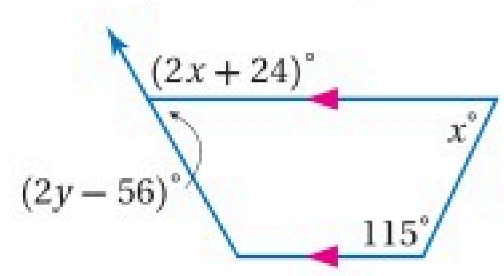
29) 3 m, 9 m

30) **رحلات:** سأل عليّ صديقه ماجدًا عن تكلفة الرحلة التي قام بها مع صديقه، فلم يتذكر ماجد تكلفة الشخص الواحد، ولكنّه تذكر أن التكلفة الكليّة كانت أكثر من 500 ريالٍ. استعمل البرهان غير المباشر لتبيِّن أن تكلفة الشخص الواحد كانت أكثر من 250 ريالًا. (الدرس 4-4)

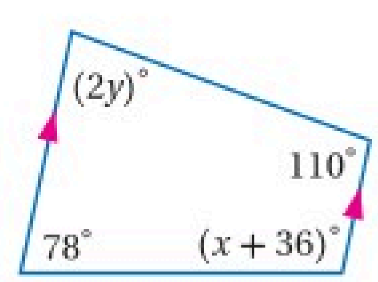
استعد للدرس اللاحق

أوجد قيمة كلٍّ من y , x في الأسئلة الآتية، موضِّحًا إجابتك :

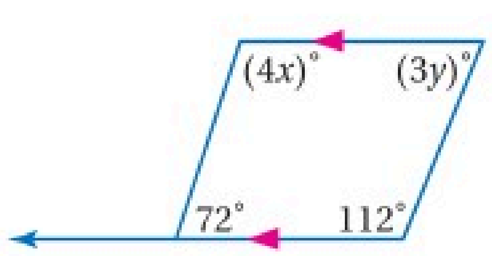
31)



32)



33)



دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسيّة

قطع مستقيمة خاصّة في المثلثات: (الدرسان 2-4 ,1-4)

- القطع المستقيمة الخاصّة بالمثلثات هي الأعمدة المنصِّفة ومنصفات الزوايا والقطع المتوسطة والارتفاعات.
- نقاط تقاطع المستقيمات الخاصّة في مثلث تُسمَّى نقاط التلاقي.
- نقاط التلاقي في مثلث، هي مركز الدائرة الخارجية ومركز الدائرة الداخلية ومركز المثلث ومُلتقى الارتفاعات.

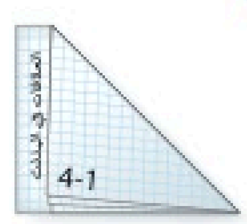
البرهان غير المباشر: (الدرس 4-4)

- كتابة برهان غير مباشر:
  1) افترض أنّ النتيجة غير صحيحة.
  2) بيّن أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض.
  3) بما أن النتيجة الخطأ تؤدي إلى عبارة غير صحيحة، فإن النتيجة الأصليّة ستكون صحيحة.

متباينات المثلث: (الدروس 6-4 ,5-4 ,3-4)

- **متباينة الزاوية الخارجية:** قياس الزاوية الخارجية لمثلث، يكون أكبر من أيٍّ من الزاويتين الداخليَّتين البعيدتين عنها.
- الزاوية الكبرى في مثلث تقابل الضلع الأطول، والزاوية الصغرى تقابل الضلع الأقصر.
- مجموع طولَي أي ضلعين في مثلث يكون أكبر من طول الضلع الثالث.
- **المتباينة SAS:** (نظرية الرافعة) إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني، فإنّ الضلع الثالث في المثلث الأول يكون أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني.
- **المتباينة SSS:** (عكس نظرية الرافعة) إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان الضلع الثالث في المثلث الأول أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني، فإنّ قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول يكون أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني.

المطويات منظم أفكار



تأكد من أنّ المفاهيم الأساسية قد دُوّنت في مطويتك.

المفردات الأساسية

- **العمود المنصف** (ص 81)
- **المستقيمات المتلاقية** (ص 82)
- **نقطة التلاقي** (ص 82)
- **مركز الدائرة الخارجية للمثلث** (ص 82)
- **مركز الدائرة الداخلية للمثلث** (ص 85)
- **القطعة المتوسطة** (ص 91)
- **مركز المثلث** (ص 91)
- **ارتفاع المثلث** (ص 93)
- **ملتقى ارتفاعات المثلث** (ص 93)
- **التبرير غير المباشر** (ص 107)
- **البرهان غير المباشر** (ص 107)
- **البرهان بالتناقض** (ص 107)

اختبار المفردات

بيّن ما إذا كانت كل جملةٍ مما يأتي صحيحةً أو خاطئةً، وإذا كانت خاطئةً فاستبدل بالكلمة التي تحتها خط كلمة من القائمة أعلاه؛ لتجعل الجملة صحيحةً:

1) مركز المثلث هو النقطة التي تتقاطع عندها الارتفاعات .
2) نقطة تلاقي القطع المتوسطة لمثلث تُسمَّى مركز الدائرة الداخلية.
3) نقطة التلاقي هي النقطة التي تتقاطع عندها ثلاثة خطوط أو أكثر.
4) مركز الدائرة الخارجية لمثلث يكون على أبعادٍ متساويةٍ من رؤوس المثلث.
5) لإيجاد مركز المثلث، ارسم منصّفات الزوايا أولًا.
6) لتبدأ برهانًا بالتناقض، أولًا افترض أنّ ما تحاول أن تُثبته صحيح.
7) يستعمل البرهان بالتناقض التبرير غير المباشر.
8) القطعة المتوسطة لمثلثٍ تصل نقطة منتصف ضلع المثلث بمنتصف ضلعٍ آخر للمثلث.
9) مركز الدائرة الداخلية لمثلث هو نقطة تتقاطع عندها منصّفات زوايا المثلث.

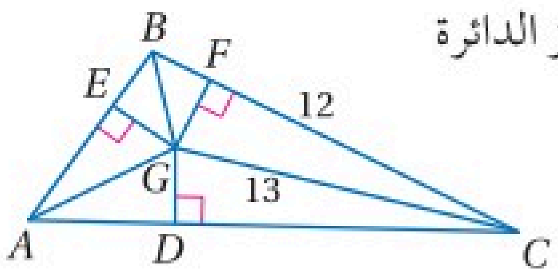
الفصل **4**

دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

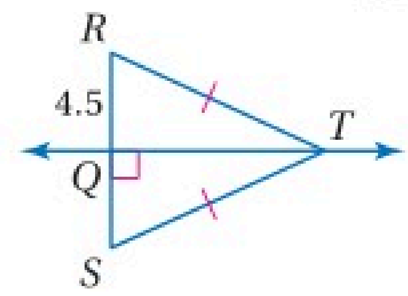
4-1 المنصفات في المثلث (ص 81-89)

10) أوجد EG إذا كانت G مركز الدائرة الداخلية في $\triangle ABC$.

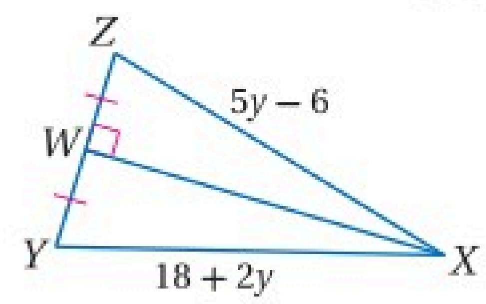


أوجد كل قياسٍ ممّا يأتي :

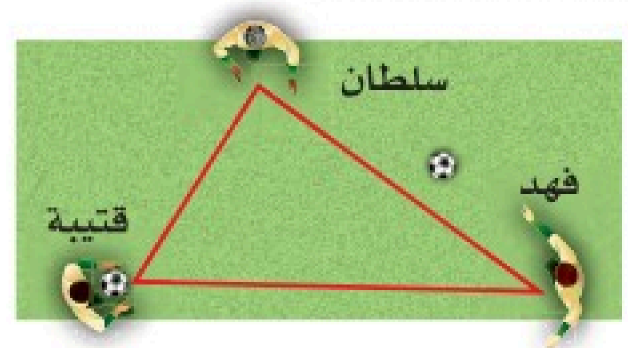
11) RS



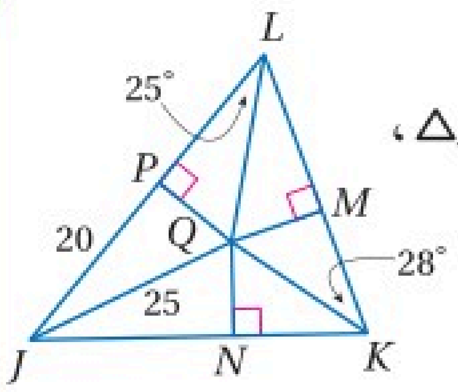
12) XZ



13) **كرة قدم:** يقوم قتيبة وفهد وسلطان بعمليةِ إحماءٍ قبل بدء مباراة كرة قدم، حيث يتطلب أحد تدريبات الإحماء أن يشكّل اللاعبون الثلاثة مثلثًا، ويقف اللاعب الرابع في الوسط. أين يجب أن يقف اللاعب الرابع، بحيثُ يكون على مسافاتٍ متساويةٍ من اللاعبين الثلاثة؟



مثال 1



إذا كانت Q مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle JKL$ ، فأوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

a) $m\angle QJK$

$m\angle KLP + m\angle MKN + m\angle NJP = 180°$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$2(25°) + 2(28°) + m\angle NJP = 180°$ عوّض

$106° + m\angle NJP = 180°$ بسّط

$m\angle NJP = 74°$ اطرح 106 من الطرفين

وبما أنّ $\overrightarrow{JQ}$ ينصّف $\angle NJP$، إذن $2m\angle QJK = m\angle NJP$؛ أيْ أنّ $m\angle QJK = \frac{1}{2} m\angle NJP$؛ إذن: $m\angle QJK = \frac{1}{2} \times 74° = 37°$.

b) QP

$a^2 + b^2 = c^2$ نظرية فيثاغورس

$(QP)^2 + 20^2 = 25^2$ عوّض

$(QP)^2 + 400 = 625$ $20^2 = 400 , 25^2 = 625$

$(QP)^2 = 225$ اطرح 400 من الطرفين

$QP = 15$ بسّط

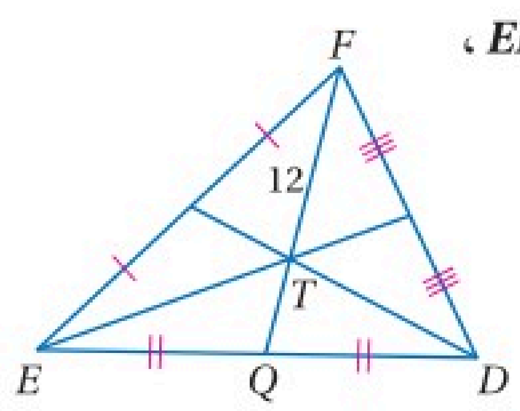
4-2 القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث (ص 91-98)

14) رؤوس $\triangle DEF$ هي $D(0, 0), E(0, 7), F(6, 3)$. أوجد إحداثيات ملتقى ارتفاعات $\triangle DEF$.

15) **احتفالات:** تُريد حفصة أن تعلّق 4 مثلثات متطابقة في سقف غرفة الصف، بحيث تكون موازيةً لأرضية الغرفة. فرسمت نموذجًا لأحد المثلثات على مستوى إحداثي، فكانت إحداثيات رؤوسه هي $(0, 4), (3, 8), (6, 0)$. إذا كان كل مثلث سيُعلّق في السقف بخيطٍ، فما إحداثيات النقطة التي سيُربط الخيط عندها بالمثلث؟

مثال 2

إذا كانت النقطة T مركز المثلث EDF ، $FT = 12$ ، فأوجد TQ



$FT = \frac{2}{3} FQ$

$FT = \frac{2}{3}(FT + TQ)$

$12 = \frac{2}{3}(12 + TQ)$ $FT = 12$

$12 = 8 + \frac{2}{3} TQ$ خاصية التوزيع

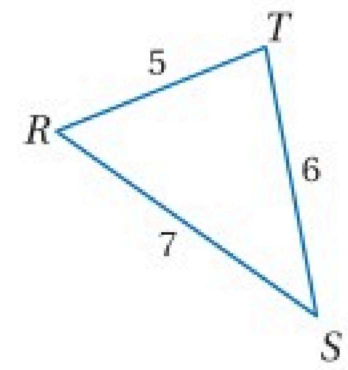
$4 = \frac{2}{3} TQ$ اطرح 8 من الطرفين

$6 = TQ$ اضرب الطرفين في $\frac{3}{2}$

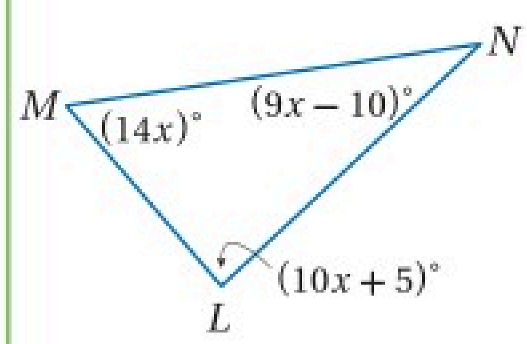
4-3 المتباينات في المثلث (ص 99-105)

اكتب زوايا كل مثلثٍ مرتّبةً من الأصغر إلى الأكبر في السؤالين الآتيين:

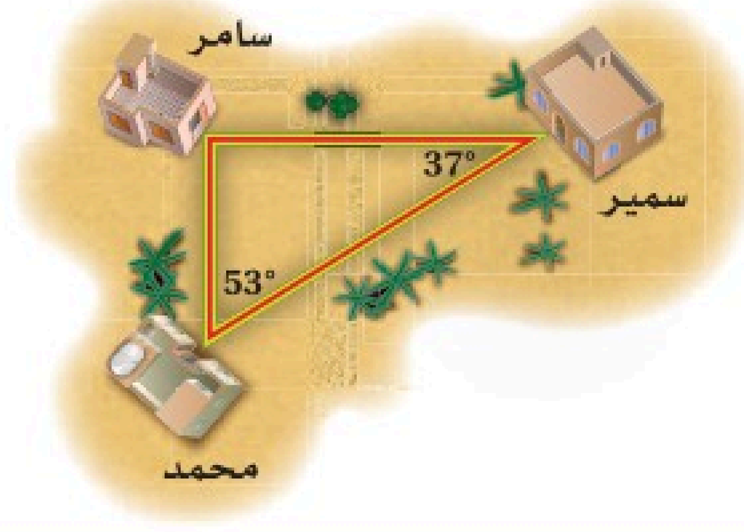
16)



17)

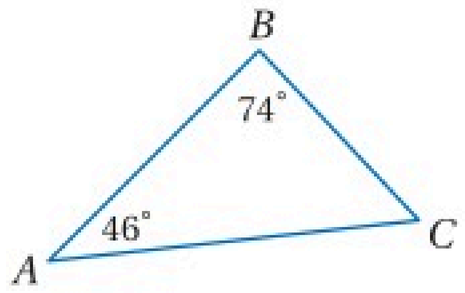


18) **جيران:** يسكن سمير ومحمد وسامر عند تقاطعات ثلاثة شوارع تشكّل المثلث المبين أدناه، إذا أرادوا الالتقاء عند أحدهم، فأي الطريقين أقصر: اصطحاب سمير لمحمد وذهابهما معًا إلى بيت سامر. أم اصطحاب محمد لسامر وذهابهما معًا إلى بيت سمير؟



مثال 3

اكتب زوايا $\triangle ABC$ ، مرتبةً من الأصغر إلى الأكبر.



a) أولًا: أوجد قياس الزاوية المجهولة باستعمال نظرية مجموع قياسات الزوايا. $m\angle C = 180^\circ - (46^\circ + 74^\circ) = 60^\circ$

لذا فالزوايا مرتبةً من الأصغر إلى الأكبر هي: $\angle A, \angle C, \angle B$.

b) والأضلاع مرتبةً من الأقصر إلى الأطول هي: $\overline{BC}, \overline{AB}, \overline{AC}$.

4-4 البرهان غير المباشر (ص 107-113)

اكتب الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهانًا غير مباشرٍ لكل عبارةٍ مما يأتي:

19) $m\angle A \geq m\angle B$.

20) $\triangle FGH \cong \triangle MNO$.

21) $\triangle KLM$ قائم الزاوية.

22) إذا كان $3y < 12$ ، فإنّ $y < 4$.

23) اكتب برهانًا غير مباشر لتبين أنّه إذا كانت الزاويتان متتامّتين، فإنّه لا يمكن أن تكون أيٌّ منهما قائمةً.

24) **مطالعة:** اشترى محمود كتابين بأكثر من 180 ريالًا، استعمل البرهان غير المباشر لتبيِّن أنّ ثمن أحدِهما على الأقل أكثر من 90 ريالًا.

مثال 4

اكتب الافتراض الضروري للبدء في برهان غير مباشرٍ لكل عبارةٍ مما يأتي:

a) $\overline{XY} \not\cong \overline{JK}$

الافتراض هو: $\overline{XY} \cong \overline{JK}$

b) إذا كان $3x < 18$ ، فإن $x < 6$

نتيجة هذه العبارة الشرطية هي:

$x < 6$ ، ونفيها هو $x \geq 6$ ؛ لذا فالافتراض هو $x \geq 6$

c) $\angle 2$ زاوية حادّة.

الافتراض هو: $\angle 2$ ليست زاويةً حادّةً.

دليل الدراسة والمراجعة

4-5 متباينة المثلث (ص 115-120)

حدِّد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلثٍ في كلٍّ مما يأتي أم لا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فوضّح السبب.

25) 5, 6, 9   26) 3, 4, 8

اكتب متباينةً تمثل مدى طول الضلع الثالث في مثلثٍ عُلم طولا ضلعين من أضلاعه في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

27) 5 ft , 7 ft   28) 10.5 cm , 4 cm

29) **درّاجاتٌ:** يركب خالد دراجته لزيارة صديقه وليد، وبما أن الطريق المباشر مُغلق، فقد سلك طريقًا فرعيًّا طوله 2 km، ثم انعطف وسلك طريقًا آخر طوله 3 km حتى وصل منزل وليد. إذا كانت الطرق الثلاثة تشكّل مثلثًا رأسان من رؤوسه هما منزلَا وليد وخالد، فاكتب متباينةً تمثل مدى المسافة الممكنة بين منزلَيهِمَا.

مثال 5

حدِّد ما إذا كانت القياسات (9 , 10 , 7) يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث أم لا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فوضّح السبب.

اختبر كل متباينة.

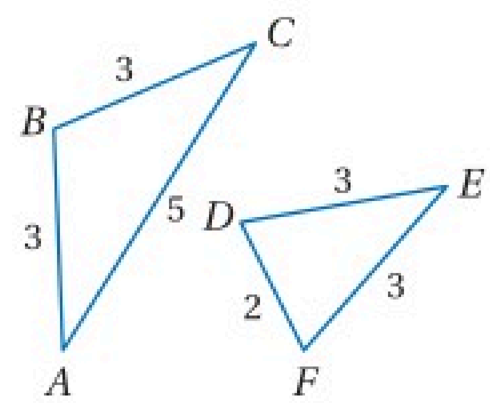
$7 + 10 > 9$ $7 + 9 > 10$ $10 + 9 > 7$

$17 > 9$ ✔ $16 > 10$ ✔ $19 > 7$ ✔

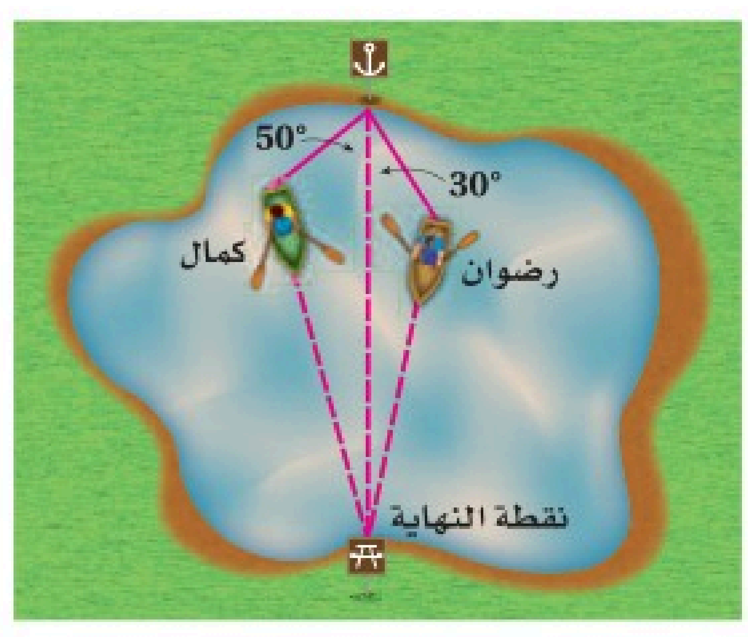
بما أن مجموع طولَي أيِّ ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث، إذن القطع المستقيمة التي أطوالها 9 , 10 , 7 تشكِّل مثلثًا.

4-6 المتباينات في مثلثين (ص 121-128)

30) مستعملًا المثلثين المجاورين، قارن بين القياسين $m\angle ABC , m\angle DEF$



31) **تجديف:** يُجدِّف كلٌّ من رضوان وكمال في بركةٍ متّجِهين إلى نقطةٍ محددةٍ، ولأنه ليس لهما خبرة في التجديف فقد انحرفا عن المسار مدة 4 دقائق، قطع كلٌّ منهما فيها مسافة 50 m ، ثم استعادا مسارهما الصحيح، كما في الشكل. أيهما أقرب إلى نقطة النهاية عند هذه اللحظة؟



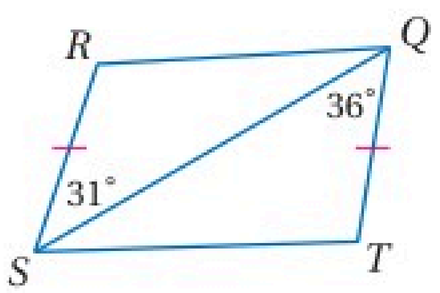
مثال 6

قارن بين كل قياسين فيما يأتي :

a) RQ , ST

بما أن: $\overline{RS} \cong \overline{TQ}, \overline{QS} \cong \overline{QS}, m\angle SQT > m\angle RSQ$

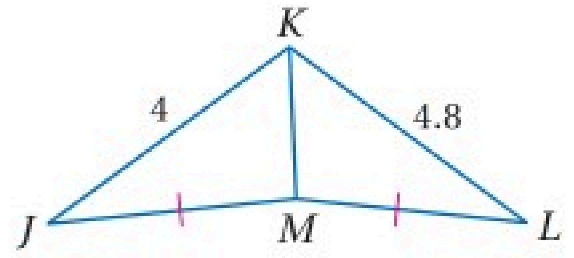
في المثلثين STQ , QRS إذن، $RQ < ST$ بحسب نظرية المفصَّلة.



b) $m\angle KML , m\angle KMJ$

بما أن: $\overline{JM} \cong \overline{LM} , \overline{KM} \cong \overline{KM} , LK > JK$ ،

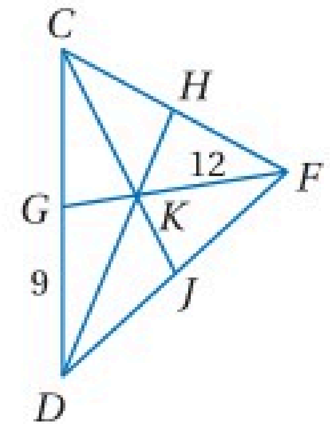
إذن $\angle KML > \angle KMJ$. بحسب عكس نظرية المفصّلة.



اختبار الفصل

1) **حدائق:** يزرع ماجد وردًا في حوض دائري داخل منطقة مثلثة الشكل محدودة بثلاثة طرق للمشاة، أيُّ نقطة من نقاط التلاقي في المثلث سيستعملها مركزًا لأكبر دائرةٍ يمكن رسمها داخل المثلث؟

النقطة K مركز $\triangle CDF$ ، $DK = 16$. أوجد كلَّ طولٍ مما يأتي:



2) KH

3) CD

4) FG

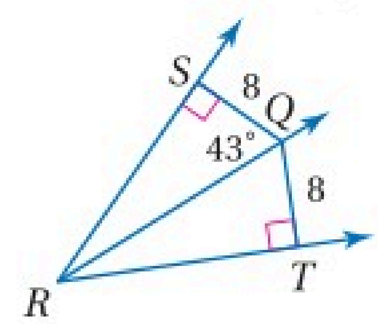
5) **برهان:** اكتب برهانًا غير مباشر.

المعطيات: $5x + 7 \geq 52$

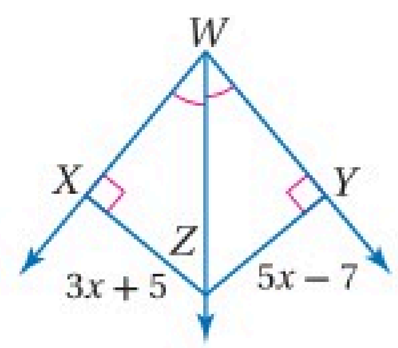
المطلوب: $x \geq 9$

أوجد كلَّ قياسٍ مما يأتي:

6) $m\angle TQR$



7) XZ



8) **اختيار من متعدِّد:** إذا كان طولا ضلعين في مثلث هما 3.1 cm و 4.6 cm ، فما أصغر عددٍ صحيحٍ يمكن أن يكون طولًا للضلع الثالث؟

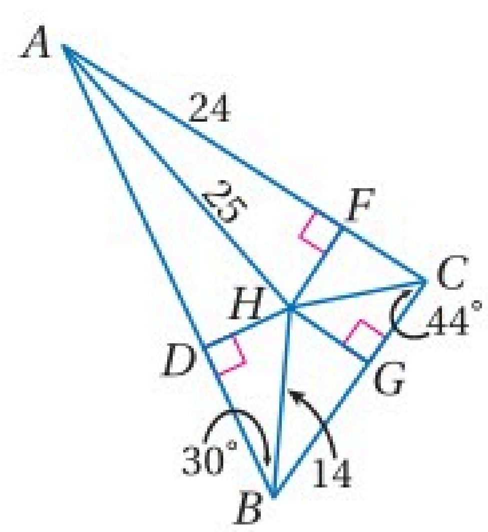
A 1.6 cm

B 2 cm

C 7.5 cm

D 8 cm

إذا كانت H مركز الدائرة الداخلية في $\triangle ABC$ ، فأوجد كلَّ قياسٍ مما يأتي:



9) DH

10) BD

11) $m\angle HAC$

12) $m\angle DHG$

13) **اختيار من متعدِّد:** إذا كان طولا ضلعين في مثلثٍ هما 11 , 5 ، فأيُّ متباينةٍ مما يأتي تمثل مدى طول الضلع الثالث؟

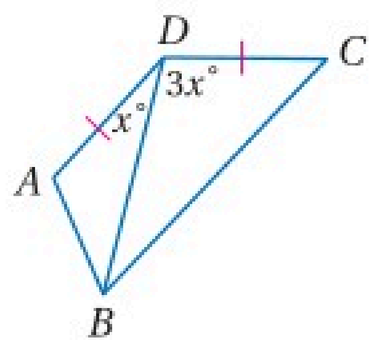
A $6 < x < 10$

B $5 < x < 11$

C $6 < x < 16$

D $x < 5$ أو $x > 11$

14) قارن بين AB , BC في الشكل أدناه.



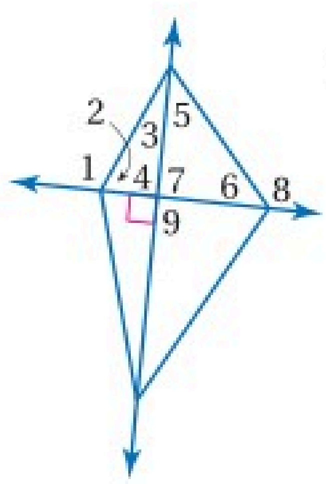
اكتب الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهانًا غير مباشرٍ لكل عبارة مما يأتي:

15) إذا كان 8 عاملًا للعدد n ، فإنّ 4 عامل للعدد n .

16) $m\angle M > m\angle N$

17) إذا كان $3a + 7 \leq 28$ ، فإنّ $a \leq 7$.

استعمل الشكل المجاور، لتحدِّد أي زاوية لها أكبر قياسٍ في كلٍّ من المجموعات الآتية :



18) $\angle 1, \angle 5, \angle 6$

19) $\angle 9, \angle 8, \angle 3$

20) $\angle 4, \angle 3, \angle 2$

أوجد متباينةً تمثل مدى طول الضلع الثالث في المثلث الذي عُلم طولا ضلعين من أضلاعه في كلٍّ من السؤالين الآتيين :

21) 10 ft, 16 ft

22) 23 m, 39 m

استبعاد البدائل غير المعقولة

يمكنك استبعاد البدائل غير المعقولة؛ لتحدّد الإجابة الصحيحة عند حل أسئلة الاختيار من متعدّدٍ.

طرائق استبعاد البدائل غير المعقولة

الخطوة 1

اقرأ نَصَّ السؤال بعناية؛ لتحدّد المطلوب إيجاده بالضبط.

- ما المطلوب حلّه؟
- هل الجواب عدد صحيح أم كسر اعتيادي أم كسر عشري؟
- هل تحتاج إلى استعمال رسمٍ أو جدولٍ؟
- ما وحدات القياس المطلوبة للإجابة (إن وُجدت)؟

الخطوة 2

تفحَّص كل بديل بعناية وقدِّر معقوليته.

- استبعد أي بديل يبدو أنّه غير صحيح.
- استبعد أي بديل ليس ضمن الصيغة المناسبة للإجابة الصحيحة.
- استبعد أي بديل لا يتضمن وحدات القياس الصحيحة.

الخطوة 3

حل السؤال، واختر الإجابة الصحيحة من بين البدائل المتبقية، ثم تحقق من إجابتك.

مثال

اقرأ المسألة، وحدّد المطلوب، ثم استعمل المعطيات في حلّها.

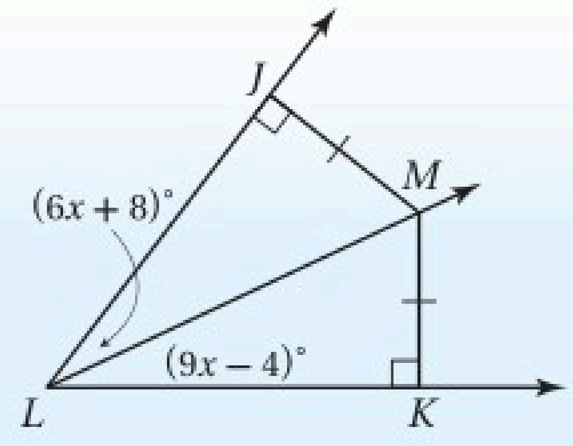
ما قياس $\angle KLM$؟

A $32°$

B $44°$

C $78°$

D $94°$



اقرأ السؤال وادرس الشكل بعناية. المثلث KLM قائم الزاوية. وبما أن مجموع قياسات الزوايا الداخلية لأي مثلث يساوي $180°$ ، فإن $m\angle KLM + m\angle LMK$ يجب أن يساوي $90°$ ، وإلا زاد المجموع على $180°$ ، وبما أن البديل D هو قياس لزاوية منفرجة، فإنّه يُستبعد لعدم معقوليته؛ وعليه فالجواب الصحيح يكون A أو B أو C .

حل المسألة. بحسب عكس نظرية منصّف الزاوية التي تنصُّ على أنّه: "إذا وقعت نقطة داخل زاويةٍ، وكانت على بعدين متساويين من ضلعَيها، فإنّ هذه النقطة تقع على منصف الزاوية" ، وبما أنّ النقطة M على بُعدين متساويين من ضلعي الزاوية LJ, LK ، فإنّها تقع على منصّف $\angle JLK$ ؛ لذا $\angle JLM$ يجب أن تطابق $\angle KLM$ ؛
والآن اكتب معادلةً لإيجاد قيمة x وحلها.

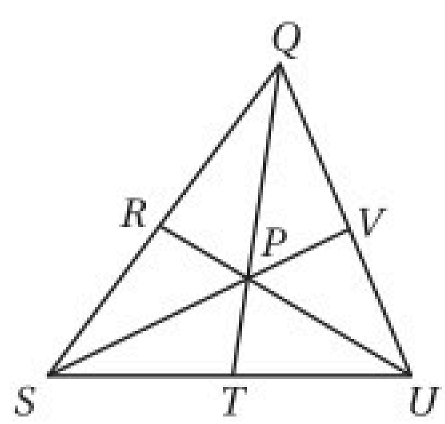
$$6x + 8 = 9x - 4$$
$$-3x = -12$$
$$x = 4$$

إذن $m\angle KLM = [9(4) - 4]° = 32°$ ، والبديل A يمثل الإجابة الصحيحة.

تمارين ومسائل

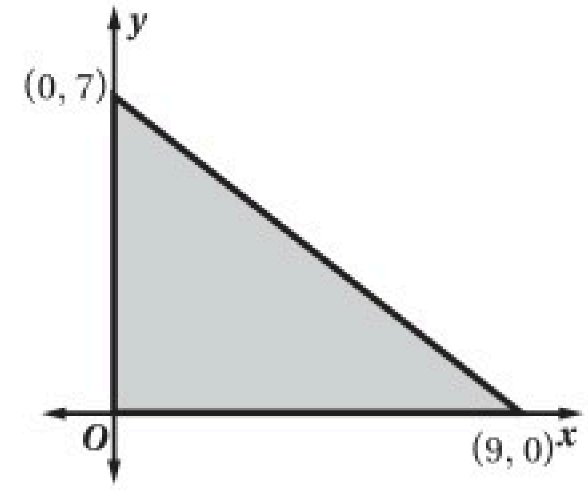
اقرأ كلّ سؤال فيما يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة:

1) النقطة P مركز المثلث QUS ، إذا كان $QP = 14$ cm ، فما طول $\overline{QT}$ ؟



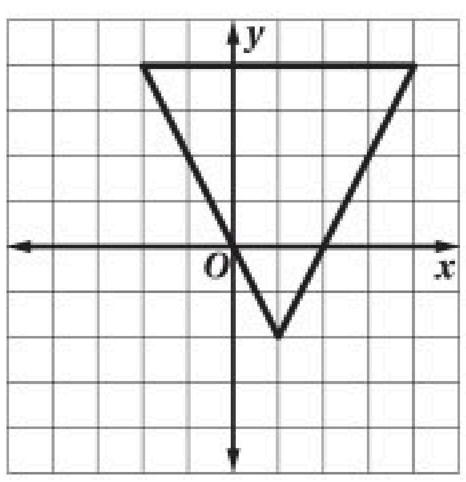
A 7 cm
B 12 cm
C 18 cm
D 21 cm

2) كم وحدةً مربعةً مساحة المثلث في الشكل أدناه؟



A 8
B 27.4
C 31.5
D 63

3) ما إحداثيات ملتقى ارتفاعات المثلث أدناه؟



A $\left(-\frac{3}{4}, -1\right)$
B $\left(-\frac{4}{3}, 1\right)$
C $\left(1, \frac{5}{2}\right)$
D $\left(1, \frac{9}{4}\right)$

4) إذا كان $\triangle ABC$ متطابق الضلعين، وكان $m\angle A = 94°$ ، فأيٌّ مما يأتي يجب أن تكون صحيحة؟

A $m\angle B = 94°$
B $m\angle B = 47°$
C $AB = BC$
D $AB = AC$

5) أيٌّ مما يأتي يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية؟

A 1.9, 3.2, 4
B 1.6, 3, 3.4
C 3, 7.2, 7.5
D 2.6, 4.5, 6

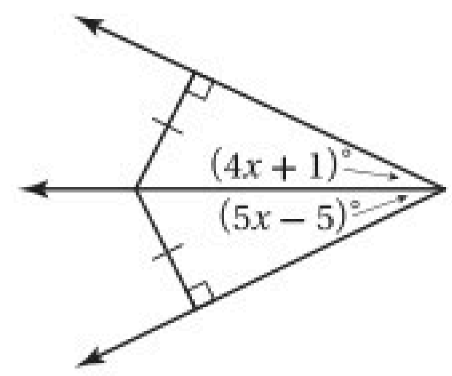
اختبار تراكمي

للفصول 1-4

أسئلة الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال مما يأتي، ثم حدِّد رمز الإجابة الصحيحة:

1) أوجد قيمة x.



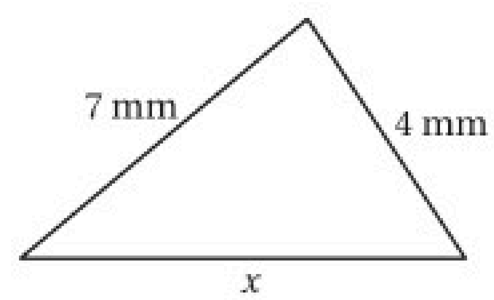
A 3

B 4

C 5

D 6

2) أيٌّ مما يأتي **لا** يمكن أن يكون قيمة لِـ x ؟



A 8 mm

B 9 mm

C 10 mm

D 11 mm

3) أيٌّ مما يأتي أفضل وصف لأقصر مسافةٍ من أحد رؤوس مثلثٍ إلى الضلع المقابل له؟

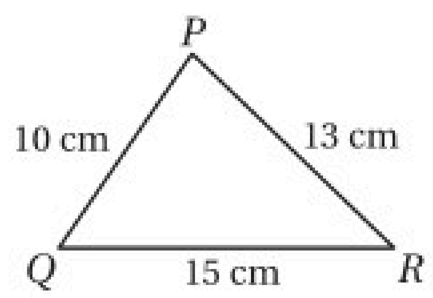
A ارتفاع

B عمود منصف

C قطعة متوسطة

D قطعة مستقيمة

4) ما العلاقة الصحيحة بين قياسات زوايا $\triangle PQR$؟



A $m\angle R < m\angle Q < m\angle P$

B $m\angle R < m\angle P < m\angle Q$

C $m\angle Q < m\angle P < m\angle R$

D $m\angle P < m\angle Q < m\angle R$

5) ما الافتراض الضروري الذي تبدأ به برهانًا غير مباشر للعبارة "الزاوية S ليست زاويةً منفرجةً"؟

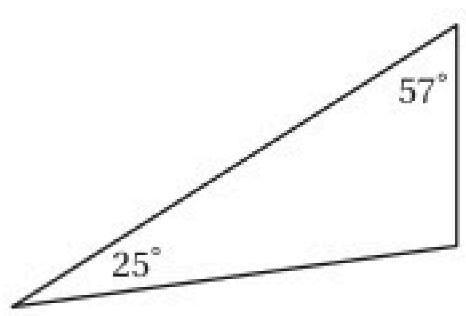
A $\angle S$ زاوية قائمة

B $\angle S$ زاوية منفرجة

C $\angle S$ زاوية حادّة

D $\angle S$ ليست زاوية حادّة

6) صنِّف المثلث أدناه تبعًا لقياسات زواياه.



A حادّ الزوايا

B متطابق الزوايا

C منفرج الزاوية

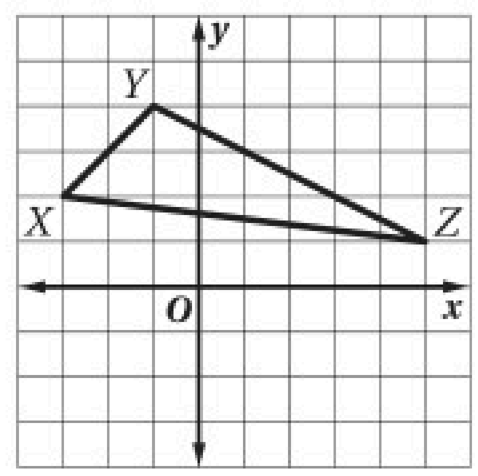
D قائم الزاوية

أسئلة ذات إجابات قصيرة

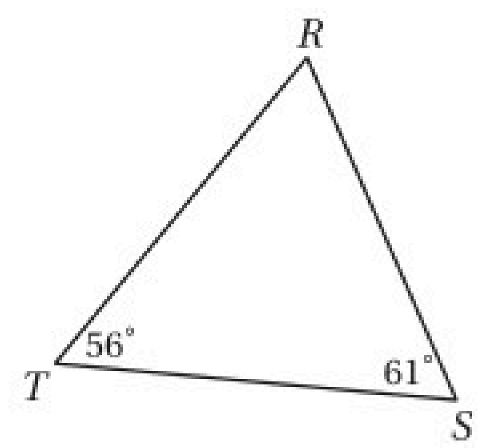
أجب عن الأسئلة الآتية:

7) إذا كان طولا ضلعين في مثلثٍ هما $15\,cm$, $9\,cm$ ، فما أصغر عددٍ صحيحٍ من السنتمترات يمكن أن يكون طولًا للضلع الثالث؟

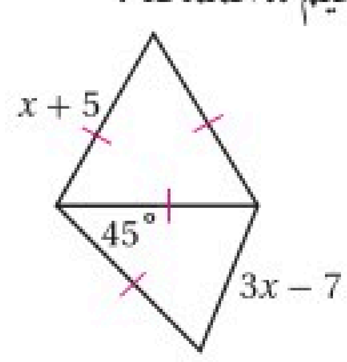
8) ما إحداثيات ملتقى ارتفاعات المثلث أدناه؟



9) اكتب أضلاع المثلث أدناه مرتّبةً تبعًا لأطوالها من الأقصر إلى الأطول:

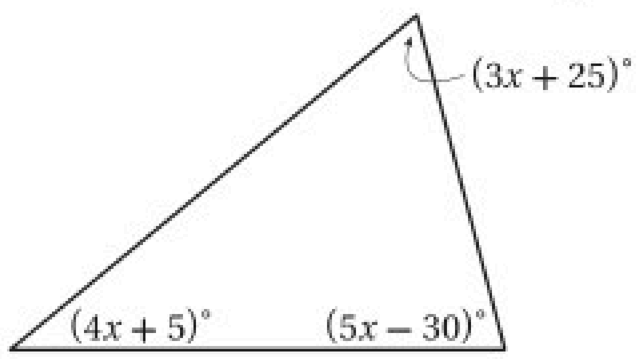


10) اكتب متباينةً تصف قيم x الممكنة.



11) خرج كلٌّ من حمزة وهاني مع فرقة الكشافة وخيّموا في الصحراء، فترك حمزةُ المخيم وسار $2\,km$ في اتجاه الشرق. ثم انعطف $20°$ في اتجاه الجنوب الشرقي. وسار $4\,km$ أخرى. وأما هاني فسار $2\,km$ في اتجاه الغرب، ثم انعطف $30°$ في اتجاه الشمال الغربي، وسار $4\,km$ أخرى. أيُّهما أبعد عن المخيم؟

12) أوجد قيمة x في المثلث أدناه.



أسئلة ذات إجابات مطولة

13) إذا كانت رؤوس $\triangle ABC$ هي $A(-3, 1), B(0, 2)$, $C(3, 4)$ ، فأجب عن الأسئلة التالية مبيِّنًا خطوات الحل:

a) ارسم هذا المثلث في المستوى الإحداثي.

b) أوجد أطوال أضلاعه (قرِّب إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ).

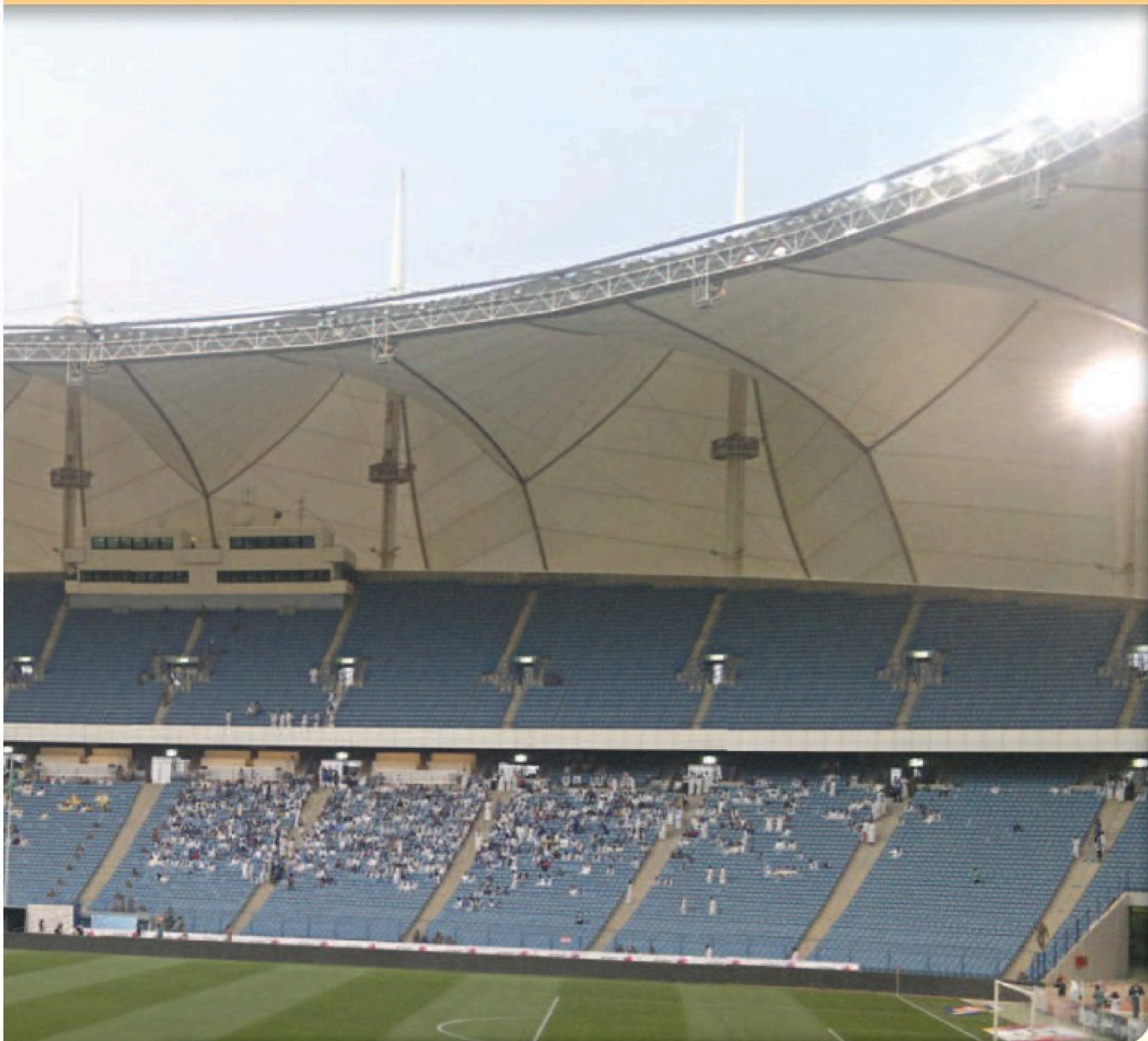
c) صنِّفِ المثلث من حيث أضلاعه وزواياه.

d) قارن بين $m\angle A, m\angle C$.

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟

إذا لم تستطع الإجابة عن ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
فعد إلى الدرس...	4-1	4-5	4-2	4-3	4-4	3-1	4-5	4-2	4-3	4-6	4-6	3-2	3-1, 4-3

الفصل
5
الأشكال الرباعية
Quadrilaterals



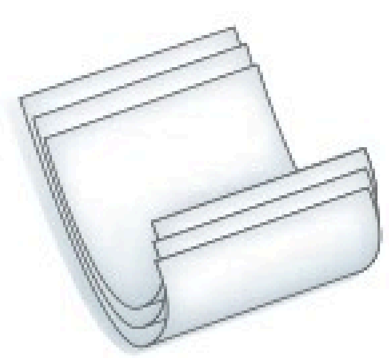
فيما سبق:
درستُ تصنيف المضلعات وميَّزت خصائصها وطبَّقتُها.

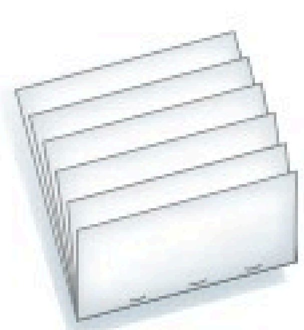
والآن:
- أجد مجموع قياسات كل من الزوايا الداخلية والخارجيَة لمضلع، وأستعملها.
- أتعرف خصائص الأشكال الرباعية، وأطبَقها.
- أقارن بين الأشكال الرباعيَة.

لماذا؟
أدوات رياضية: تُستعمل خصائص الأشكال الرباعيَة لإيجاد قياسات زوايا أو أطوال أضلاع، كقياس زوايا الملاعب وتخطيطها.

المطويات منظم أفكار
الأشكال الرباعيَة: اعملْ هذهِ المطويَّةَ لتساعدَكَ على تنظيمِ معلوماتِكَ حول الفصل 5 . ابدأْ بثلاثِ أَوراقِ A4 .

1. ضَعْ 3 أوراق بعضها فوق بعض بحيثُ تبعد كل ورقة عن الأخرى 2 cm
2. اطوِ الأوراقَ بحيث تكون لحوافها الظاهرة العرض نفسه.
3. ثَبِّت الأوراقَ على طُولِ خطِّ الطَّيِّ.
4. أُكتبْ عنوان الفصل وأرقام الدُّروسِ، وسجِّلْ مُلاحظاتِكَ.





التهيئة للفصل 5

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

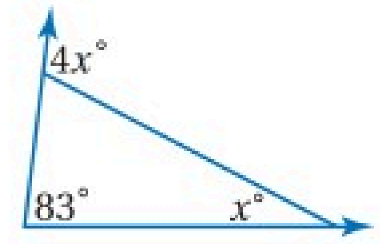
تشخيص الاستعداد:

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

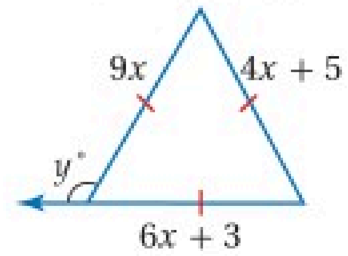
اختبار سريع

أوجد قيم x, y في كل مما يأتي مقرّبًا إلى أقرب عُشر:

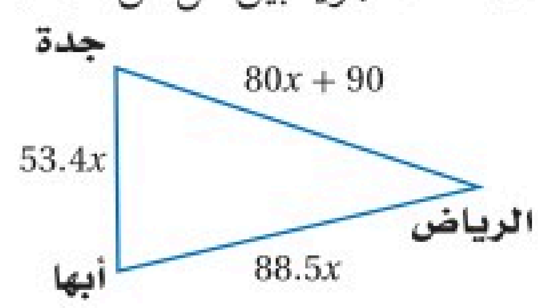
1)



2)



3) **مدن:** تمثل مواقع كل من الرياض وجدة وأبها رؤوس مثلث كما في الشكل أدناه. إذا كان محيط هذا المثلث 2198 km، فأوجد المسافة الجوية بين كل من المدن الثلاث.



حدِّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كل مما يأتي:

4) $A(3, 3), B(8, 2), C(6, -1), D(1, 0)$

5) $A(4, 2), B(1, -3), C(-3, 5), D(2, 2)$

6) $A(-8, -7), B(4, -4), C(-2, -5), D(1, 7)$

7) **حدائق:** صمَّم مهندس رسمًا لحديقة رباعيّة الشكل، إحداثيات رؤوسها: $A(-2, 1), B(3, -3), C(5, 7),$ $D(-3, 4)$. إذا رسم ممرين يقطعانها $\overline{AC}$, $\overline{BD}$. فهل الممران متعامدان؟ فسّر إجابتك.

أوجد المسافة بين كل نقطتين، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصف القطعة الواصلة بينهما في كل مما يأتي:

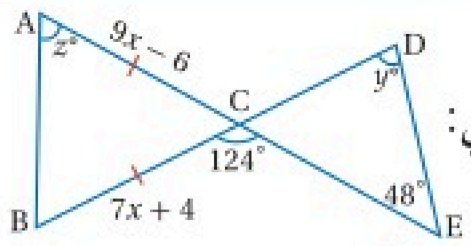
8) $J(-6, 2), K(-1, 3)$ 9) $R(2, 5), S(8, 4)$

10) **مسافات:** وقف شخص على النقطة $T(80, 20)$ من مستوى إحداثي، ورغب في الانتقال إلى كل من $U(20, 60)$ وَ $V(110, 85)$. فما أقصر مسافة يمكن أن يقطعها الشخص؟ فسِّر إجابتك.

مراجعة سريعة

مثال 1

أوجد (x, y, z) في الشكل الآتي:



$AC = BC$	معطى
$9x - 6 = 7x + 4$	بالتعويض
$2x = 10$	بالطرح
$x = 5$	بالتبسيط
$124° = y° + 48°$	نظريّة الزاوية الخارجية للمثلث
$(y) = 76°$	بالتبسيط
$124° = z° + z°$	نظريّة الزاوية الخارجية للمثلث
$124° = 2z°$	بالجمع
$z° = 62°$	بالتبسيط

مثال 2

إذا كان $A(-2, 5), B(4, 17), C(0, 1), D(8, -3)$ ، فحدّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ صيغة الميل

ميل $\overleftrightarrow{AB}$: $\frac{17 - 5}{4 - (-2)} = \frac{12}{6} = 2$

ميل $\overleftrightarrow{CD}$: $\frac{-3 - 1}{8 - 0} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$

بما أن ميلي المستقيمين غير متساويين، فهما غير متوازيين.

$2(-\frac{1}{2}) = -1$ حاصل ضرب ميلي $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$

وبما أن حاصل ضرب ميليهما يساوي -1، فهما متعامدان.

مثال 3

أوجد المسافة بين النقطتين $J(2, -1), K(7, 1)$ ، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما.

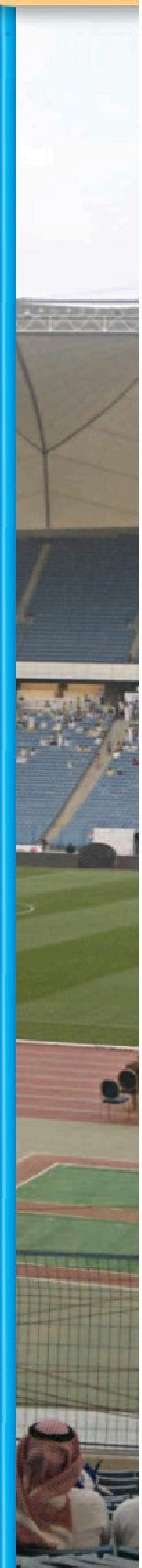
$JK = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ صيغة المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{(7 - 2)^2 + (1 - (-1))^2}$ بالتعويض

$= \sqrt{29}$ بالتبسيط

$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{2 + 7}{2}, \frac{-1 + 1}{2}\right)$ صيغة نقطة المنتصف

$= (4.5, 0)$



5-1 زوايا المضلع
Angles of Polygon

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ أسماء المضلعات وتصنيفها.
(مهارة سابقة)

والآن:

- أجِدُ مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع، وأستعمله.
- أجِدُ مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة لمضلع، وأستعمله.

المفردات:

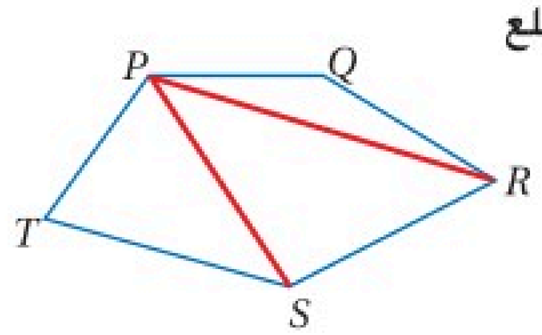
القطر
diagonal

لماذا؟

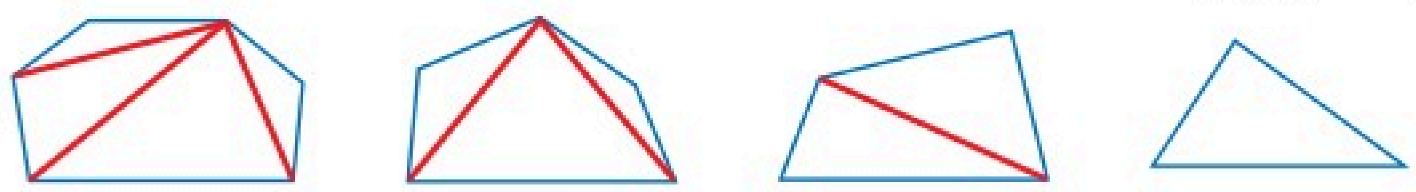
تنتج عاملات النحل اليافعة شمعًا تشكّله بعناية نحلات أخريات على صورة خلايا سداسيّة. ومع أنّ سُمْكَ جدران الخلايا 0.1 mm، إلّا أنّها تتحمّل ثقلًا يعادل 25 مثل وزنها. وتشكّل جدران الخلايا الزاوية نفسها عند كل التقاء. وقياس هذه الزاوية يساوي قياس الزاوية الداخلية للسداسي المنتظم.

مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع:

قطر المضلع هو قطعة مستقيمة تصل بين أي رأسين غير متتاليين فيه. رأسا المضلع $PQRST$ غير التاليين للرأس P، هما: R, S؛
لذا فالمضلع $PQRST$ له قطران من الرأس P، هما: $\overline{PR}, \overline{PS}$.
لاحظ أن هذين القطرين يقسمان الشكل الخماسي إلى ثلاثة مثلثات.



مجموع قياسات زوايا المضلع يساوي مجموع قياسات زوايا المثلثات التي تتشكّل عند رسم جميع الأقطار الممكنة من أحد الرؤوس.



مثلث رباعي خماسي سداسي

بما أن مجموع قياسات زوايا المثلث °180، فإنّه يمكننا إنشاء جدول والبحث عن نمط لإيجاد مجموع قياسات زوايا أي مضلع محدّب.

المضلع	عدد الأضلاع	عدد المثلثات	مجموع قياسات الزوايا الداخلية
مثلث	3	1	$180^\circ\,(1) = 180^\circ$
رباعي	4	2	$180^\circ\,(2) = 360^\circ$
خماسي	5	3	$180^\circ\,(3) = 540^\circ$
سداسي	6	4	$180^\circ\,(4) = 720^\circ$
ذو n من الأضلاع	n	$n-2$	$180^\circ\,(n-2)$

وهذا يقودنا إلى النظرية الآتية:

مراجعة المفردات

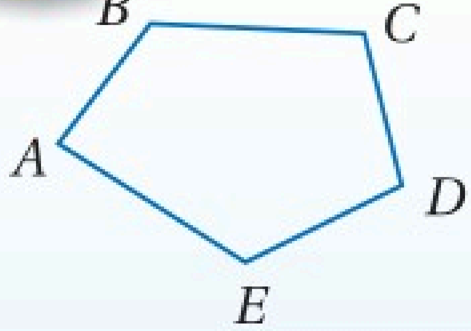
المضلع: هو شكل مغلق، يتكوّن من ثلاث قطع مستقيمة أو أكثر، تلتقي كل قطعة بطرفي قطعتين أخريين من المضلع، ولا تقع أي قطعتين منها على استقامة واحدة، وتكون رؤوس المضلع هي أطراف القطع المستقيمة فيه.

نظرية 5.1 مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع

أضف إلى مطويتك

مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع محدّب عدد أضلاعه n يساوي $S = (n-2) \cdot 180^\circ$.

مثال:



$$m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D + m\angle E = (5-2) \cdot 180^\circ = 540^\circ$$

مراجعة المفردات

الزاوية الداخلية: هي الزاوية المحصورة بين ضلعين متجاورين في مضلع وتقع داخله.

ستبرهن نظرية 5.1 في السؤال 38

يمكنك استعمال النظرية 5.1 لإيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع والقياسات المجهولة لزواياه.

مثال 1 إيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع

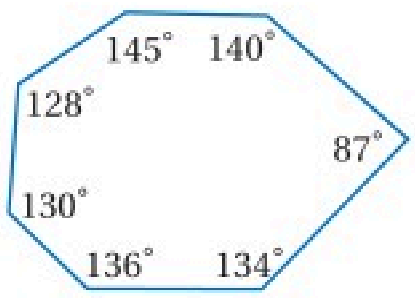
a) أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للسباعي المحدّب.

السباعي المحدب له سبعة أضلاع. استعمل النظرية 5.1 ؛ لإيجاد مجموع قياسات زواياه الداخليّة.

$$(n-2)\cdot 180° = (7-2)\cdot 180° \qquad n=7$$

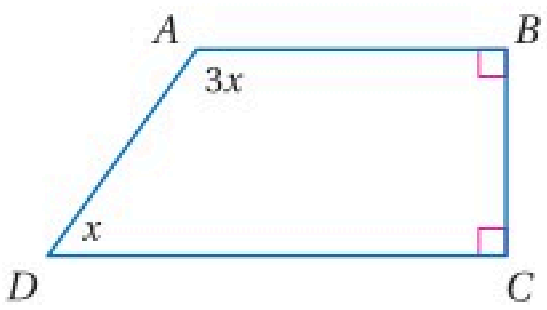
$$= 5\cdot 180° = 900° \qquad \text{بالتبسيط}$$

إذن فمجموع قياسات الزوايا الداخليّة للسباعي المحدّب يساوي 900°.



ارسم سباعيًّا محدّبًا، واستعمل المنقلة لقياس كل زاوية داخليّة مقربًا إلى أقرب درجة، ثم أوجد مجموع هذه القياسات.

$128°+145°+140°+87°+134°+136°+130° = 900°$ ✓



b) جبر: أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية للرباعي المجاور.

الخطوة 1: أوجد قيمة (x).

بما أن للشكل الرباعي 4 زوايا، فإن مجموع قياسات زواياه الداخليّة يساوي $(4-2)\cdot 180° = 360°$.

$360° = m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D$	مجموع قياسات الزوايا الداخليّة
$360° = 3x + 90° + 90° + x$	بالتعويض
$360° = 4x + 180°$	بتجميع الحدود المتشابهة
$180° = 4x$	بطرح 180° من كلا الطرفين
$45° = x$	بقسمة كلا الطرفين على 4

الخطوة 2: استعمل قيمة x لإيجاد قياس كل زاوية.

$m\angle D = x = 45°$

$m\angle B = 90°$

$m\angle C = 90°$

$m\angle A = 3x = 3(45°) = 135°$

اكتب قياسات الزوايا الداخلية للرباعي، ثم أوجد مجموع هذه القياسات.

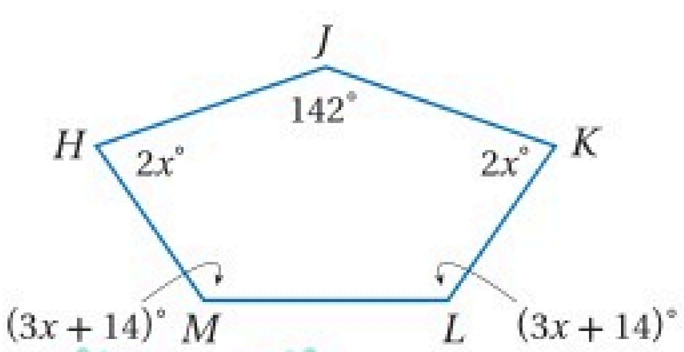
$90°, 90°, 45°, 135°$

$90° + 90° + 45° + 135° = 360°$ ✓

تحقق من فهمك

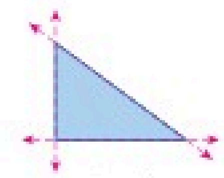
1A) أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للثماني المحدّب.

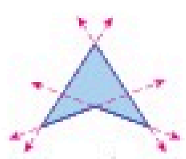
1B) أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية للخماسي المجاور.



مراجعة المفردات

المضلع المحدّب: مضلع يكون قياس أيّ من زواياه الداخلية أقل من 180°، ولا يقطع امتداد أي ضلع فيه أي ضلع آخر من أضلاع المضلع.


مضلع محدب


مضلع مقعر

إرشادات للدراسة

المضلع: عند ذكر كلمة مضلع في هذا الفصل فإننا نعني المضلع المحدّب.

تذكّر أن جميع الزوايا الداخليّة للمضلع المنتظم متطابقة. ويمكنك استعمال هذه الحقيقة ونظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع لإيجاد قياس الزاوية الداخلية لأي مضلع منتظم.

مراجعة المفردات

المضلع المنتظم: هو مضلع محدَّب جميع أضلاعه متطابقة، وجميع زواياه متطابقة.

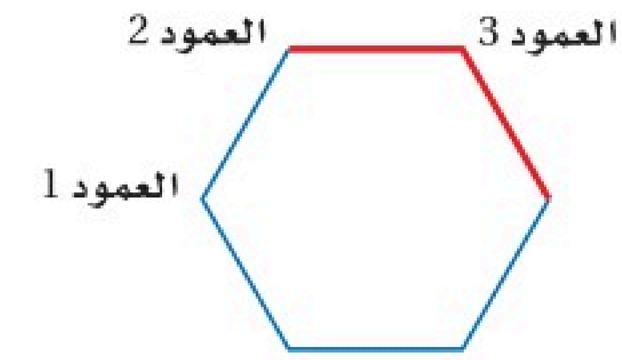
مثال 2 من واقع الحياة قياس الزاوية الداخليّة لمضلع منتظم

مظلة: في المنظر العلوي للمظلة المجاورة، تشكّل الأعمدة رؤوس مضلع سداسي منتظم. أوجد قياس الزاوية التي تتشكل عند أي من أركان المظلة.

افهم: المعطيات: منظر علوي لمظلة سداسية منتظمة الشكل.

المطلوب: إيجاد قياس الزاوية التي تتشكل عند أي ركن من أركان المظلة.

ارسم شكلًا يمثِّل المنظر العلوي للمظلة.



الزاوية التي تتشكّل عند أي من أركان المظلة هي زاوية داخليّة لسداسي منتظم.

خطط: استعمل نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع لإيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للسداسي. وبما أن الزوايا الداخلية للسداسي المنتظم متطابقة، فإن قياس كل زاوية داخلية يساوي ناتج قسمة المجموع على عدد الزوايا.

حل: أولًا: أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة.

$S = (n - 2) \cdot 180^\circ$ صيغة مجموع قياسات الزوايا الداخلية

$= (6 - 2) \cdot 180^\circ$ $n = 6$

$= 4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$ بالتبسيط

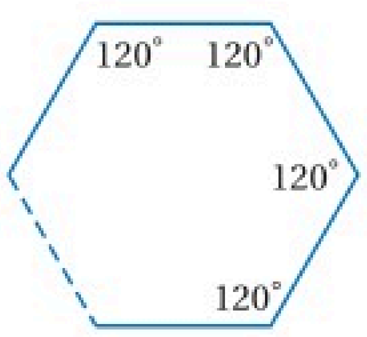
ثانيًا: أوجد قياس كل زاوية داخليّة.

$\dfrac{\text{مجموع قياسات الزوايا الداخلية}}{\text{عدد الزوايا الداخلية}} = \dfrac{720^\circ}{6}$ بالتعويض

$= 120^\circ$ بالقسمة

إذن قياس الزاوية المتكوِّنة عند كل ركن يساوي 120°.

تحقق: للتحقق من أنّ هذا القياس صحيح، استعمل المسطرة والمنقلة لرسم سداسي منتظم قياس زاويته الداخليّة 120°. سيرتبط الضلع الأخير بنقطة البداية لأول قطعة مستقيمة رُسمت. ✓



تحقق من فهمك

2A) **سجاد:** أوجد قياس الزاوية الداخلية لسجادة على شكل ثماني منتظم.

2B) **نوافير:** تزيِّن النوافير الأماكن العامة، ويقام بعضها على شكل مضلعات منتظمة. أوجد قياس الزاوية الداخلية لنافورة على شكل تساعي منتظم.

يمكنك أيضًا استعمال نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع لإيجاد عدد أضلاع مضلع منتظم إذا عُلم قياس زاوية داخلية له.

مثال 3 إيجاد عدد الأضلاع إذا عُلم قياس زاوية داخليّة

إذا كان قياس الزاوية الداخليّة لمضلع منتظم يساوي $135°$، فأوجد عدد أضلاعه .

افترض أن عدد أضلاع المضلع يساوي n. وبذلك يكون مجموع قياسات زواياه الداخليّة $135n$ ؛ لأن جميع الزوايا الداخليّة للمضلع المنتظم متطابقة. وبناءً على نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة يمكن التعبير أيضًا عن مجموع قياسات الزوايا الداخليّة بالعبارة $S = (n - 2) \cdot 180$.

$135°n = (n - 2) \cdot 180°$ كتابة معادلة

$135°n = 180°n - 360°$ خاصية التوزيع

$-45°n = -360°$ بطرح $180n$ من كلا الطرفين

$n = 8$ بقسمة كلا الطرفين على -45

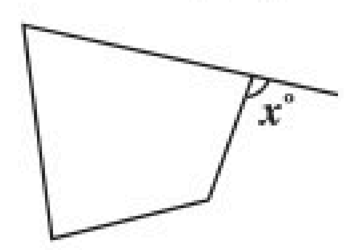
إذن للمضلع 8 أضلاع.

تحقق من فهمك

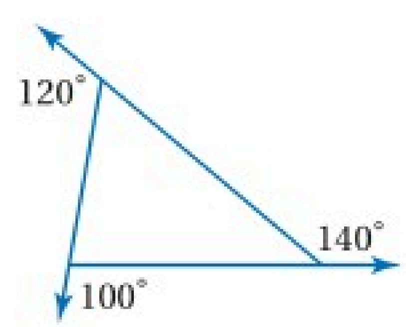
3) إذا كان قياس الزاوية الداخليّة لمضلع منتظم يساوي $144°$، فأوجد عدد أضلاعه.

مراجعة المفردات

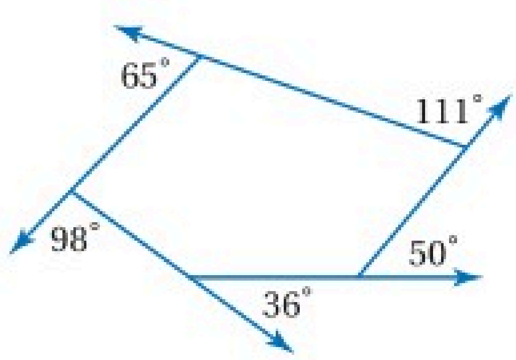
الزاوية الخارجيّة: الزاوية الخارجية لمضلع محدب هي زاوية محصورة بين أحد أضلاعه وامتداد ضلع آخر.



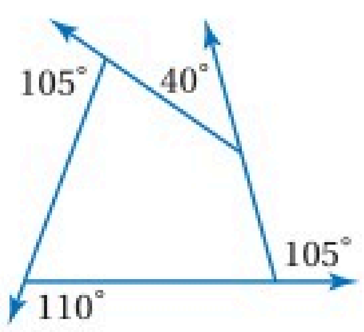
مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع: هل توجد علاقة بين عدد أضلاع مضلع محدّب ومجموع قياسات زواياه الخارجية؟ انظر المضلعات أدناه التي أُعطي في كل منها قياس زاوية خارجية عند كل رأس.



$120° + 100° + 140° = 360°$



$65° + 98° + 36° + 50° + 111° = 360°$



$105° + 110° + 105° + 40° = 360°$

لاحظ أنّ مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة بأخذ زاوية واحدة عند كل رأس في كل حالة يساوي $360°$. وتقودنا هذه الملاحظة إلى النظرية الآتية :

إرشادات للدراسة

قياس الزاوية الخارجية: قياس الزاوية الخارجية لمضلع منتظم عدد أضلاعه n يساوي $\frac{360°}{n}$

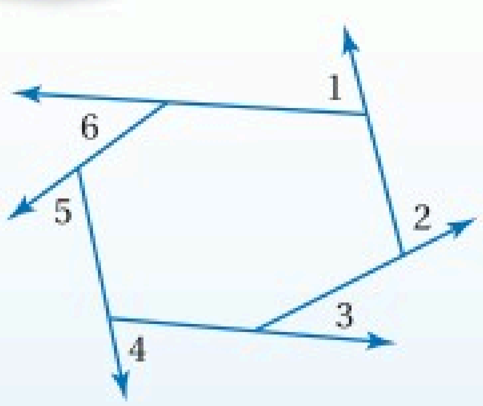
نظرية 5.2 مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع

أضف إلى مطويتك

مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع المحدّب بأخذ زاوية واحدة عند كل رأس يساوي $360°$.

مثال:

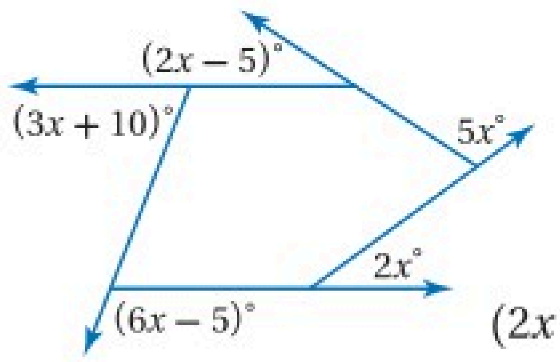
$m\angle1 + m\angle2 + m\angle3 + m\angle4 + m\angle5 + m\angle6 = 360°$



ستبرهن نظرية 5.2 في السؤال 39

مثال 4 إيجاد قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع

a) **جبر:** **أوجد قيمة x في الشكل المجاور.**



استعمل نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع لكتابة معادلة، ثمّ حُلّها لإيجاد قيمة x.

$$(2x-5)^\circ + 5x^\circ + 2x^\circ + (6x-5)^\circ + (3x+10)^\circ = 360^\circ$$
$$(2x+5x+2x+6x+3x)^\circ + [-5+(-5)+10]^\circ = 360^\circ$$
$$18x^\circ = 360^\circ$$
$$x^\circ = \frac{360^\circ}{18} = 20$$

b) **أوجد قياس الزاوية الخارجيّة للتساعي المنتظم.**

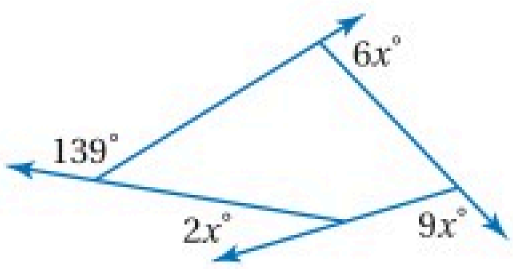
تتطابق الأضلاع والزوايا الداخلية في التساعي المنتظم وتكون الزوايا الخارجية متطابقة لأن المكملات للزوايا المتطابقة تكون متطابقة أيضًا.

افترض أن قياس كل زاوية خارجيّة يساوي x، ثم اكتب معادلة وحلّها.

$9x = 360^\circ$	نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع
$x = 40^\circ$	بقسمة كلا الطرفين على 9

إذن قياس كل زاوية خارجيّة للمضلع التساعي المنتظم يساوي 40°.

تحقق من فهمك



4A) أوجد قيمة x في الشكل المجاور.

4B) أوجد قياس الزاوية الخارجيّة لمضلع منتظم ذي 12 ضلعًا.

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة: لإيجاد قياس زاوية خارجيّة لمضلع منتظم يمكنك إيجاد قياس زاوية داخليّة وطرح هذا القياس من 180°؛ لأنّ الزاوية الخارجيّة والزاوية الداخليّة المرتبطة بها متكاملتان.

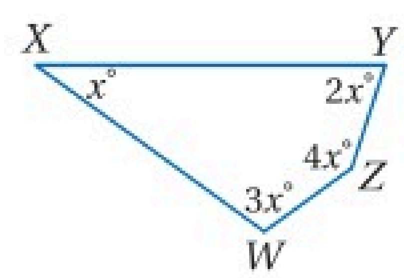
تأكد

المثال 1 **أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لكل من المضلعين المحدبين الآتيين:**

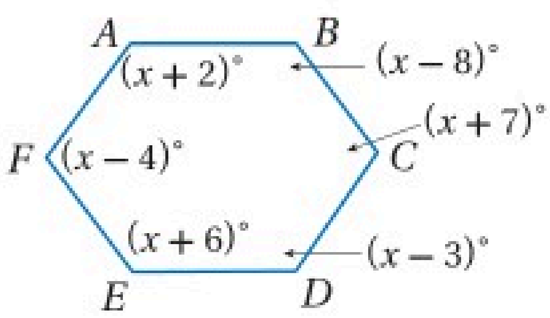
1) العشاري **2)** الخماسي

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعين الآتيين:

3)



4)



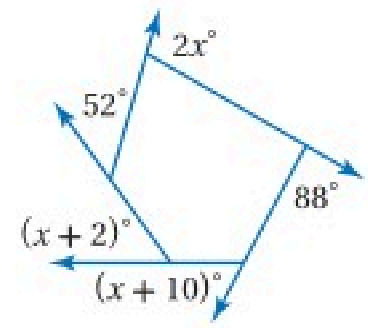
المثال 2 **5)** **عجلة دوارة:** العجلة الدوّارة في الصورة المجاورة على شكل مضلع منتظم عدد أضلاعه 15 ضلعًا.

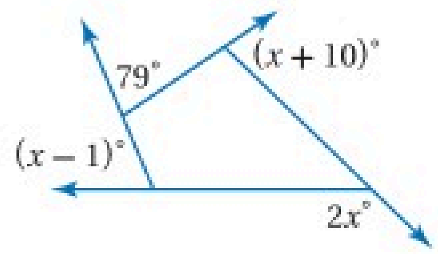
أوجد قياس الزاوية الداخليّة له.

المثال 3 **إذا كان قياس إحدى الزوايا الداخلية لمضلع منتظم معطى، فأوجد عدد الأضلاع في كل مما يأتي:**

6) 150° **7)** 170°

المثال 4 **أوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين :**

8)


9)


أوجد قياس الزاوية الخارجيّة لكل من المضلعين المنتظمين الآتيين:

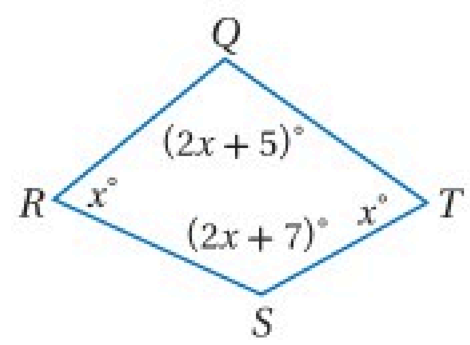
10) رباعي **11)** ثُماني

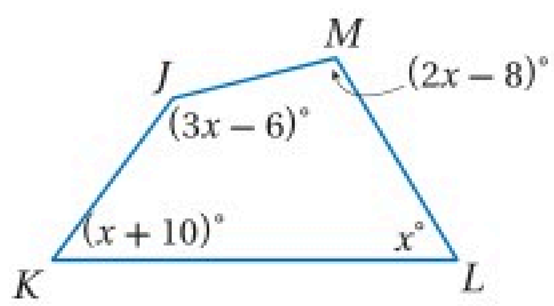
تدرب وحل المسائل

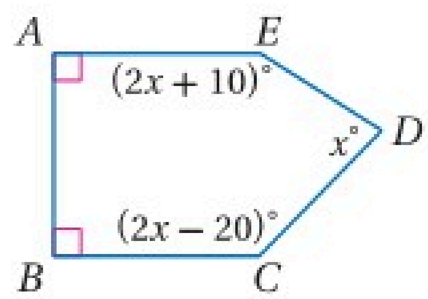
المثال 1 **أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لكل من المضلعات المحدبة الآتية:**

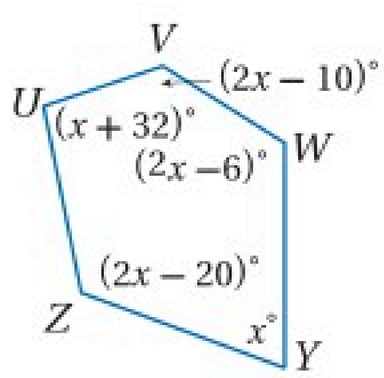
12) ذو 12 ضلعًا **13)** ذو 20 ضلعًا **14)** ذو 29 ضلعًا **15)** ذو 32 ضلعًا

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعات الآتية:

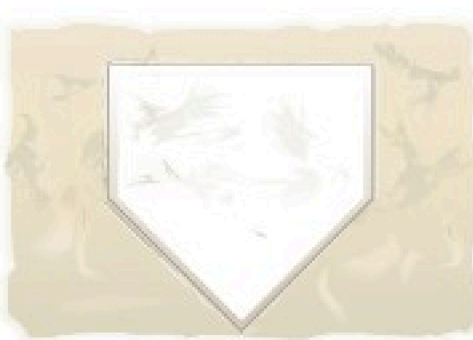
16)


17)


18)


19)


20) ما مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع في الشكل المجاور؟



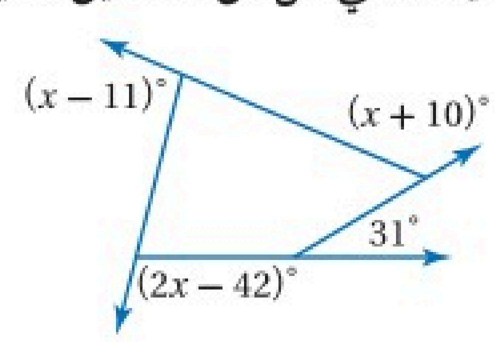
المثال 2 **أوجد قياس زاوية داخليّة لكل من المضلعات المنتظمة الآتية:**

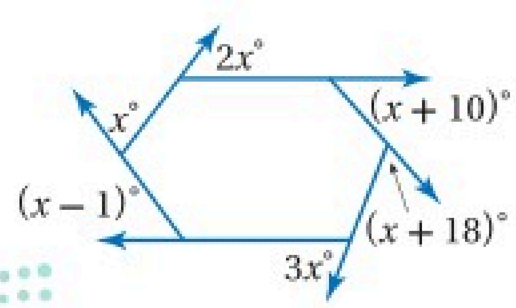
21) ذو12 ضلعاً **22)** الخماسي **23)** العشاري **24)** التُّساعي

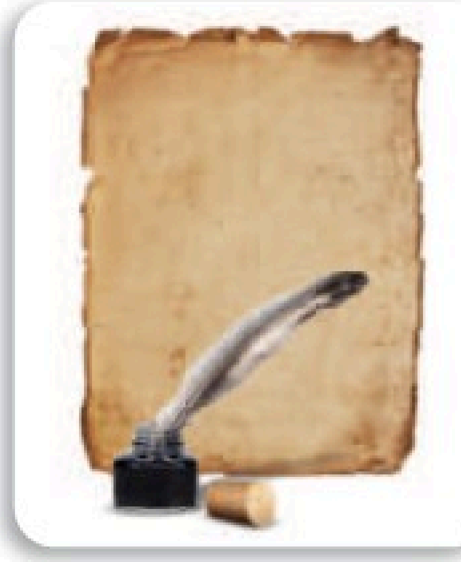
المثال 3 **إذا كان قياس إحدى الزوايا الداخلية لمضلع منتظم معطى، فأوجد عدد الأضلاع في كل مما يأتي:**

25) $60°$ **26)** $90°$ **27)** $120°$ **28)** $156°$

المثال 4 **أوجد قيمة x في كل من الشكلين الآتيين:**

29)


30)




تاريخ الرياضيات

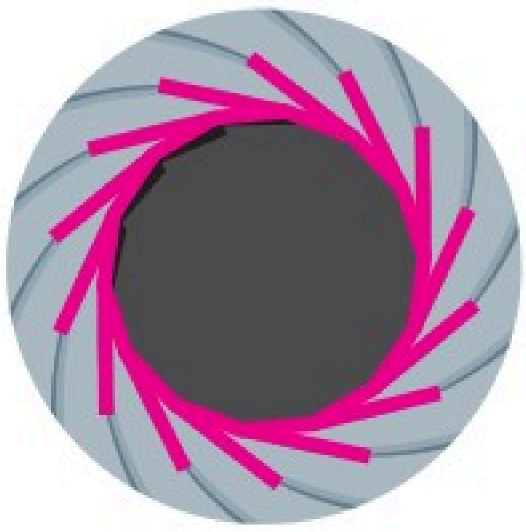
أبو كامل شجاع بن أسلم بن محمد بن شجاع 236 - 318 هـ

مهندس وعالم بالحساب، عرف باسم «أبي كامل الحاسب»، وعاش في القرن الثالث الهجري، له رسالة في «المضلع ذي الزوايا الخمس وذي الزوايا العشر».

أوجد قياس زاوية خارجيّة لكل من المضلعات المنتظمة الآتية:

31) العشاري **32)** الخماسي **33)** السداسي **34)** ذو 15 ضلعًا

35) **تصوير:** تشكّل الفتحة التي ينفذ منها الضوء إلى عدسة آلة التصوير في الشكل المجاور مضلعًا منتظمًا ذا 14 ضلعًا.



a) أوجد قياس الزاوية الداخلية مقرّبة إلى أقرب عُشر.

b) أوجد قياس الزاوية الخارجية مقرّبة إلى أقرب عُشر.

أوجد قياس زاوية خارجية وزاوية داخلية للمضلع المنتظم المعطى عدد أضلاعه في كل مما يأتي، وقرّب إجابتك إلى أقرب عُشر:

36) 7 **37)** 13

38) أثبت أن مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع الثماني يساوي $1080°$، دون استعمال صيغة مجموع الزوايا الداخلية للمضلع.

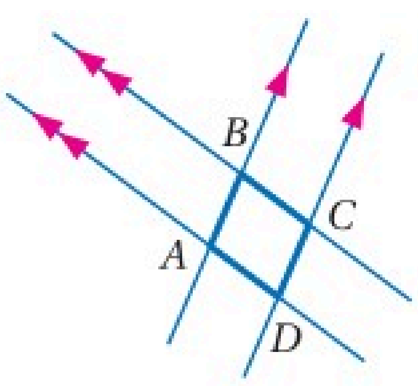
39) **برهان:** استعمل الجبر لإثبات نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع.

جبر: أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعين الآتيين:

40) عشاري قياسات زواياه الداخليّة:
$(x+5)°, (x+10)°, (x+20)°, (x+30)°, (x+35)°, (x+40)°, (x+60)°, (x+70)°, (x+80)°, (x+90)°$

41) الخماسي $ABCDE$ الذي قياسات زواياه الداخليّة: $6x°, (4x+13)°, (x+9)°, (2x-8)°, (4x-1)°$

42) **تمثيلات متعدّدة:** سوف تستقصي في هذه المسألة العلاقات بين الزوايا والأضلاع في متوازي أضلاع.



a) **هندسيًا:** ارسم زوجين من المستقيمات المتوازية تتقاطع كما في الشكل المجاور، وسمِّ الشكل الرباعي الناتج $ABCD$. ثم كرّر هذه الخطوات لتكوين شكلين آخرين: $QRST$, $FGHJ$.

b) **جدوليًا:** أكمل الجدول الآتي:

الشكل الرباعي	أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا							
$ABCD$	$m\angle A$		$m\angle B$		$m\angle C$		$m\angle D$	
	AB		BC		CD		DA	
$FGHJ$	$m\angle F$		$m\angle G$		$m\angle H$		$m\angle J$	
	FG		GH		HJ		JF	
$QRST$	$m\angle Q$		$m\angle R$		$m\angle S$		$m\angle T$	
	QR		RS		ST		TQ	

c) **لفظيًا:** خمّن العلاقة بين كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمات المتوازية.

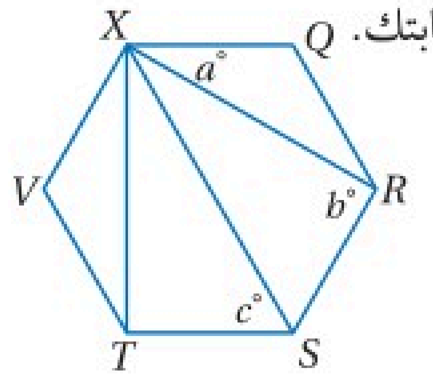
d) **لفظيًا:** خمّن العلاقة بين كل زاويتين متحالفتين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمات المتوازية.

e) **لفظيًا:** خمّن العلاقة بين كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمات المتوازية.

مسائل مهارات التفكير العليا

43) اكتشف الخطأ: قالت مريم: إنّ مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للعشاري أكبر منه للسباعي؛ لأنّ عدد أضلاع العشاري أكثر من أضلاع السباعي. وقالت لبنى: إنّ مجموع قياسات الزوايا الخارجية لكلا المضلعين متساوٍ. "فهل أيٌّ منهما ادعاؤها صحيح"؟ وضّح تبريرك.

44) تحدٍّ: أوجد قيم a, b, c في الشكل السداسي المنتظم $QRSTVX$ المجاور. برّر إجابتك.



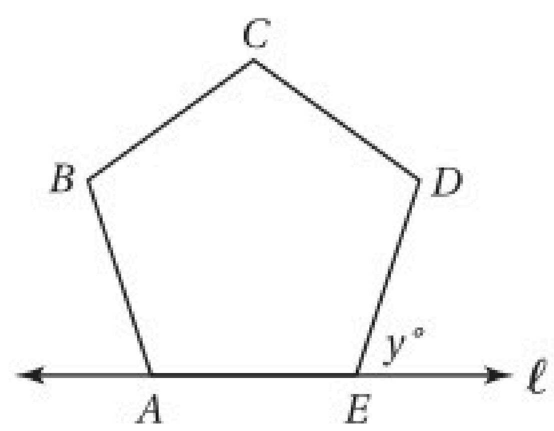
45) تبرير: إذا مُدَّ ضلعان لسداسي منتظم بحيث يلتقيان في نقطة خارجه، فهل يكون المثلث الناتج متطابق الأضلاع دائمًا، أو أحيانًا، أو لا يمكن أن يكون متطابق الأضلاع أبدًا؟ برّر إجابتك.

46) مسألة مفتوحة: ارسم مضلعًا، وأوجد مجموع قياسات زواياه الداخليّة. ما عدد أضلاع المضلع الذي مجموع قياسات زواياه الداخليّة مِثلا المجموع الذي أوجدته؟ برّر إجابتك.

47) اكتب: وضّح العلاقة بين المثلثات ونظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع.

تدريب على اختبار

48) إجابة قصيرة: الشكل $ABCDE$ خماسي منتظم، والمستقيم ℓ يحوي $\overline{AE}$. ما قياس $(\angle y)$؟



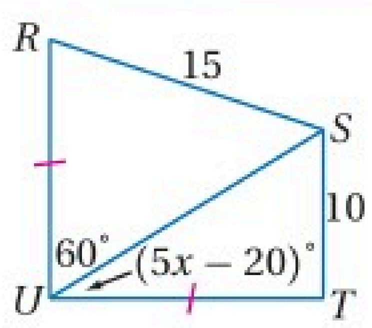
49) إذا كان مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع مِثْلي مجموع قياسات زواياه الخارجيّة، فما نوع هذا المضلع؟

A مربع **C** سداسي

B خماسي **D** ثماني

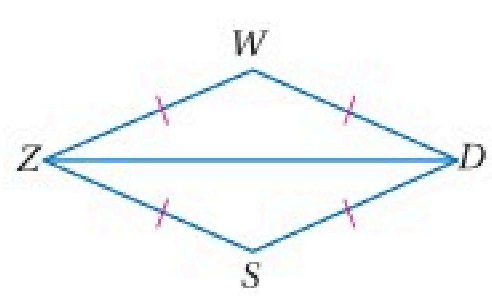
مراجعة تراكمية

50) جبر: اكتب متباينة تمثّل مدى القيم الممكنة لِـ x **(مهارة سابقة)**

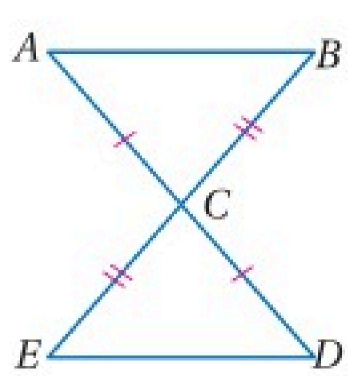


بيّن في كل مما يأتي أن المثلثين متطابقان، وحدِّد حالة التطابق، ثم اكتب عبارة تطابق: (مهارة سابقة)

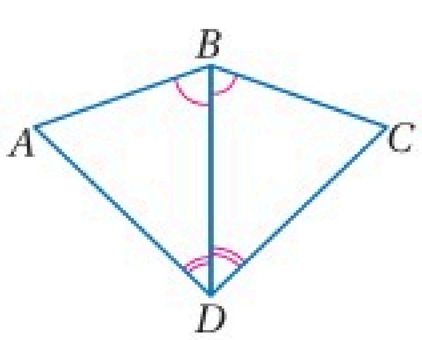
(51



(52

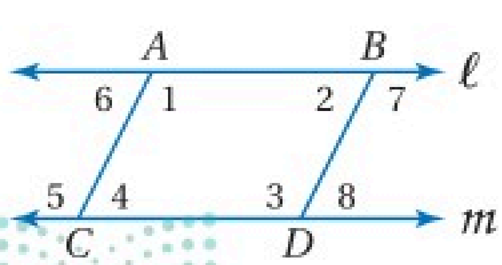


(53



استعد للدرس اللاحق

في الشكل المجاور $\overline{BD} \parallel \overline{AC}$ ، $\ell \parallel m$ ، حدِّد جميع أزواج الزوايا التي تصنف وفقًا لما يلي:



54) زاويتان متبادلتان داخليًّا. **55)** زاويتان متحالفتان.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

توسع 5-1

معمل الجداول الإلكترونية

زوايا المضلع
Angles of Polygon

من الممكن إيجاد قياسات الزوايا الداخلية والزوايا الخارجية بالإضافة إلى مجموع قياسات الزوايا الداخلية لأي مضلع منتظم عدد أضلاعه n، وذلك باستعمال برنامج الجداول الإلكترونية.

نشاط

صمّم جدولًا إلكترونيًّا باتباع الخطوات الآتية:

- اكتب عناوين للأعمدة كما في الجدول أدناه.
- أدخل الأرقام 10–3 في العمود الأول بدءًا من الخلية A2.
- عدد المثلثات في كل مضلع أقل من عدد أضلاعه بـ 2. اكتب صيغة في الخلية B2 لطرح 2 من كل عدد في الخلية A2 وذلك بوضع المؤشر في الخلية B2 وكتابة $\boxed{=A2-2}$ ثم ضغط enter .
- اكتب صيغة في الخلية C2 لحساب مجموع قياسات الزوايا الداخليّة. تذكّر أن صيغة مجموع قياسات زوايا مضلع هي $S = (n-2) \cdot 180°$، وذلك بوضع المؤشر في الخلية C2 وكتابة $\boxed{= B2 * 180}$ ثم ضغط enter .
- استمر في كتابة صيغ لحساب القيم المشار إليها في الجدول، ثم اسحب هذه الصيغ على القيم حتّى الصف 9. سيظهر الجدول في النهاية على النحو الآتي:

المضلعات والزوايا

◇	A	B	C	D	E	F
1	عدد الأضلاع	عدد المثلثات	مجموع قياسات الزوايا الداخلية	قياس كل زاوية داخلية	قياس كل زاوية خارجية	مجموع قياسات الزوايا الخارجية
2	3	1	180	60	120	360
3	4	2	360	90	90	360
4	5	3	540	108	72	360
5	6	4	720	120	60	360
6	7	5	900	128.57	51.43	360
7	8	6	1080	135	45	360
8	9	7	1260	140	40	360
9	10	8	1440	144	36	360

Sheet 1 | Sheet 2 | Sheet 3

تمارين ومسائل:

1) اكتب الصيغة التي استعملتها لإيجاد قياس زاوية داخلية للمضلع المنتظم.
2) اكتب الصيغة التي استعملتها لإيجاد مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع المنتظم.
3) ما قياس كل زاوية داخليّة إذا كان عدد الأضلاع 1 أو 2؟
4) هل من الممكن أن يكون عدد الأضلاع 1 أو 2؟ وضّح إجابتك.

استعمل جدولًا إلكترونيًّا لحل الأسئلة الآتية:

5) ما عدد المثلثات في مضلع عدد أضلاعه 17 ضلعًا؟
6) أوجد قياس الزاوية الخارجية لمضلع منتظم عدد أضلاعه 16 ضلعًا.
7) أوجد قياس زاوية داخلية لمضلع منتظم عدد أضلاعه 115 ضلعًا مقرّبًا إجابتك إلى أقرب عُشر.
8) إذا كان قياس كل من الزوايا الخارجية °0، فأوجد قياس الزاوية الداخليّة. وهل هذا ممكن؟ وضّح إجابتك.

5-2

متوازي الأضلاع
Parallelogram

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ تصنيف المضلعات الرباعية .

(مهارة سابقة)

والآن:

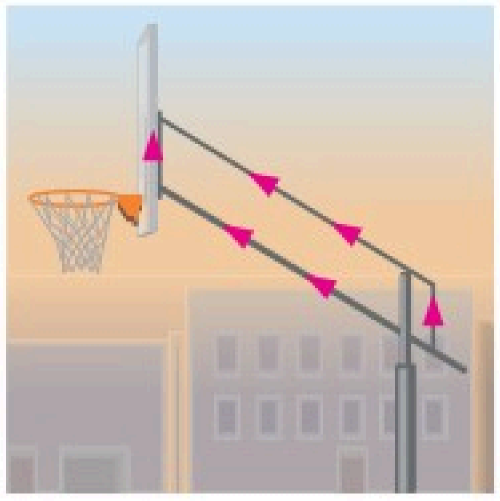
- أتعرف خصائص أضلاع وزوايا متوازي الأضلاع وأطبّقها.
- أتعرف خصائص أقطار متوازي الأضلاع وأطبّقها.

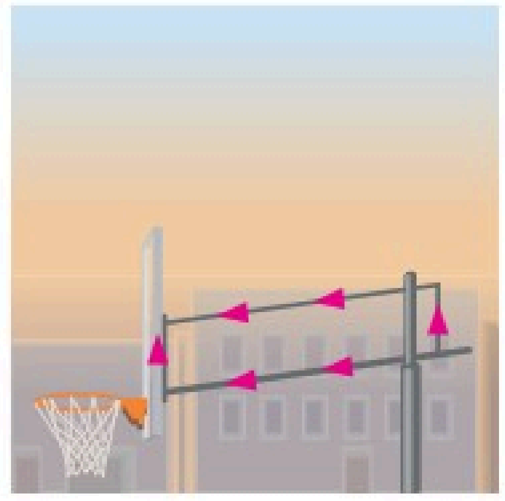
المفردات:

متوازي الأضلاع
parallelogram

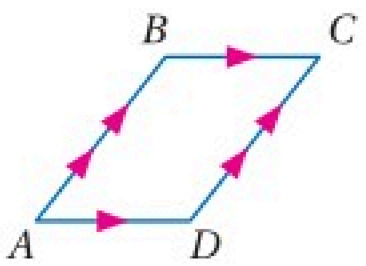
لماذا؟

يمكن التحكم في ارتفاع مرمى كرة السلة من خلال أذرع خلفية كما في الشكل أدناه. لاحظ أنّه كلّما تم تعديل الارتفاع، يبقى كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي الذي تشكّله الأذرع متوازيين.





أضلاع متوازي الأضلاع وزواياه: **متوازي الأضلاع** هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان. ويُرمز لمتوازي الأضلاع بالرمز ▱.
ففي ▱$ABCD$ المبين جانبًا $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ بحسب التعريف.



▱$ABCD$

تقدم النظريات الآتية خصائص أخرى لمتوازي الأضلاع.

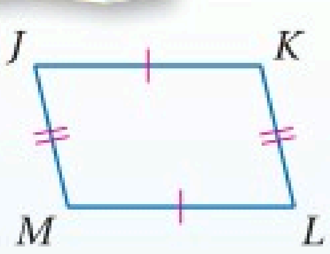
نظريات

أضف إلى مطويتك

خصائص متوازي الأضلاع

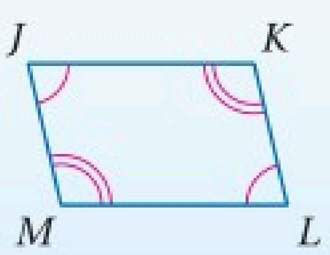
5.3 كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان.

مثال: $\overline{JK} \cong \overline{ML}$, $\overline{JM} \cong \overline{KL}$



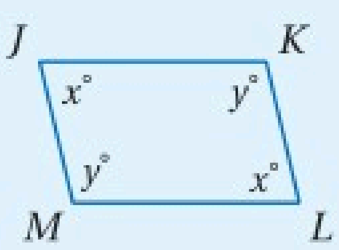
5.4 كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع متطابقتان.

مثال: $\angle J \cong \angle L$, $\angle K \cong \angle M$



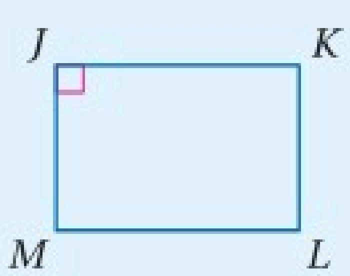
5.5 كل زاويتين متحالفتين في متوازي الأضلاع متكاملتان.

مثال: $x^\circ + y^\circ = 180^\circ$



5.6 إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة، فإن زواياه الأربع قوائم.

مثال: في ▱$JKLM$ ، إذا كانت $\angle J$ قائمة، فإنّ : $\angle K, \angle L, \angle M$ قوائم أيضًا.



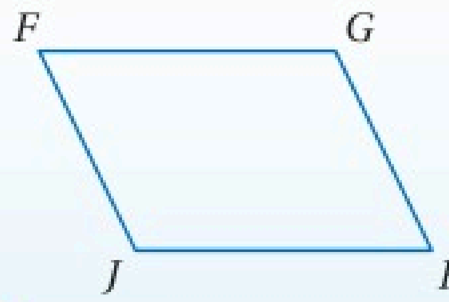
سوف تبرهن النظريات 5.6 ,5.5 ,5.3 في الأسئلة 5 ,25 ,27 على الترتيب

إرشادات للدراسة

رسم الأشكال: تكتب النظريات بمصطلحات عامَة، أما في البرهان فيجب رسم شكل بحيث يمكن من خلاله الإشارة إلى القطع المستقيمة والزوايا بصورة دقيقة.

برهان نظريّة 5.4

اكتب برهانًا ذا عمودين للنظريّة 5.4.



المعطيات: $\square FGHJ$

المطلوب: $\angle F \cong \angle H, \angle J \cong \angle G$

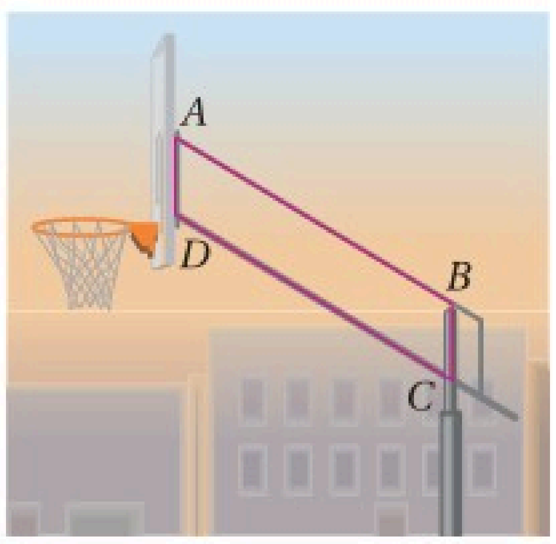
البرهان:

المبررات	العبارات
1) معطى.	1) $\square FGHJ$
2) تعريف متوازي الأضلاع.	2) $\overline{FG} \parallel \overline{JH}, \overline{FJ} \parallel \overline{GH}$
3) إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين، فإن كل زاويتين متحالفتين متكاملتان.	3) $\angle F , \angle J$ متكاملتان. $\angle J , \angle H$ متكاملتان. $\angle H , \angle G$ متكاملتان.
4) الزاويتان المكملتان للزاوية نفسها تكونان متطابقتين.	4) $\angle F \cong \angle H, \angle J \cong \angle G$

الربط مع الحياة

الأبعاد القياسية لملعب كرة السلة هي $94\,ft \times 50\,ft$، والارتفاع القياسي للهدف عن الأرض $10\,ft$.

مثال 1 من واقع الحياة استعمال خصائص متوازي الأضلاع



كرة سلّة: في $\square ABCD$ ، إذا كان $AB = 2.5\,ft$ ، $m\angle A = 55°$ ، $BC = 1\,ft$، فأوجد كلًّا مما يأتي، وبرِّر إجابتك.

a) DC

$\overline{DC} \cong \overline{AB}$	كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان
$DC = AB$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$= 2.5\,ft$	بالتعويض

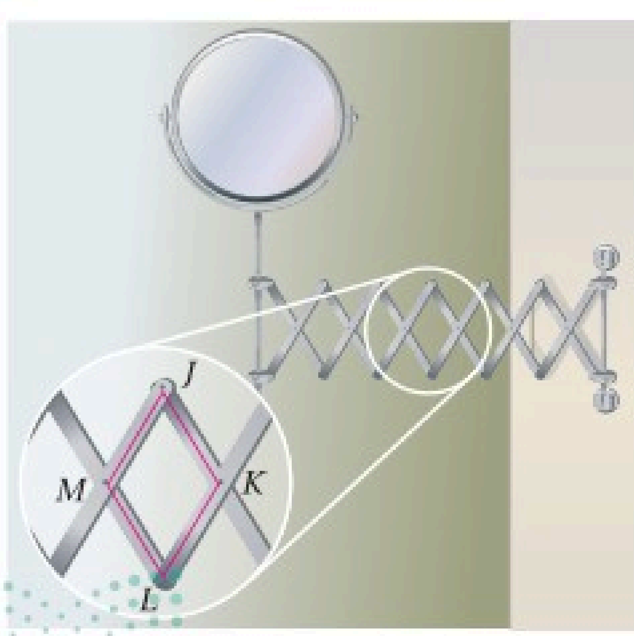
b) $m\angle B$

$m\angle B + m\angle A = 180°$	كل زاويتين متحالفتين في متوازي الأضلاع متكاملتان
$m\angle B + 55° = 180°$	بالتعويض
$m\angle B = 125°$	بطرح $55°$ من كلا الطرفين

c) $m\angle C$

$m\angle C = m\angle A$	كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع متطابقتان
$= 55°$	بالتعويض

تحقق من فهمك



1) **مرايا:** تُستعمل في مرآة الحائط المبينة جانبًا متوازيات أضلاع يتغير شكلها كُلّما مُدّ الذراع. في $\square JKLM$ ، إذا كان $m\angle J = 47°, MJ = 8\,cm$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

A) LK **B)** $m\angle L$

C) إذا مُدّ الذراع حتى أصبح $m\angle J = 90°$، فكم يصبح قياس كلٍّ من $\angle K, \angle L, \angle M$؟ برّر إجابتك.

قطرا متوازي الأضلاع: قطرا متوازي الأضلاع يُحقّقان الخاصيّتين الآتيتين :

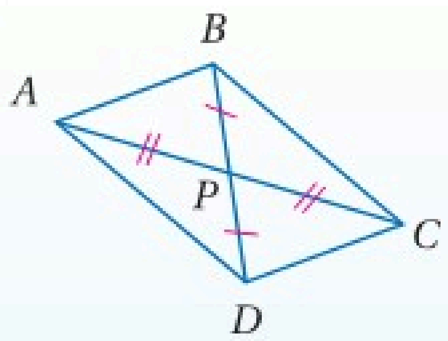
نظريات

أضف إلى مطويتك

قطرا متوازي الأضلاع

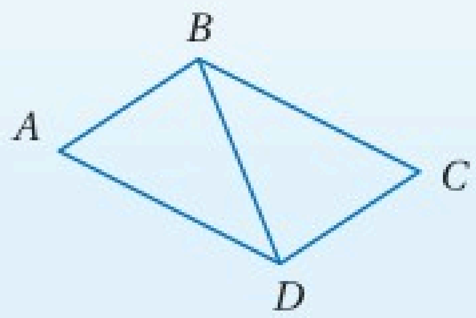
5.7 **قطرا متوازي الأضلاع ينصّف كل منهما الآخر.**

مثال: $\overline{AP} \cong \overline{PC}$, $\overline{DP} \cong \overline{PB}$.



5.8 **قطر متوازي الأضلاع يقسمه إلى مثلثين متطابقين.**

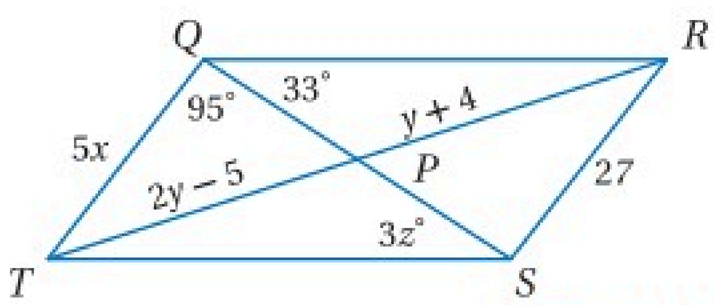
مثال: $\triangle ABD \cong \triangle CDB$.



سوف تبرهن النظريتين 5.7, 5.8 في السؤالين 26, 28 على الترتيب

مثال 2 خصائص متوازي الأضلاع والجبر

جبر: إذا كان $QRST$ متوازي أضلاع، فأوجد قيمة كل من المتغيرات الآتية:



a) x

$\overline{QT} \cong \overline{RS}$	كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان
$QT = RS$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$5x = 27$	بالتعويض
$x = 5.4$	بقسمة كلا الطرفين على 5

b) y

$\overline{TP} \cong \overline{PR}$	قطرا متوازي الأضلاع ينصّف كل منهما الآخر
$TP = PR$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$2y - 5 = y + 4$	بالتعويض
$y = 9$	بطرح y وإضافة 5 لكلا الطرفين

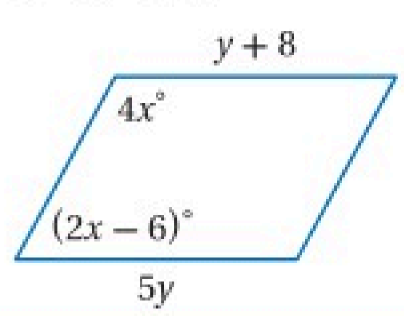
c) z

$\triangle TQS \cong \triangle RSQ$	قطر متوازي الأضلاع يقسمه إلى مثلثين متطابقين
$\angle QST \cong \angle SQR$	العناصر المتناظرة في المثلثات المتطابقة تكون متطابقة
$m\angle QST = m\angle SQR$	تعريف تطابق الزوايا
$3z = 33°$	بالتعويض
$z = 11$	بقسمة كلا الطرفين على 3

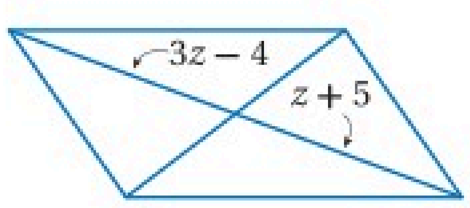
✓ تحقق من فهمك

أوجد قيمة المتغير في كل من متوازيي الأضلاع الآتيين :

2A)



2B)



يمكنك استعمال النظرية 5.7 لتحديد إحداثيات نقطة تقاطع قطري متوازي أضلاع في المستوى الإحداثي إذا عُلمت إحداثيات رؤوسه.

مثال 3 متوازي الأضلاع والهندسة الإحداثية

هندسة إحداثية: **أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $▱FGHJ$ الذي إحداثيات رؤوسه $F(-2, 4), G(3, 5), H(2, -3), J(-3, -4)$.**

بما أنّ قطري متوازي الأضلاع ينصّف كل منهما الآخر، فإنّ نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{GJ}$, $\overline{FH}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{FH}$ التي طرفاها $(-2, 4)$, $(2, -3)$.

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{-2 + 2}{2}, \frac{4 + (-3)}{2}\right)$$ صيغة نقطة المنتصف

$$= (0, 0.5)$$ بالتبسيط

إذن إحداثيا نقطة تقاطع قطري $▱FGHJ$ هما $(0, 0.5)$.

تحقق: أوجد نقطة منتصف $\overline{GJ}$ التي طرفاها $(-3, -4)$, $(3, 5)$.

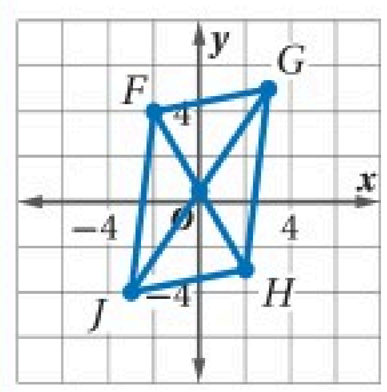
$$\left(\frac{3 + (-3)}{2}, \frac{5 + (-4)}{2}\right) = (0, 0.5) \checkmark$$

تحقق من فهمك

3) **هندسة إحداثيّة:** أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $▱RSTU$ الذي رؤوسه $R(-8, -2), S(-6, 7), T(6, 7), U(4, -2)$.

إرشادات للدراسة

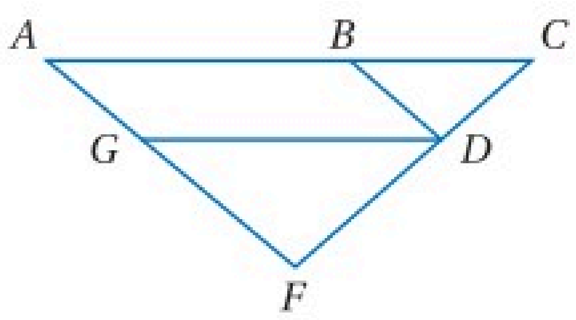
التحقق من الإجابة: في المثال 3، مثّل متوازي الأضلاع على المستوى الإحداثي وعيّن نقطة تقاطع القطرين التي أوجدتها. ارسم القطرين لتجد أن نقطة تقاطعهما هي $(0, 0.5)$.



يمكنك استعمال خصائص متوازي الأضلاع وأقطاره لكتابة براهين.

مثال 4 استعمال خصائص متوازي الأضلاع لكتابة براهين

اكتب برهانًا حرًّا.



المعطيات: $▱ABDG, \overline{AF} \cong \overline{CF}$

المطلوب: $\angle BDG \cong \angle C$

البرهان:

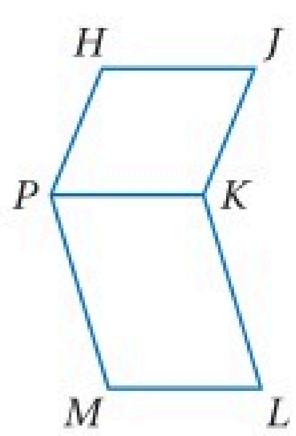
من المعطيات $ABDG$ متوازي أضلاع. وبما أن الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة، فإنّ $\angle BDG \cong \angle A$. ومعطى أيضًا أنّ $\overline{AF} \cong \overline{CF}$. ومن نظريّة المثلث المتطابق الضلعين تكون $\angle A \cong \angle C$. ومن خاصيّة التعدّي للتطابق تكون $\angle BDG \cong \angle C$.

تحقق من فهمك

4) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $▱HJKP$, $▱PKLM$

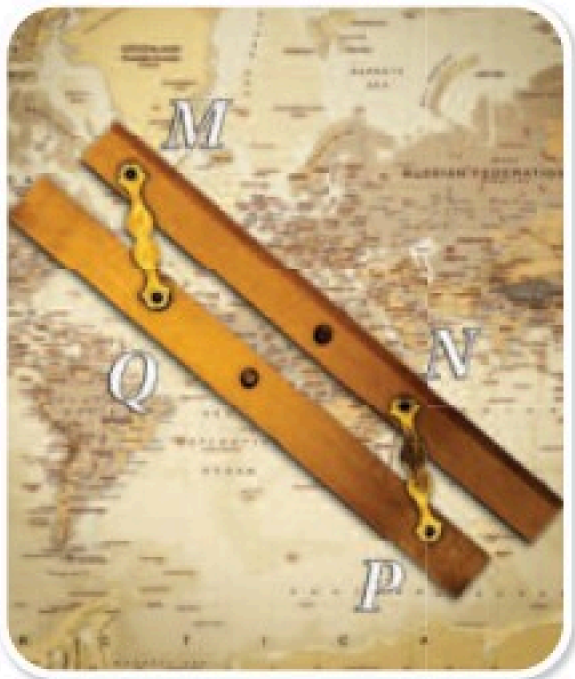
المطلوب: $\overline{HJ} \cong \overline{ML}$



تأكد

المثال 1

1) مِلاحة: يستعمل البحّارة مسطرتين متوازيتين، يصل بينهما ذراعان متساويا الطول لتحديد اتجاه إبحارهم، فيضعون حافة إحدى المسطرتين بمحاذاة مسار الإبحار، ثم يحركون المسطرة الأخرى حتى تصل إلى قرص بوصلة مرسوم على الخريطة. تُشكّل المسطرتان والذراعان الواصلتان بينهما $\square MNPQ$.



a) إذا كان $MQ = 2\text{in}$ ، فأوجد NP.

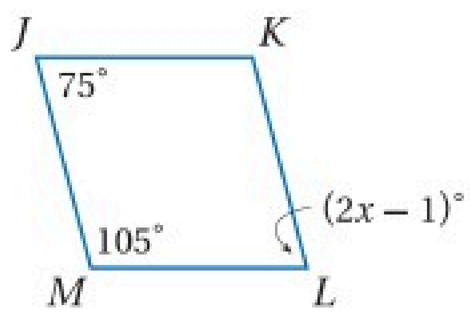
b) إذا كان $m\angle NMQ = 38^\circ$ ، فأوجد $m\angle MNP$.

c) إذا كان $m\angle MQP = 128^\circ$ ، فأوجد $m\angle MNP$.

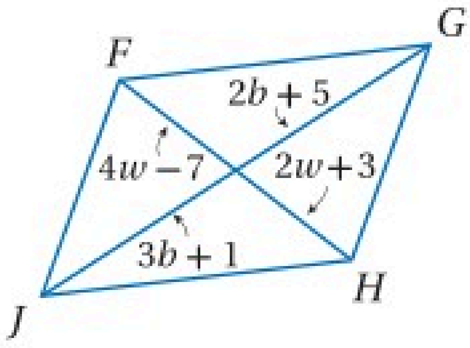
المثال 2

جبر: أوجد قيمة المتغير في كل من متوازيي الأضلاع الآتيين :

2)



3)



المثال 3

4) هندسة إحداثيّة: أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square ABCD$ الذي رؤوسه $A(-4, 6), B(5, 6), C(4, -2), D(-5, -2)$.

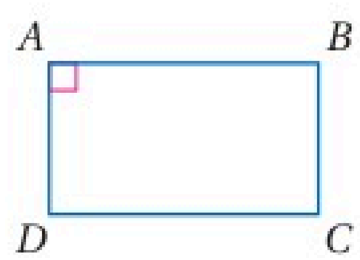
المثال 4

برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدد في كل من السؤالين الآتيين :

5) برهانًا حرًّا.

المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع، $\angle A$ قائمة.

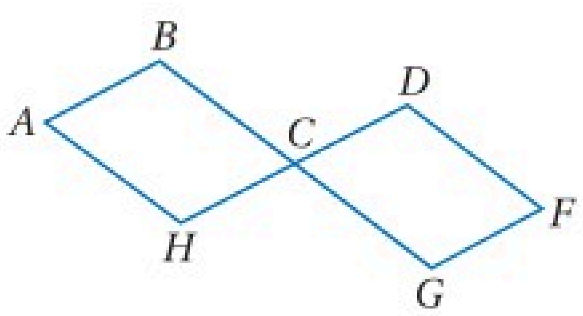
المطلوب: $\angle B, \angle C, \angle D$ قوائم. (النظرية 5.6)



6) برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $ABCH$, $DCGF$ متوازيا أضلاع.

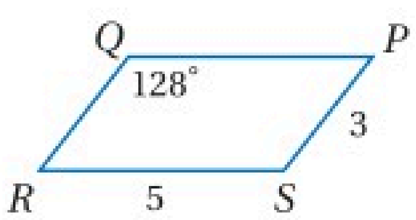
المطلوب: $\angle A \cong \angle F$.



تدرب وحل المسائل

المثال 1

استعمل $\square PQRS$ المبيَّن جانبًا لإيجاد كل مما يأتي :



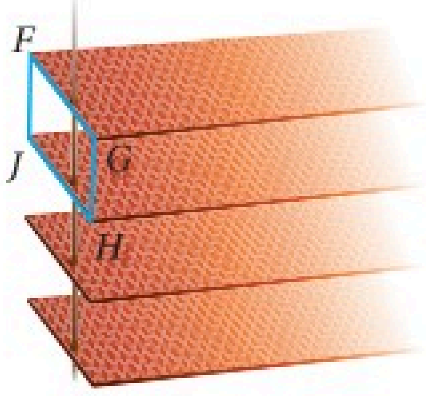
7) $m\angle R$

8) QR

9) QP

10) $m\angle S$

11) ستائر: في الشكل المقابل صورة لشرائح ستائر النوافذ المتوازية دائمًا؛ لتسمح بدخول أشعة الشمس. في $\square FGHJ$ ، إذا كان $FJ = \frac{3}{4}\text{ in}, FG = 1\text{ in}, m\angle JHG = 62^\circ$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي :



a) JH

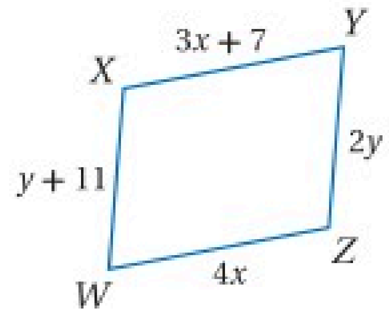
b) GH

c) $m\angle JFG$

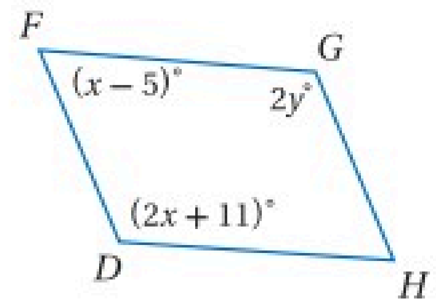
d) $m\angle FJH$

المثال 2 **جبر:** أوجد قيمتي x, y في كل من متوازيات الأضلاع الآتية :

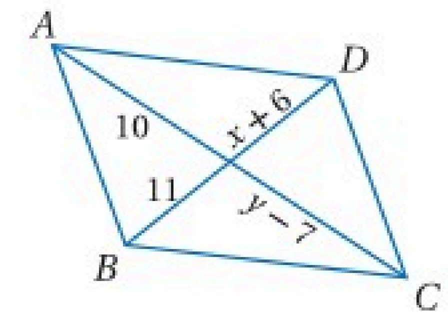
12)



13)



14)



المثال 3 **هندسة إحداثيّة:** أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square WXYZ$ المعطاة رؤوسه في كل من السؤالين الآتيين :

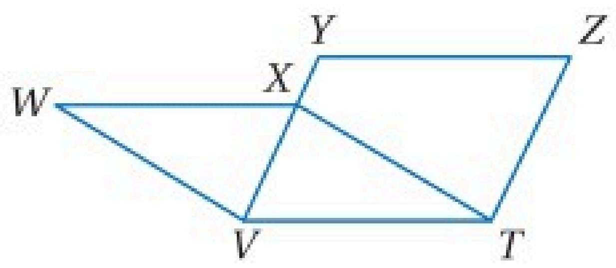
15) $W(-1,7), X(8,7), Y(6,-2), Z(-3,-2)$

16) $W(-4,5), X(5,7), Y(4,-2), Z(-5,-4)$

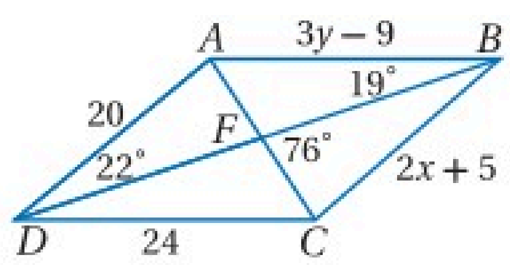
المثال 4 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين فيما يأتي :

17) **المعطيات:** $\square WXTV, \square ZYVT$

المطلوب: $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$



جبر: استعمل $\square ABCD$ المبيَّن جانبًا لإيجاد كل مما يأتي :



18) x

19) y

20) $m\angle AFB$

21) $m\angle DAC$

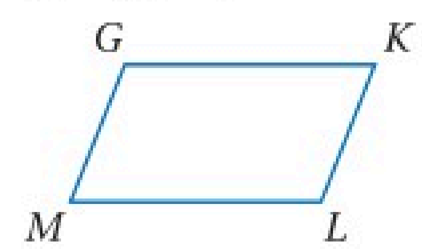
22) $m\angle ACD$

23) $m\angle DAB$

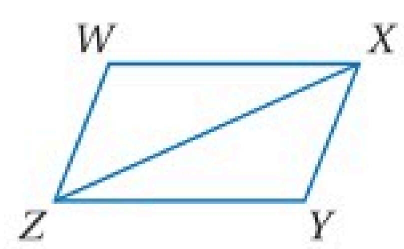
24) **هندسة إحداثيّة:** إذا كانت $A(-2,5), B(2,2), C(4,-4)$ رؤوسًا في $\square ABCD$ ، فأوجد إحداثيات الرأس D. وبرّر إجابتك.

برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدد في كل مما يأتي :

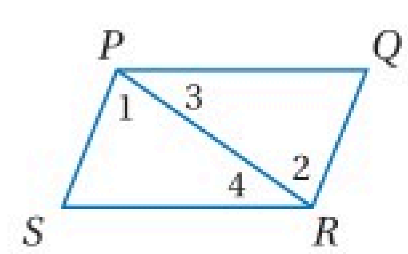
25) برهانًا ذا عمودين.
المعطيات: $GKLM$ متوازي أضلاع ،
المطلوب: اثبات أن كل زاويتين في الأزواج التالية متكاملتان $\angle G$ و $\angle K$ ، $\angle K$ و $\angle L$ ، $\angle L$ و $\angle M$ ، $\angle M$ و $\angle G$.
(النظرية 5.5)



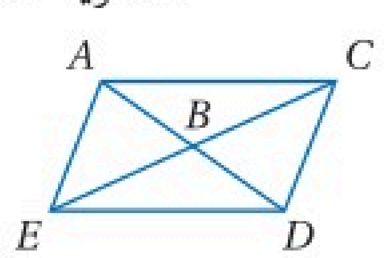
26) برهانًا ذا عمودين.
المعطيات: $WXYZ$ متوازي أضلاع ،
المطلوب: $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$
(النظرية 5.8)



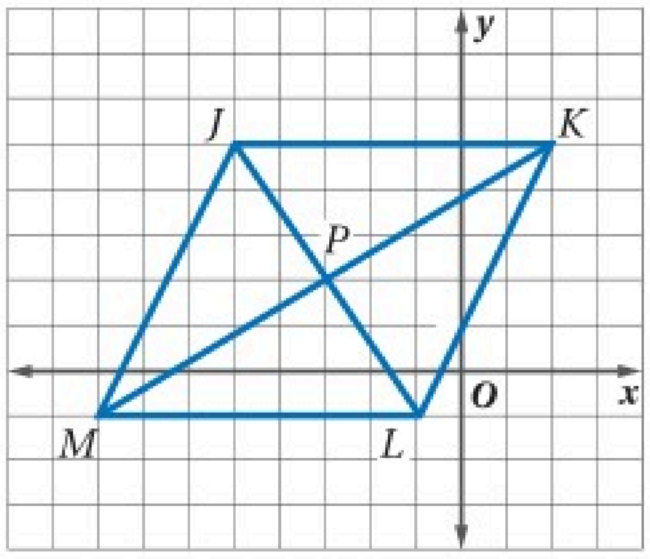
27) برهانًا ذا عمودين.
المعطيات: $PQRS$ متوازي أضلاع.
المطلوب: $\overline{PQ} \cong \overline{RS}, \overline{QR} \cong \overline{SP}$
(النظرية 5.3)



28) برهانًا حرًّا.
المعطيات: $ACDE$ متوازي أضلاع.
المطلوب: القطران $\overline{AD}$ وَ ___ EC ينصف كلٌّ منهما الآخر.
(النظرية 5.7)



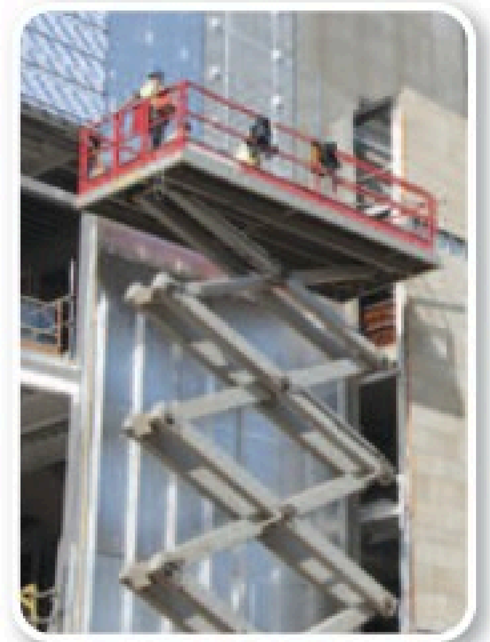
29) **هندسة إحداثيّة:** استعن بالشكل المجاور في كل مما يأتي:



a) استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتحديد ما إذا كان قطرا $JKLM$ ينصّف كل منهما الآخر. وضّح إجابتك.

b) حدّد ما إذا كان قطرا $JKLM$ متطابقين. وضّح إجابتك.

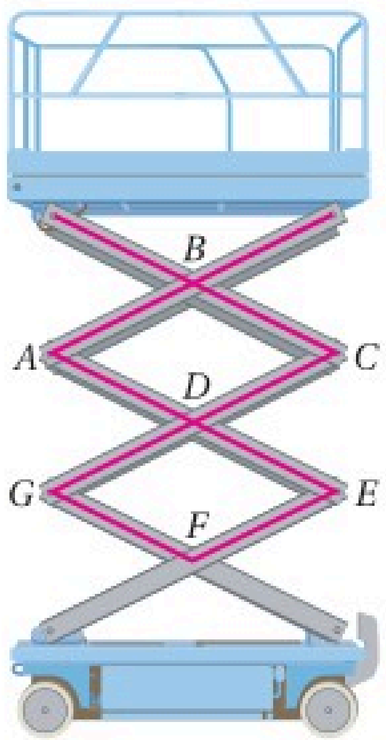
c) استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كان كل ضلعين متتاليين متعامدين أم لا. وضّح إجابتك.



الربط مع الحياة

توفر الرافعات المقصيّة مساحات عمل على ارتفاعات مختلفة تصل إلى $100\,m$.

30) **رافعات:** في الشكل المجاور: $ABCD$, $GDEF$ متوازيا أضلاع متطابقان.



a) حدِّد الزوايا التي تطابق $\angle A$. وضّح تبريرك.

b) حدِّد القطع المستقيمة التي تطابق $\overline{BC}$. وضّح تبريرك.

c) حدِّد الزوايا المكملة للزاوية C. وضّح تبريرك.

31) **تمثيلات متعدِّدة:** سوف تستقصي في هذه المسألة اختبارات لتمييز متوازي الأضلاع.

a) **هندسيًّا:** ارسم ثلاثة أزواج من القطع المستقيمة المتطابقة والمتوازية. صِل الأطراف لتكوِّن أشكالًا رباعية، وسمِّها $ABCD, MNOP, WXYZ$. ثم قِس أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا لكل منها.

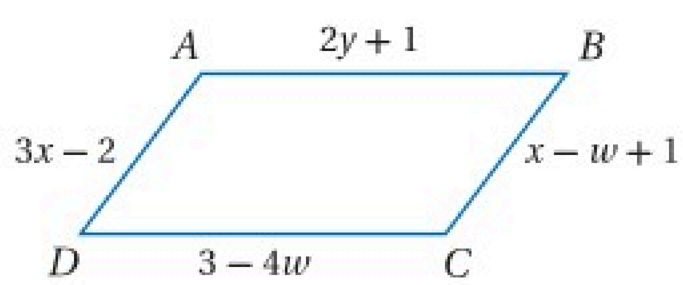
b) **جدوليًّا:** أكمل الجدول الآتي:

الشكل الرباعي	هل الأضلاع المتقابلة متطابقة؟	هل الزوايا المتقابلة متطابقة؟	هل الشكل متوازي أضلاع؟
$ABCD$			
$MNOP$			
$WXYZ$			

c) **لفظيًّا:** ضع تخمينًا حول الأشكال الرباعيّة التي لها ضلعان متطابقان ومتوازيان.

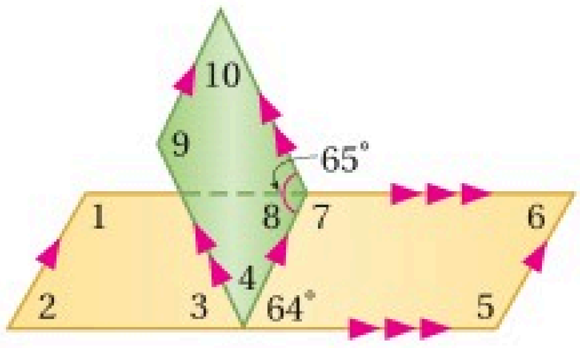
مسائل مهارات التفكير العليا

32) **تحدٍّ:** إذا كان محيط $\square ABCD$ في الشكل أدناه يساوي 22 in، فأوجد AB .



33) **اكتب:** هل توجد نظرية $SSSS$ في تطابق متوازيات الأضلاع. برّر إجابتك.

34) **إجابة مفتوحة:** أعطِ مثالًا مضادًا يبيّن أن متوازيات الأضلاع ذات الأضلاع المتناظرة المتطابقة ليست متطابقة دائمًا.



35) **تبرير:** أوجد $m\angle 1$, $m\angle 10$ في الشكل المجاور. وبرّر إجابتك.

36) **اكتب:** لخّص خصائص أضلاع متوازي الأضلاع وزواياه وأقطاره.

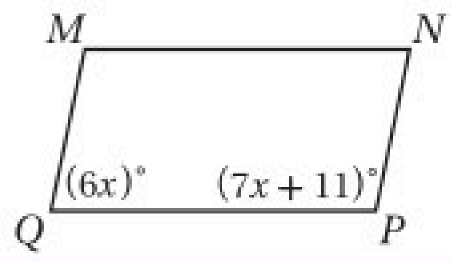
تدريب على اختبار

37) قياسا زاويتين متحالفتين في متوازي أضلاع هما: $3x + 42$, $9x - 18$. ما قياس الزاويتين؟

A 13, 167 **B** 58.5, 31.5

C 39, 141 **D** 81, 99

38) إذا كان $QPNM$ متوازي أضلاع، فما قيمة x؟



مراجعة تراكمية

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى قياس إحدى زواياه الداخلية في كل مما يأتي: (الدرس 1-5)

39) $108°$ 40) $140°$ 41) $147.3°$

42) $160°$ 43) $135°$ 44) $176.4°$

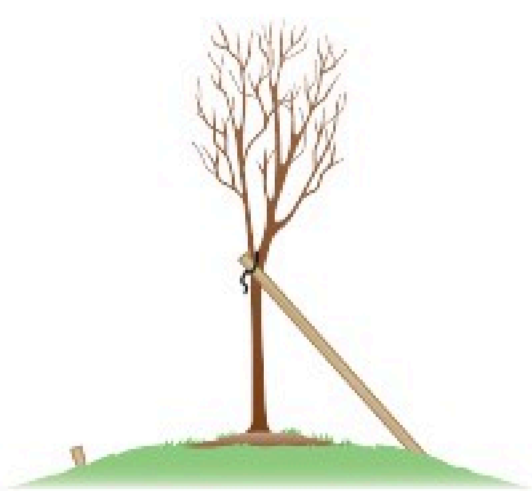
حدد ما إذا كان المستقيمان متوازيين أو متعامدين، أو غير ذلك في كل مما يأتي: (مهارة سابقة)

45) $y = -x + 6$
$x + y = 20$

46) $y - 7x = 6$
$7y + x = 8$

47) $3x + 4y = 12$
$6x + 2y = 6$

48) $2x + 5y = -1$
$10y = -4x - 20$



49) **زراعة:** عند زراعة الأشجار، تسند الشجرة بدعامة (على شكل عصا) ترتكز على الأرض وتربط في جذع الشجرة لتثبيتها. استعمل متباينة SAS لتفسير سبب فعالية هذه الطريقة في تثبيت الأشجار المزروعة رأسيًا. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

رؤوس شكل رباعي هي $W(3, -1), X(4, 2), Y(-2, 3), Z(-3, 0)$. حدّد ما إذا كانت كل قطعة مستقيمة مما يأتي تمثل ضلعًا أو قطرًا في الشكل الرباعي، وأوجد ميل كل منها.

50) $\overline{YZ}$ 51) $\overline{YW}$ 52) $\overline{ZW}$

5-3 تمييز متوازي الأضلاع
Distinguishing Parallelogram

فيما سبق:

درستُ خصائص متوازي الأضلاع وطبّقتها.

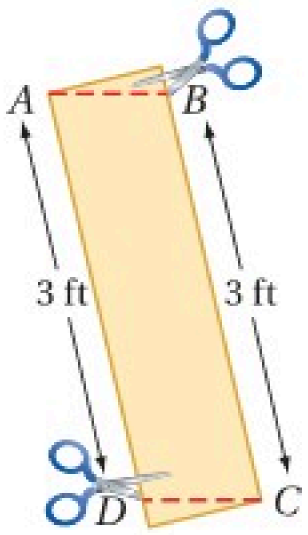
(الدرس 5-2)

والآن:

- أتعرّف الشروط التي تؤكد أنّ شكلًا رباعيًا متوازي أضلاع وأطبّقها.
- أُبرهن على أنّ أربع نقاط في المستوى الإحداثي تشكل رؤوس متوازي أضلاع.

لماذا؟

قصّت فاطمة شرائح ورقية ملونة لتكون خلفية للوحة الرياضيات عند مدخل المدرسة. فسألتها صديقتها: كيف قصصتِ الشرائح دون استعمال المنقلة بحيث كان الضلعان العلوي والسفلي في كل منها متوازيين؟



أجابت فاطمة: بما أن الضلعين الأيمن والأيسر للشريحة متوازيان، فإننا نحتاج فقط التأكد من أن لهما الطول نفسه عند قص الضلعين العلوي والسفلي للشريحة حتى نضمن أن الشرائح سوف تشكل متوازيات أضلاع.

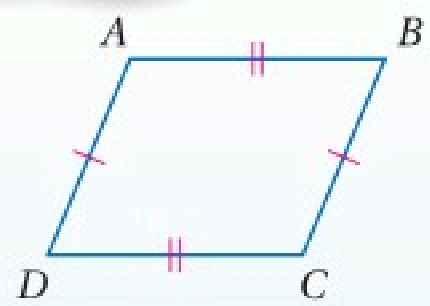
شروط متوازي الأضلاع: في الشكل الرباعي، إذا كان كل ضلعين متقابلين متوازيين، فإنّه متوازي أضلاع بحسب التعريف. ولكن ليس هذا هو الشرط الوحيد الذي يمكن استعماله لتحديد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

نظريات — شروط متوازي الأضلاع

أضف إلى مطويتك

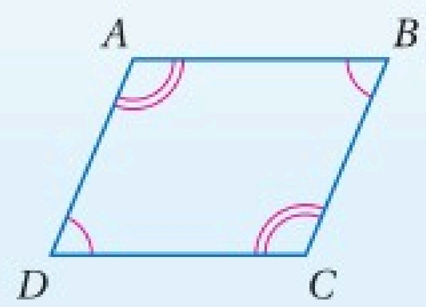
5.9 **في الشكل الرباعي، إذا كان كل ضلعين متقابلين متطابقين، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.**

مثال: إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{DC}, \overline{AD} \cong \overline{BC}$ ، فإن $ABCD$ متوازي أضلاع.



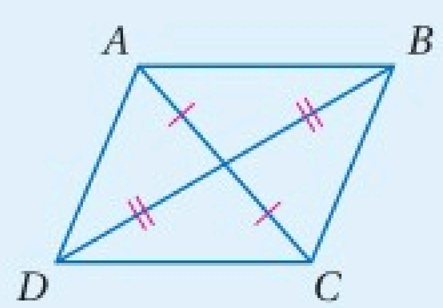
5.10 **في الشكل الرباعي، إذا كانت كل زاويتين متقابلتين متطابقتين، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.**

مثال: إذا كانت $\angle A \cong \angle C, \angle B \cong \angle D$ ، فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع.



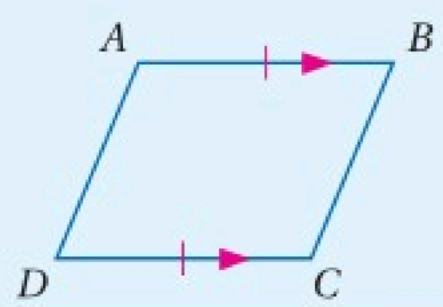
5.11 **إذا كان قطرا شكل رباعي ينصّف كل منهما الآخر، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.**

مثال: إذا كان $\overline{AC}, \overline{DB}$ ينصّف كل منهما الآخر، فإن $ABCD$ متوازي أضلاع.



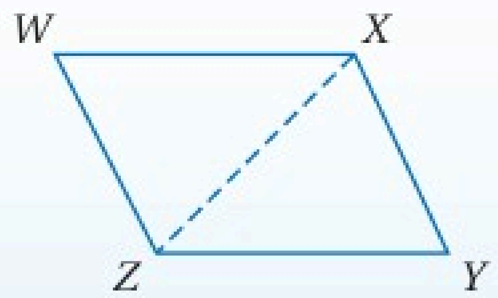
5.12 **في الشكل الرباعي، إذا كان فيه ضلعان متقابلان متوازيين ومتطابقين، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.**

مثال: إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{DC}, \overline{AB} \cong \overline{DC}$ ، فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع.



سوف تبرهن النظريتين 5.10, 5.11 في السؤالين 31, 29 على الترتيب، وتبرهن النظرية 5.12 في مثال 5

برهان نظريّة 5.9



اكتب برهاناً حرًّا للنظريّة 5.9

المعطيات: $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$, $\overline{WZ} \cong \overline{XY}$

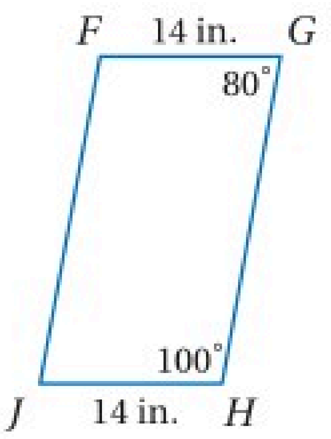
المطلوب: $WXYZ$ متوازي أضلاع.

البرهان:

ارسم قطعة مستقيمة مساعدة $\overline{ZX}$ (قطر $\square WXYZ$)لتشكيل $\triangle ZWX$, $\triangle XYZ$. ومن المعطيات $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$, $\overline{WZ} \cong \overline{XY}$. وكذلك $\overline{ZX} \cong \overline{XZ}$ بحسب خاصيّة الانعكاس للتطابق؛ إذن $\triangle ZWX \cong \triangle XYZ$ بحسب SSS. وبما أن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة، فإنّ $\angle WXZ \cong \angle YZX, \angle WZX \cong \angle YXZ$. وهذا يعني أنّ $\overline{WX} \parallel \overline{ZY}$, $\overline{WZ} \parallel \overline{XY}$ بحسب عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًّا. وبما أن الأضلاع المتقابلة في $WXYZ$ متوازية، فإنه متوازي أضلاع بحسب التعريف.

مثال 1 تحديد متوازي الأضلاع

حدد ما إذا كانت المعطيات على الشكل الرباعي المجاور كافية ليكون متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك.



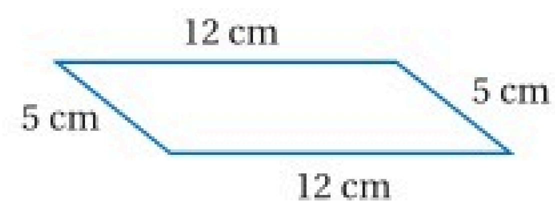
الضلعان المتقابلان $\overline{FG}$, $\overline{JH}$ متطابقان؛ لأنهما متساويان في الطول.

وبما أن $\angle FGH$, $\angle GHJ$ متحالفتان ومتكاملتان، فإنّ $\overline{FG} \parallel \overline{JH}$.

إذن فمن النظرية 5.12، يكون $FGHJ$ متوازي أضلاع.

تحقق من فهمك

(1A

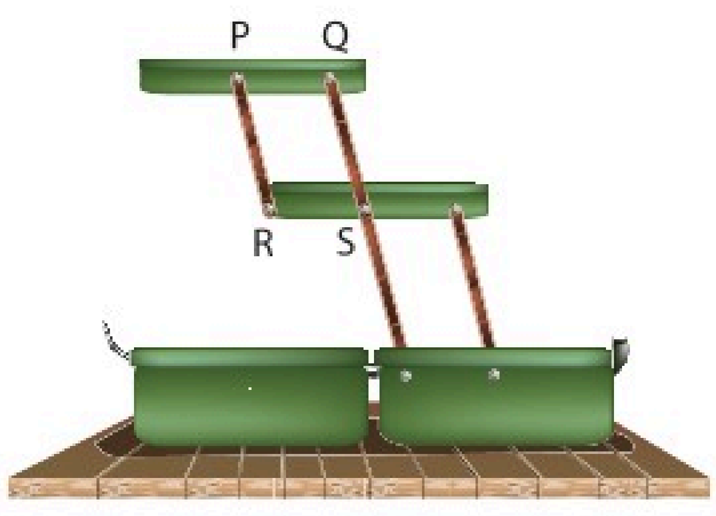


(1B

يمكنك استعمال شروط متوازي الأضلاع لإثبات علاقات من واقع الحياة.

مثال 2 من واقع الحياة استعمال متوازي الأضلاع لإثبات علاقات

صندوق الأدوات: **في الشكل المجاور،** **إذا كان $PQ = RS$, $PR = QS$، فبيِّن لماذا تبقى الطبقتان العلوية والوسطى متوازيتين عند أي ارتفاع .**



بما أن كلّ ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي $PQSR$ متطابقان، فإن $PQSR$ متوازي أضلاع بحسب النظرية 5.9.

إذن $\overline{RS} \parallel \overline{PQ}$ ؛ لذا وبغض النظر عن ارتفاع الطبقتين، فستبقيان متوازيتين.

الربط مع الحياة

يضع الفنيون أدواتهم في صناديق ذات طبقات متداخلة تسهّل تنظيم الأدوات وتبقيها في متناول أيديهم.

تحقق من فهمك

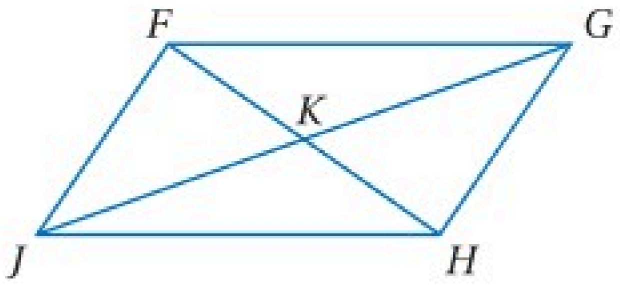
2) **لوحات:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس، وضّح لماذا يكون خطي القص أعلى وأسفل كل شريحة متوازيين.

تنبيه !

متوازي الأضلاع:
في المثال 3، إذا كانت x تساوي 4، فإن y يجب أن تساوي 2.5 حتى يكون الشكل الرباعي $FGHJ$ متوازي أضلاع. وهذا يعني أنه إذا كانت x تساوي 4 و y تساوي 1 مثلًا، فلن يكون $FGHJ$ متوازي أضلاع.

يمكنك استعمال الجبر مع شروط متوازي الأضلاع لإيجاد القيم المجهولة التي تجعل شكلًا رباعيًّا متوازي أضلاع.

مثال 3 استعمال متوازي الأضلاع لإيجاد القيم المجهولة



في الشكل المجاور: $FK = 3x - 1, KG = 4y + 3$، $JK = 6y - 2, KH = 2x + 3$. أوجد قيمتي x, y بحيث يكون الشكل الرباعي $FGHJ$ متوازي أضلاع.

بناءً على النظرية 5.11، إذا كان قطرا شكل رباعي ينصّف كل منهما الآخر، فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع؛ لذا أوجد قيمة x التي تجعل $\overline{FK} \cong \overline{KH}$ ؛ وقيمة y التي تجعل $\overline{JK} \cong \overline{KG}$.

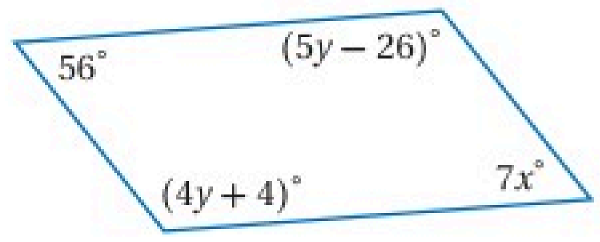
$FK = KH$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$3x - 1 = 2x + 3$	بالتعويض
$x - 1 = 3$	بطرح $2x$ من كلا الطرفين
$x = 4$	بإضافة 1 إلى كلا الطرفين
$JK = KG$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$6y - 2 = 4y + 3$	بالتعويض
$2y - 2 = 3$	بطرح $4y$ من كلا الطرفين
$2y = 5$	بإضافة 2 إلى كلا الطرفين
$y = 2.5$	بقسمة كلا الطرفين على 2

إذن عندما تكون $x = 4, y = 2.5$، يكون الشكل الرباعي $FGHJ$ متوازي أضلاع.

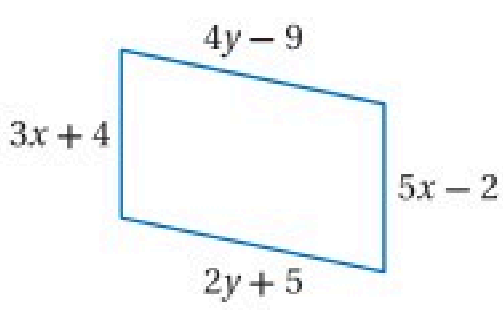
✓ تحقق من فهمك

أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

(3A



(3B



تعرفت شروط متوازي الأضلاع، وفيما يأتي ملخّص يوضح كيفيّة استعمال هذه الشروط لإثبات أنّ شكلًا رباعيًّا يمثّل متوازي أضلاع.

ملخص المفهوم إثبات أنّ شكلًا رباعيًّا يمثّل متوازي أضلاع

أضف إلى مطويتك

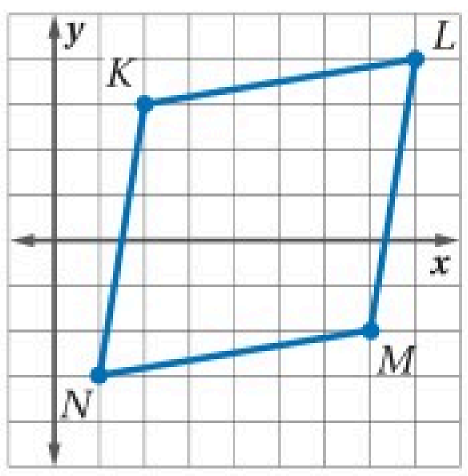
يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا حقَّق أيًّا من الشروط الآتية:

1) إذا كان كل ضلعين متقابلين فيه متوازيين. (التعريف)
2) إذا كان كل ضلعين متقابلين فيه متطابقين. (النظرية 5.9)
3) إذا كانت كل زاويتين متقابلتين فيه متطابقتين. (النظرية 5.10)
4) إذا كان قطراه ينصّف كل منهما الآخر. (النظرية 5.11)
5) إذا كان فيه ضلعان متقابلان متوازيين ومتطابقين. (النظرية 5.12)

متوازي الأضلاع في المستوى الإحداثي: يمكننا استعمال صيغ المسافة بين نقطتين والميل ونقطة المنتصف لتحديد ما إذا كان الشكل الرباعي في المستوى الإحداثي متوازي أضلاع أم لا.

مثال 4 متوازي الأضلاع والهندسة الإحداثيّة

هندسة إحداثية: مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي $KLMN$ الذي رؤوسه $K(2, 3), L(8, 4), M(7, -2), N(1, -3)$. وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك باستعمال صيغة الميل.



إذا كانت الأضلاع المتقابلة في الشكل الرباعي متوازية فإنه متوازي أضلاع.

ميل $\overline{KL}$: $\frac{4-3}{8-2} = \frac{1}{6}$

ميل $\overline{NM}$: $\frac{-2-(-3)}{7-1} = \frac{1}{6}$

ميل $\overline{KN}$: $\frac{-3-3}{1-2} = \frac{-6}{-1} = 6$

ميل $\overline{LM}$: $\frac{-2-4}{7-8} = \frac{-6}{-1} = 6$

بما أنّ الأضلاع المتقابلة لها الميل نفسه، فإنّ $\overline{KL} \parallel \overline{NM}$, $\overline{LM} \parallel \overline{KN}$.
لذا فالشكل الرباعي $KLMN$ متوازي أضلاع بحسب التعريف.

تحقق من فهمك

مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي الذي أعطيت إحداثيات رؤوسه فيما يأتي. وحدِّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا. برِّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال:

4A) $A(3, 3), B(8, 2), C(6, -1), D(1, 0)$ ، صيغة المسافة.

4B) $F(-2, 4), G(4, 2), H(4, -2), J(-2, -1)$ ، صيغة نقطة المنتصف.

إرشادات للدراسة

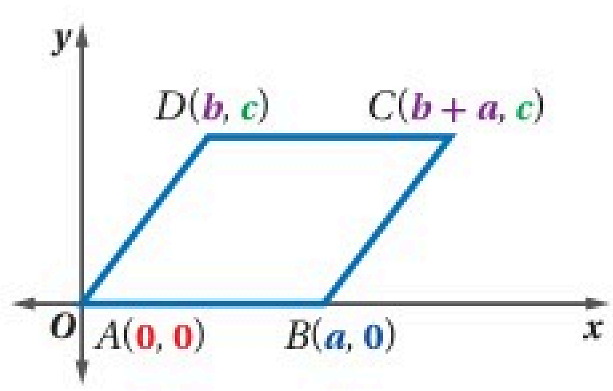
صيغة نقطة المنتصف:
لبيان أنّ شكلًا رباعيًا يمثّل متوازي أضلاع، يمكنك استعمال صيغة نقطة المنتصف، فإذا كانت نقطتا المنتصف للقطرين متساويتين، فإنّ القطرين ينصّف كل منهما الآخر.

درست سابقًا، أنّه يمكن التعبير عن إحداثيات رؤوس المثلثات بمتغيرات. ثم استعمال صيغ المسافة بين نقطتين والميل ونقطة المنتصف لكتابة براهين إحداثيّة للنظريات. ويمكن عمل الشيء نفسه مع الأشكال الرباعيّة.

مثال 5 متوازي الأضلاع والبرهان الإحداثي

اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة الآتية :

في الشكل الرباعي، إذا كان فيه ضلعان متقابلان متوازيين ومتطابقين، فإنّ الشكل الرباعي متوازي أضلاع.



الخطوة 1: ارسم الشكل الرباعي $ABCD$ في المستوى الإحداثي على أن يكون $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $\overline{AB} \cong \overline{DC}$.

- عيّن الرأس A عند النقطة $(0, 0)$.
- افترض أن طول $\overline{AB}$ يساوي a وحدة. فيكون إحداثيا B هما $(a, 0)$.
- بما أنّ القطع المستقيمة الأفقيّة متوازية دائمًا، فعيّن نقطتي طرفي $\overline{DC}$ على أن يكون لهما الإحداثي y نفسه وليكن c.
- بما أن المسافة من D إلى C تساوي أيضًا a وحدة، وبفرض أنّ الإحداثي x للنقطة D يساوي b ، يكون الإحداثي x للنقطة C يساوي $b + a$.

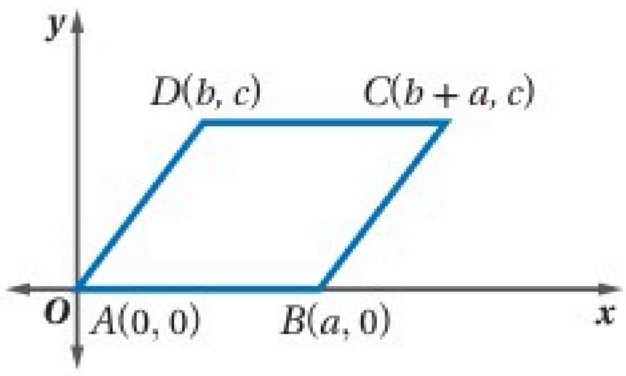
مراجعة المفردات

البرهان الإحداثي:
هو برهان تُستعمل فيه أشكال في المستوى الإحداثي والجبر لإثبات مفاهيم هندسيّة.

تاريخ الرياضيات

رينيه ديكارت
(1596م - 1650م)
عالم رياضيات فرنسي، وهو أول من استعمل المستوى الإحداثي . وقيل إنَّه فكَّر أولًا بربط كل موقع في مستوى مع زوج من الأعداد.

الخطوة 2: استعمل الشكل الذي رسمته لكتابة برهان.



المعطيات: $ABCD$ شكل رباعي فيه $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

المطلوب: $ABCD$ متوازي أضلاع.

برهان إحداثي:

من التعريف يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كانت أضلاعه المتقابلة متوازية.

ومن المعطيات $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. يبقى أن نثبت أن $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

استعمل صيغة الميل.

ميل $\overline{AD}$: $\frac{c-0}{b-0} = \frac{c}{b}$ ميل $\overline{BC}$: $\frac{c-0}{b+a-a} = \frac{c}{b}$

وبما أن $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ لهما الميل نفسه، فإنّ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ؛ لذا فالشكل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع؛ لأن كل ضلعين متقابلين فيه متوازيان.

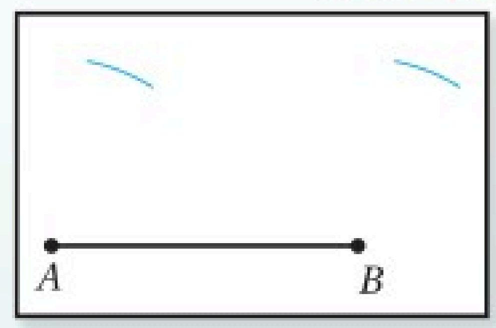
تحقق من فهمك

5) اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة الآتية: إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع فإنّ أضلاعه المتقابلة متطابقة.

إنشاءات هندسية

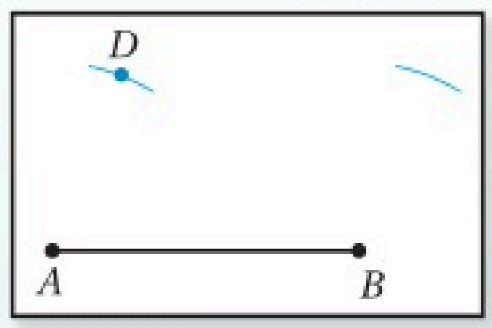
رسم متوازي أضلاع عُلم طولا ضلعين متتاليين فيه.

الخطوة 1:



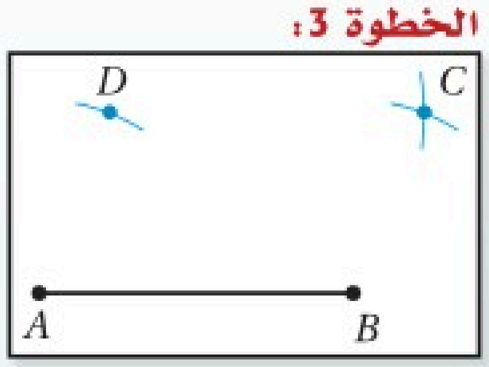
استعمل المسطرة لرسم $\overline{AB}$. ثم افتح الفرجار، وثبّته عند النقطة A، وارسم قوسًا فوقها. ثبّت الفرجار عند النقطة B، وبفتحة الفرجار نفسها ارسم قوسًا فوق B.

الخطوة 2:



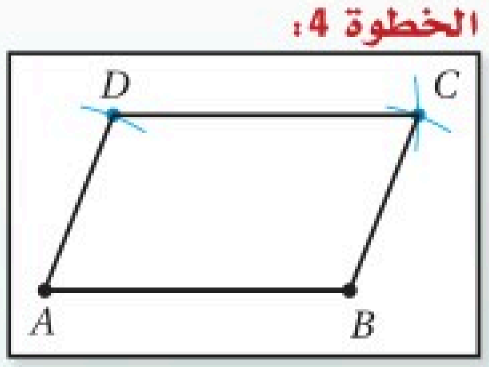
اختر نقطة على القوس الذي فوق A وسمِّها D.

الخطوة 3:



افتح الفرجار فتحة مساوية لِـ $\overline{AB}$، وثبّته عند النقطة D وارسم قوسًا يقطع القوس المرسوم من النقطة B، سمِّ نقطة التقاطع C.

الخطوة 4:

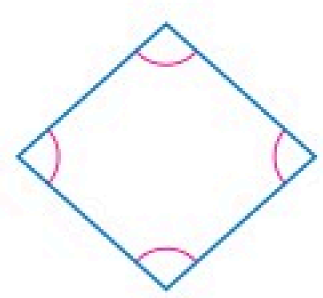


استعمل حافة المسطرة لرسم $\overline{AD}, \overline{BC}, \overline{CD}$.

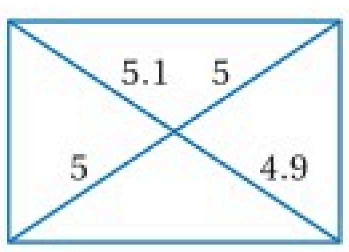
تأكد

المثال 1 حدّد ما إذا كان كل شكل رباعي فيما يأتي متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك.

1)

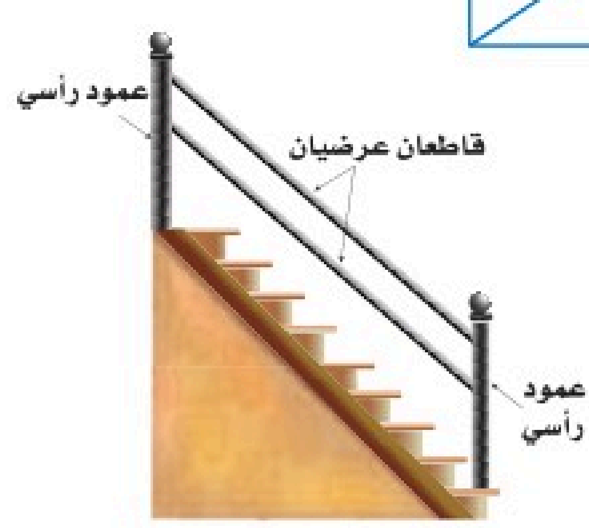


2)



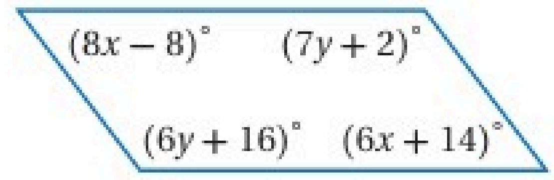
المثال 2

3) نجارة: صنع نجار درابزينًا لدَرَج يتكوّن من عمودين رأسيين؛ الأول مثبت فوق الدرجة الأولى، والثاني مثبت فوق الدرجة الأخيرة، ويصل بينهما قاطعان خشبيان كما في الشكل المجاور. كيف يمكن للنجار التحقق من أن القاطعين الخشبيين العرضيين متوازيان، وذلك بأقل عدد من مرات القياس، إذا علمت بأن الدرجتين الأولى والأخيرة مستويتان مع الأرض.

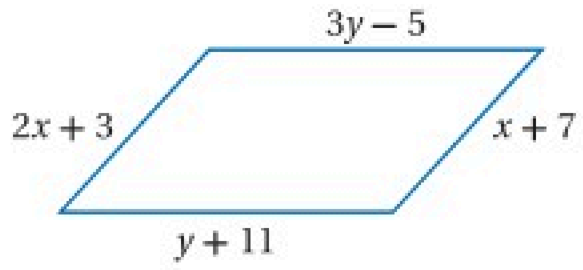


المثال 3 **جبر:** أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

(4



(5



المثال 4 **هندسة إحداثيّة:** مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه فيما يأتي. وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا، برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحدّدة في السؤال.

6) $A(-2, 4), B(5, 4), C(8, -1), D(-1, -1)$ ، صيغة الميل.

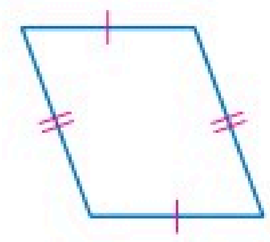
7) $W(-5, 4), X(3, 4), Y(1, -3), Z(-7, -3)$ ، صيغة نقطة المنتصف.

المثال 5 **8)** اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة الآتية: إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع، فإنّ قطريه ينصّف كل منهما الآخر.

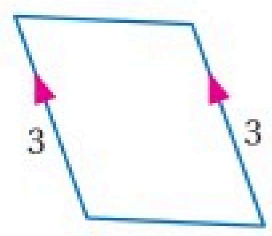
تدرب وحل المسائل

المثال 1 حدّد ما إذا كانت المعطيات في كل مما يأتي كافية ليكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك.

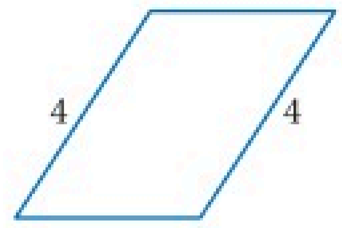
(9



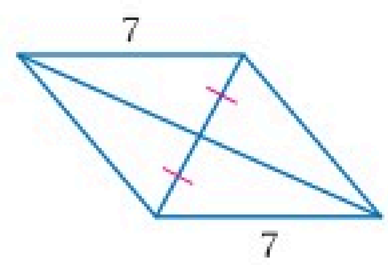
(10



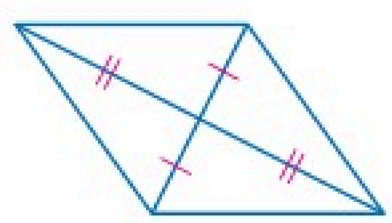
(11



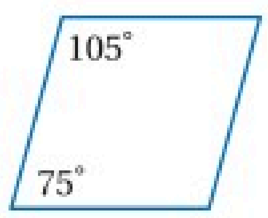
(12



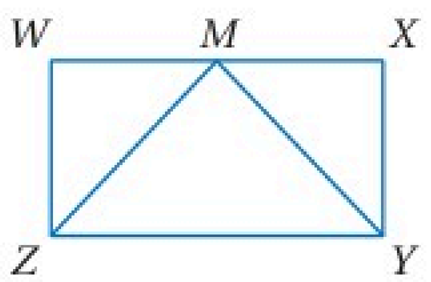
(13



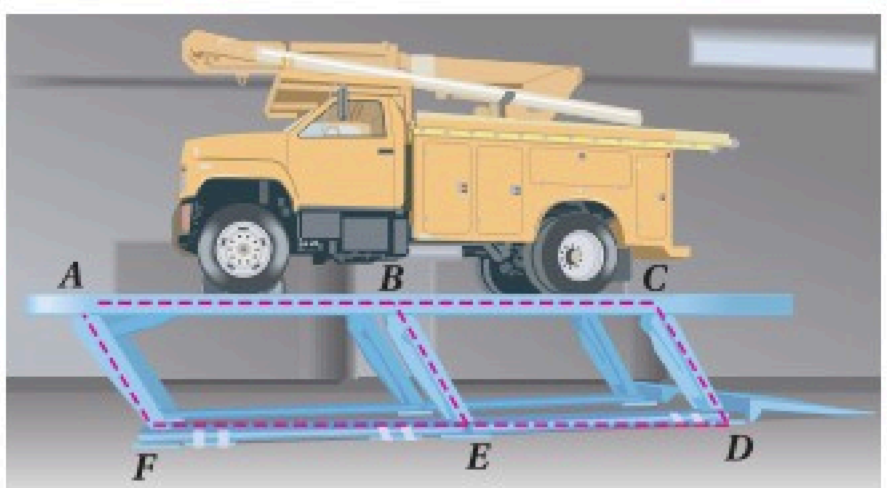
(14



المثال 2 **15)** **برهان:** إذا كان $WXYZ$ متوازي أضلاع، حيث $\angle W \cong \angle X$ ، M نقطة منتصف $\overline{WX}$ ، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن $\triangle ZMY$ متطابق الضلعين.

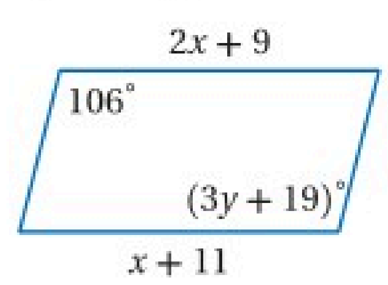


16) **رافعات:** تستعمل رافعات متوازيات الأضلاع لرفع المركبات الثقيلة عند صيانتها. ففي الشكل أدناه: $ABEF, BCDE$ متوازيا أضلاع. اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن $ACDF$ متوازي أضلاع أيضًا.

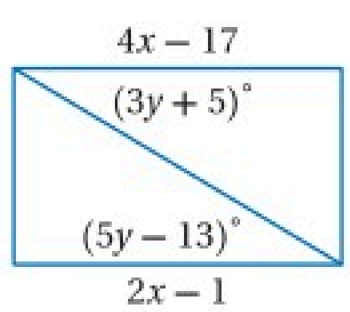


المثال 3 **جبر:** أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

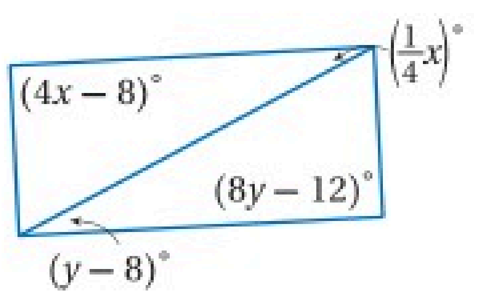
(17



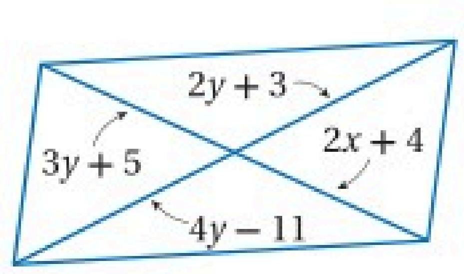
(18



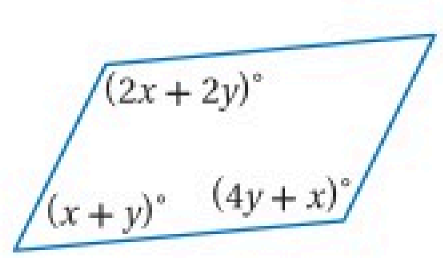
(19



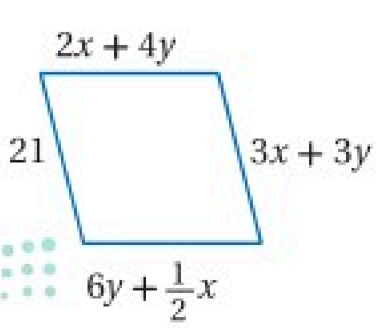
(20



(21



(22



المثال 4 **هندسة إحداثيّة:** **مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه فيما يأتي. وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا، برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحدّدة في السؤال.**

23) $A(-3, 4)$، $B(4, 5)$، $C(5, -1)$، $D(-2, -2)$ ، صيغة الميل.

24) $J(-4, -4)$، $K(-3, 1)$، $L(4, 3)$، $M(3, -3)$ ، صيغة المسافة بين نقطتين.

25) $V(3, 5)$، $W(1, -2)$، $X(-6, 2)$، $Y(-4, 7)$ ، صيغة الميل.

26) $Q(2, -4)$، $R(4, 3)$، $S(-3, 6)$، $T(-5, -1)$ ، صيغتا الميل والمسافة بين نقطتين.

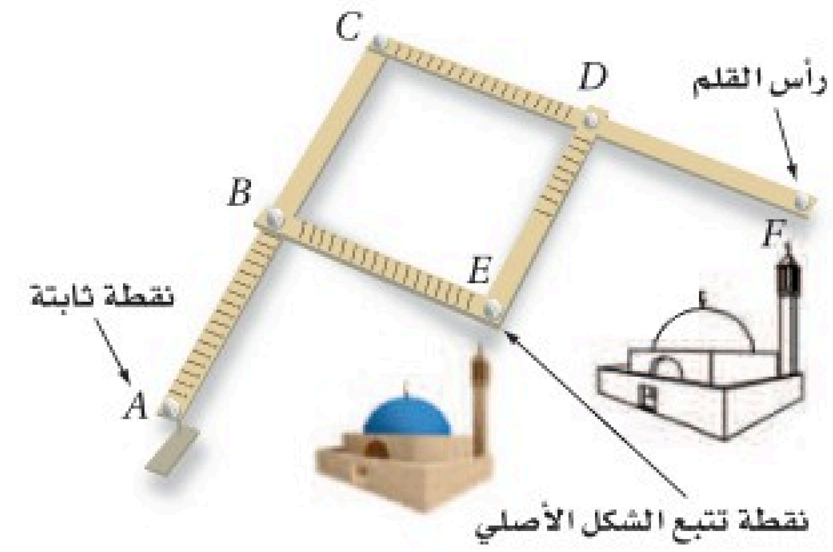
المثال 5

27) اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة: إذا كان كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي متطابقين، فإنه متوازي أضلاع.

28) اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة: إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة، فإنّ جميع زواياه قوائم.

29) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 5.10.

30) **المِنْسَاخ:** استعن بمعلومات الربط مع الحياة إلى اليمين والشكل أدناه.



a) إذا كان $\overline{AC} \cong \overline{CF}$, $\overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{BE}$, $\overline{DF} \cong \overline{DE}$، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أنّ $\overline{CD} \parallel \overline{BE}$.

b) مقياس الرسم للشكل المنسوخ بالنسبة للشكل الأصلي هو نسبة CF إلى BE،
فإذا كان $AB = 12\text{in}, DF = 8\text{in}$ ، وطول الشكل الأصلي $1.5\,\text{in}$، فما طول صورة الشكل المنسوخ؟

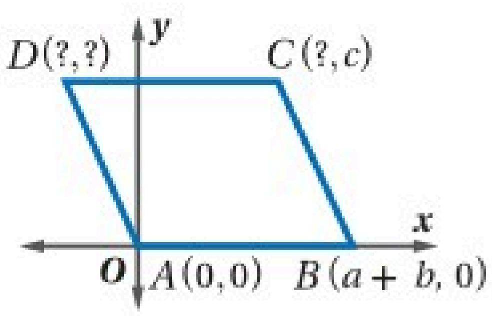
الربط مع الحياة

المِنْسَاخ هو أداة هندسية تستعمل لنسخ صورة أو مخطط وفق مقياس رسم معين.

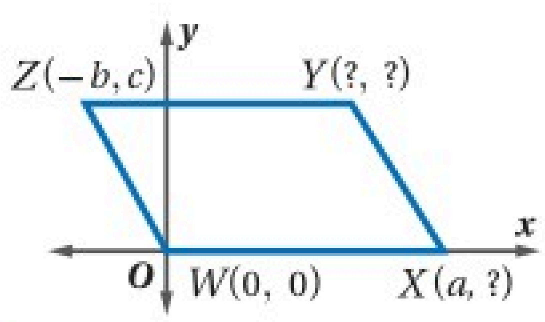
31) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 5.11

أوجد الإحداثيات المجهولة لرؤوس كل من متوازيي الأضلاع الآتيين:

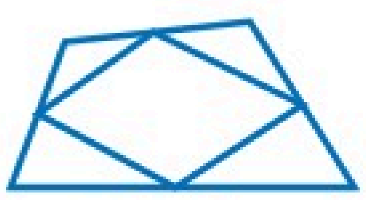
32)



33)



34) **برهان:** اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفات أضلاع أي شكل رباعي تشكّل متوازي أضلاع.



35) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة سوف تستقصي إحدى خصائص المستطيل.

a) **هندسيًّا:** ارسم ثلاثة مستطيلات بأبعاد مختلفة وسمِّها $ABCD, MNOP, WXYZ$، ثم ارسم قطري كل منها.

b) قِس طولي قطري كل مستطيل، ثم أكمل الجدول المجاور.

c) **لفظيًّا:** اكتب تخمينًا حول قطري المستطيل.

المستطيل	القطر	الطول
$ABCD$	$\overline{AC}$	
	$\overline{BD}$	
$MNOP$	$\overline{MO}$	
	$\overline{NP}$	
$WXYZ$	$\overline{WY}$	
	$\overline{XZ}$	

مراجعة المفردات

مقياس الرسم:
هو نسبة تستعمل لتمثيل الأشياء التي تكون كبيرة جدًّا أو صغيرة جدًّا عندما ترسم بحجمها الحقيقي. ويعطي المقياس نسبة تقارن بين قياسات الرسم أو النموذج وقياسات الأشياء الحقيقية.

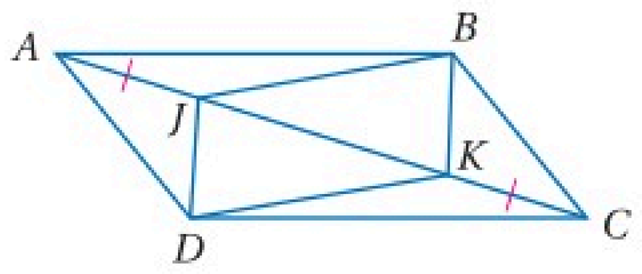
مسائل مهارات التفكير العليا

36) **تحدٍّ:** يتقاطع قطرا متوازي أضلاع عند النقطة $(1, 0)$. ويقع أحد رؤوسه عند النقطة $(2, 4)$، بينما يقع رأس آخر عند النقطة $(3, 1)$. أوجد موقعي الرأسين الآخرين.

37) **اكتب:** بيِّن أوجه الشبه والاختلاف بين النظريتين 5.9 و 5.3 .

38) **تبرير:** إذا كانت الزوايا المتناظرة في متوازيي أضلاع متطابقة، فهل يكون متوازيا الأضلاع متطابقين أحيانًا، أم دائمًا، أم لا يكونان متطابقين أبدًا؟

39) **تحدٍّ:** في الشكل المجاور، $ABCD$ متوازي أضلاع، $\overline{AJ} \cong \overline{KC}$. بيّن أن الشكل الرباعي $JBKD$ متوازي أضلاع.



40) **اكتب:** استعمل العبارات الشرطية الثنائية "إذا وفقط إذا" في دمج كل من النظريات: 5.9 وَ 5.10 وَ 5.11 وَ 5.12 وعكسها.

تدريب على اختبار

41) إذا كان الضلعان $\overline{AB}, \overline{DC}$ في الشكل الرباعي $ABCD$ متوازيين، فأيّ المعطيات الآتية كافية لإثبات أنّ $ABCD$ متوازي أضلاع؟

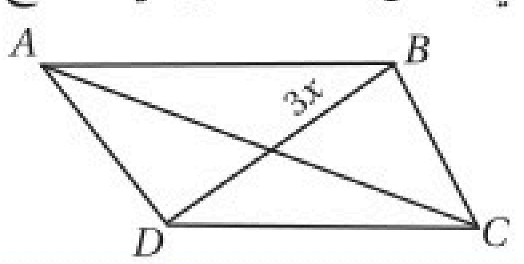
A $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

B $\overline{AB} \cong \overline{DC}$

C $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

D $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

42) **إجابة قصيرة:** في الشكل الرباعي $ABCD$ أدناه، إذا كان $\overline{AC}$ تنصّف $\overline{BD}$ ، $AC = 40, BD = \frac{3}{5} AC$ ، فما قيمة x التي تجعل $ABCD$ متوازي أضلاع؟



مراجعة تراكمية

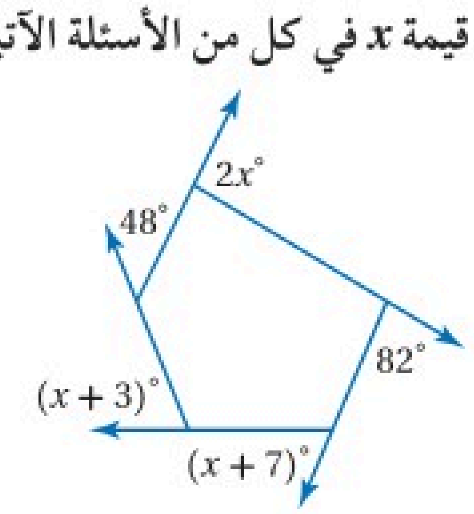
هندسة إحداثيّة: أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع $ABCD$ في كل من السؤالين الآتيين (الدرس 5-2)

43) $A(-3, 5), B(6, 5), C(5, -4), D(-4, -4)$

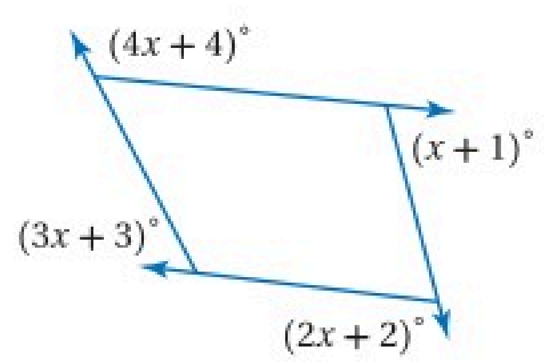
44) $A(2, 5), B(10, 7), C(7, -2), D(-1, -4)$

أوجد قيمة x في كل من الأسئلة الآتية : (الدرس 5-1)

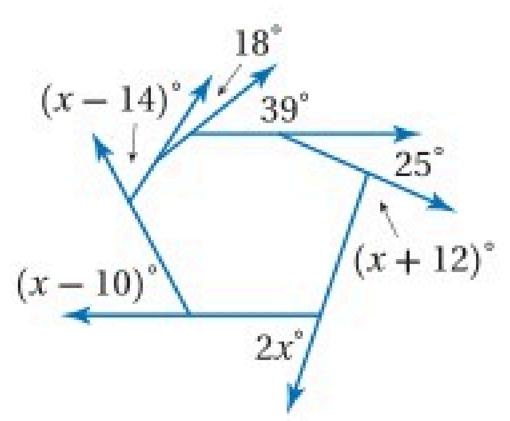
45)



46)



47)



أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى قياس إحدى زواياه الداخلية في كل مما يأتي: (الدرس 5-1)

48) $140°$

49) $160°$

50) $168°$

51) $162°$

استعد للدرس اللاحق

استعمل الميل لتحديد ما إذا كان $\overline{XY}, \overline{YZ}$ متعامدتين أم لا في كل مما يأتي:

52) $X(-2, 2), Y(0, 1), Z(4, 1)$

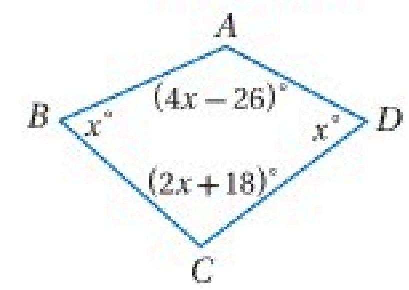
53) $X(4, 1), Y(5, 3), Z(6, 2)$

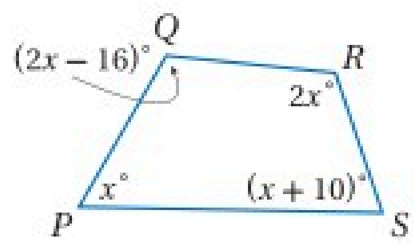
الفصل
5
اختبار منتصف الفصل
الدروس 1-5 إلى 3-5

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة في كل من المضلعات المحدبة الآتية : (الدرس 1-5)

1) الخماسي
2) السباعي
3) ذو 18 ضلعًا
4) ذو 23 ضلعًا

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية في كل من المضلعين الآتيين: (الدرس 1-5)

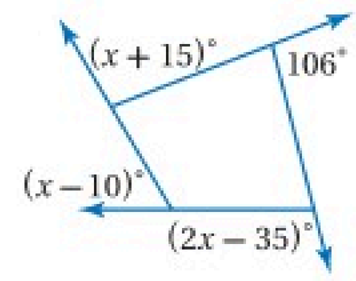
5)


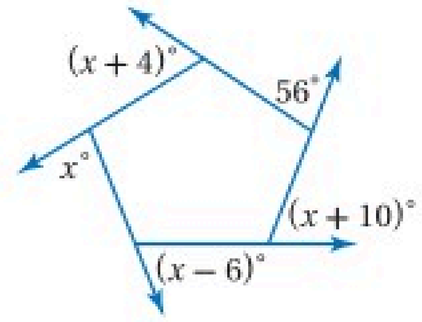
6)


أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى مجموع قياسات زواياه الداخلية في كل مما يأتي : (الدرس 1-5)

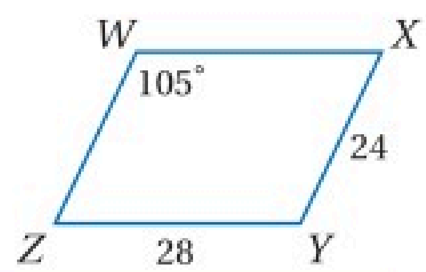
7) 720°
8) 1260°
9) 1800°
10) 4500°

أوجد قيمة x في كل من الشكلين الآتيين : (الدرس 1-5)

11)


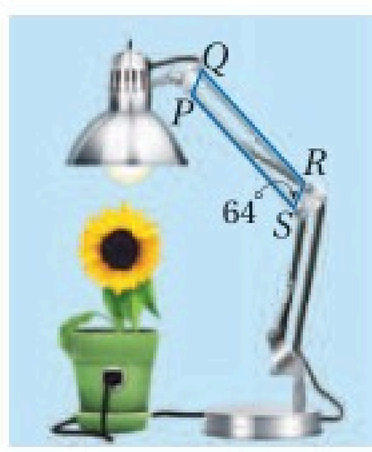
12)


استعمل $\square WXYZ$ لإيجاد كل مما يأتي : (الدرس 2-5)

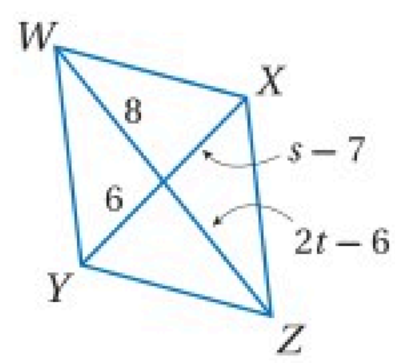


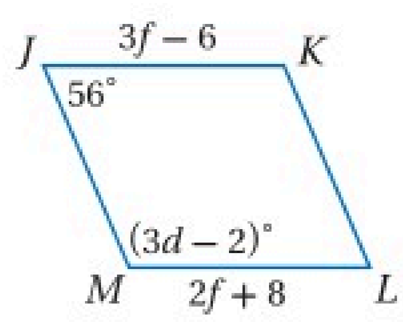
13) $m\angle WZY$
14) WZ
15) $m\angle XYZ$

16) **إنارة:** استعمل مقبض الإنارة العلوي الذي يشكل متوازي أضلاع في إيجاد $m\angle P$ في $\square PQRS$. (الدرس 2-5)



جبر: أوجد قيم المتغيرات في كل من متوازيي الأضلاع الآتيين : (الدرس 2-5)

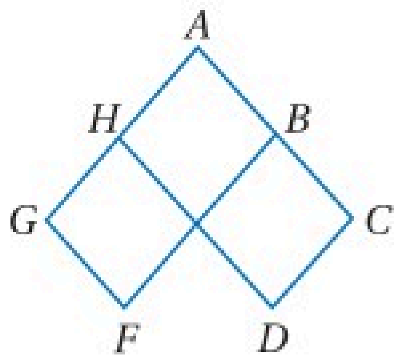
17)


18)


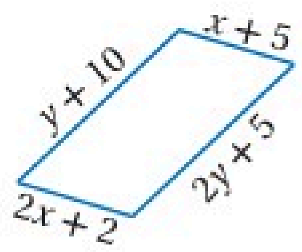
19) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 2-5)

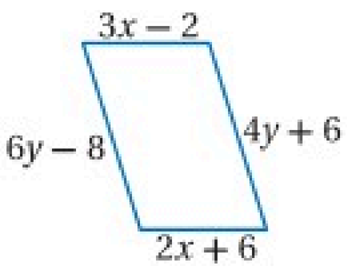
المعطيات: $\square GFBA$, $\square HACD$

المطلوب: $\angle F \cong \angle D$



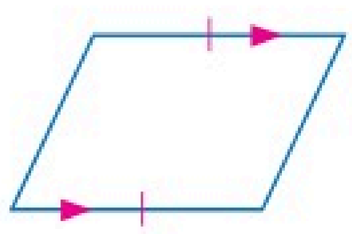
أوجد قيمتي x , y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع : (الدرس 3-5)

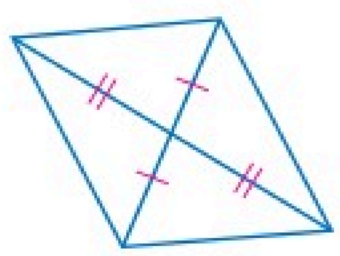
20)


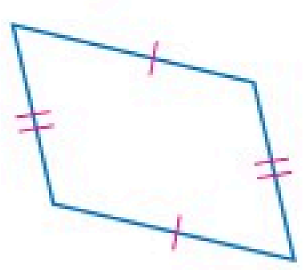
21)


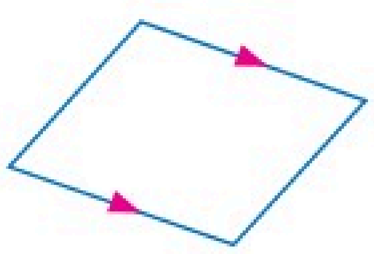
22) **طاولات:** لماذا يبقى سطح طاولة كي الثياب في الصورة أدناه موازيًا لأرضية الغرفة دائمًا؟ (الدرس 3-5)

23) **اختيار من متعدد:** أيّ الأشكال الرباعية الآتية ليس متوازي أضلاع؟ (الدرس 3-5)

A


C


B


D


هندسة إحداثيّة: حدِّد ما إذا كان الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي متوازي أضلاع. برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال. (الدرس 3-5)

24) $A(-6,-5)$, $B(-1,-4)$, $C(0,-1)$, $D(-5,-2)$، صيغة المسافة بين نقطتين.

25) $Q(-5,2)$, $R(-3,-6)$, $S(2,2)$, $T(-1,6)$، صيغة الميل.

5-4 المستطيل
Rectangle

فيما سبق:

درستُ استعمال خصائص متوازي الأضلاع وتحديد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

(الدرس 5-2)

والآن:

- أتعرّف خصائص المستطيل وأطبّقها.
- أحدّد ما إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلًا.

المفردات:

المستطيل
rectangle

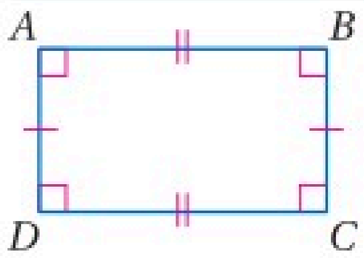
رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

لماذا؟

أحمد هو الطالب المسؤول عن عرض لوحات الرياضيات في يوم النشاط المدرسي. ولعمل خلفية مميزة يعرض عليها لوحات الرياضيات، قام بطلاء جزء من جدار على شكل مستطيل يبدأ طوله من أسفل الجدار ويمتد للأعلى، وكان طوله 80 in، وعرضه 36 in. كيف يمكنه أن يتحقق من أنّ الجزء الذي قام بطلائه مستطيل؟

خصائص المستطيل: **المستطيل** هو متوازي أضلاع زواياه الأربع قوائم. ونجد من ذلك أنّ للمستطيل الخصائص الآتية:

- الزوايا الأربع قوائم.
- كل ضلعين متقابلين متوازيان ومتطابقان.
- كل زاويتين متقابلتين متطابقتان.
- كل زاويتين متحالفتين متكاملتان.
- القطران ينصِّف كل منهما الآخر.



المستطيل $ABCD$

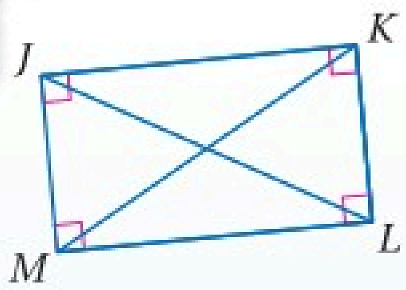
وبالإضافة إلى ذلك، قطرا المستطيل متطابقان، كما توضح النظرية الآتية:

نظرية 5.13 قطرا المستطيل

أضف إلى مطويتك

إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلًا، فإن قطريه متطابقان.

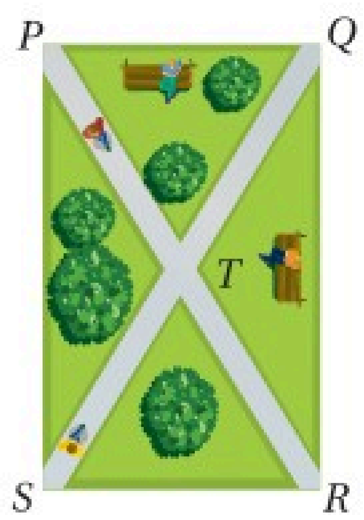
مثال: **إذا كان** $\square JKLM$ **مستطيلًا، فإنّ** $\overline{JL} \cong \overline{MK}$.



سوف تبرهن النظرية 5.13 في السؤال 33 .

مثال 1 من واقع الحياة استعمال خصائص المستطيل

حدائق: حديقة مستطيلة الشكل تحتوي على ممرين كما في الشكل المجاور. إذا كان $PR = 200$ m، فأوجد QT.



$\overline{QS} \cong \overline{PR}$	قطرا المستطيل متطابقان
$QS = PR$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$QS = 200$	بالتعويض

وبما أن $PQRS$ مستطيل، لذا فإن قطريه ينصِّف كل منهما الآخر؛ لذا

$$QT = \frac{1}{2}\,QS$$

$$QT = \frac{1}{2}\,(200) = 100 \quad \text{بالتعويض}$$

تحقق من فهمك

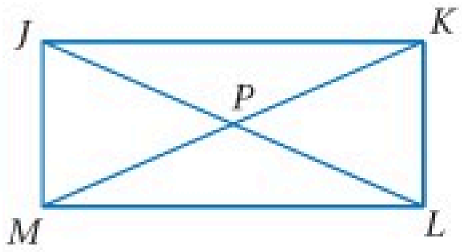
استعن بالشكل في المثال 1.

1A) إذا كان $TS = 120$ ، فأوجد PR.

1B) إذا كان $m\angle PRS = 64°$، فأوجد $m\angle SQR$.

يمكنك استعمال خصائص المستطيل والجبر لإيجاد قيم مجهولة.

مثال 2 استعمال خصائص المستطيل والجبر



جبر: الشكل الرباعي $JKLM$ مستطيل. إذا كان $m\angle KJL = (2x + 4)^\circ$ و $m\angle JLK = (7x + 5)^\circ$، فأوجد قيمة x.

بما أن $JKLM$ مستطيل، فإن زواياه الأربع قوائم؛ إذن $m\angle MLK = 90^\circ$.
وبما أن $JKLM$ المستطيل متوازي أضلاع، فإن الأضلاع المتقابلة متوازية، والزوايا المتبادلة داخليًّا بالنسبة للقطر متطابقة.
لذا فإن $\angle JLM \cong \angle KJL$، ومن ذلك $m\angle JLM = m\angle KJL$.

$m\angle JLM + m\angle JLK = m\angle MLK$	مسلمة جمع الزوايا
$m\angle KJL + m\angle JLK = 90^\circ$	بالتعويض
$(2x + 4)^\circ + (7x + 5)^\circ = 90^\circ$	بالتعويض
$(9x + 9)^\circ = 90^\circ$	بجمع الحدود المتشابهة
$9x^\circ = 81^\circ$	بطرح 9 من كلا الطرفين
$x = 9$	بقسمة كلا الطرفين على 9

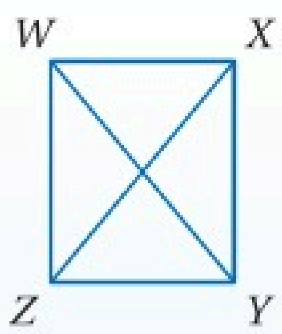
تحقق من فهمك

2) استعن بالشكل في المثال 2. إذا كان $JP = 3y - 5$, $MK = 5y + 1$، فأوجد قيمة y.

إثبات أنّ متوازي أضلاع يكون مستطيلًا: عكس النظرية 5.13 صحيح أيضًا.

نظرية 5.14

أضف إلى مطويتك



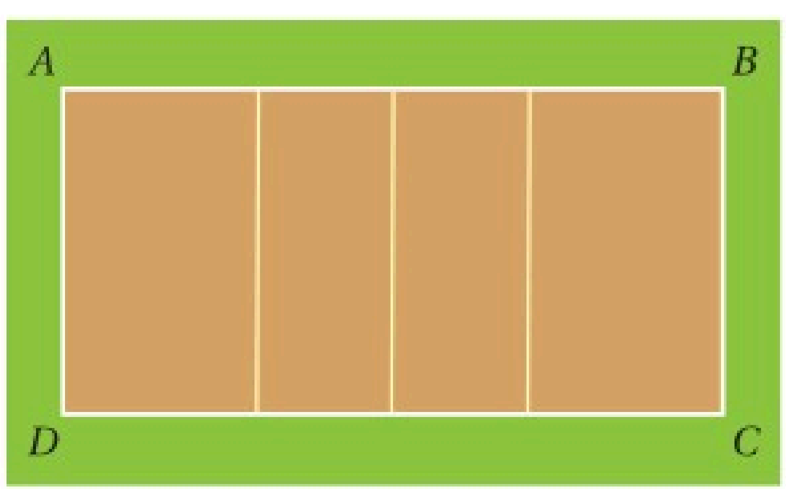
إذا كان قطرا متوازي أضلاع متطابقين فإنّه مستطيل.

مثال: في $\square WXYZ$، إذا كان $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$، فإنّ $\square WXYZ$ مستطيل.

سوف تبرهن هذه النظرية في السؤال 34.

مثال 3 من واقع الحياة إثبات علاقات في المستطيل

كرة طائرة: أنشأ نادٍ رياضي ملعبًا لكرة الطائرة، وللتأكد من أنه يحقق المواصفات المطلوبة، قاس المشرفون أطوال أضلاع الملعب وقطريه، فإذا كان $AB = 60$ ft, $BC = 30$ ft, $CD = 60$ ft, $AD = 30$ ft، $AC = 67$ ft، $BD = 67$ ft، فكيف يمكنهم التحقق من أنه مستطيل.



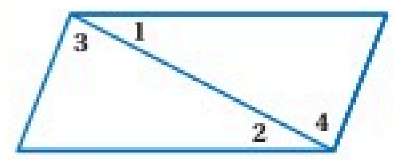
بما أن $AB = CD, BC = AD, AC = BD$، فإنّ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{BC} \cong \overline{AD}$, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$. وبما أن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{BC} \cong \overline{AD}$، فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع. ولأن $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ قطران متطابقان في $\square ABCD$، فإنّ $\square ABCD$ مستطيل.

إرشادات للدراسة

الزوايا القوائم: تذكّر من النظرية 5.6 أنه إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة، فإن زواياه الأربع قوائم.

إرشادات للدراسة

الزاويتان المتبادلتان داخليًّا بالنسبة لقطر: درست سابقًا في نظرية الزاويتان المتبادلتان داخليًا أنّه إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين، فإنّ كلّ زاويتين متبادلتين داخليًا متطابقتان، وينطبق هذا على الزاويتين المتبادلتين بالنسبة لقطر متوازي الأضلاع.



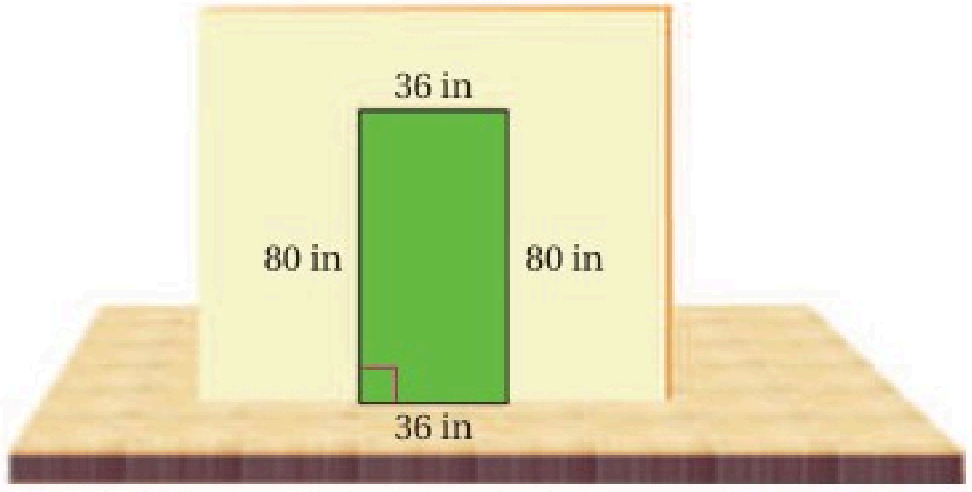
مثال: $\angle 1 \cong \angle 2$, $\angle 3 \cong \angle 4$

الربط مع الحياة

كرة الطائرة هي رياضة جماعية يتنافس فيها فريقان، لكل منهما ستة لاعبين، أما الكرة المستخدمة في هذه اللعبة، فهي متوسطة الحجم وأصغر من كرة القدم وأخف منها وزنًا.

تحقق من فهمك

3) **تصميم:** بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. قاس أحمد أبعاد المنطقة التي قام بطلائها كما في الشكل أدناه. وباستعمال زاوية النجارين تحقق من أن الزاوية عند الركن الأيسر السفلي قائمة. فهل يمكنه استنتاج أن المنطقة مستطيلة الشكل؟ وضِّح إجابتك.



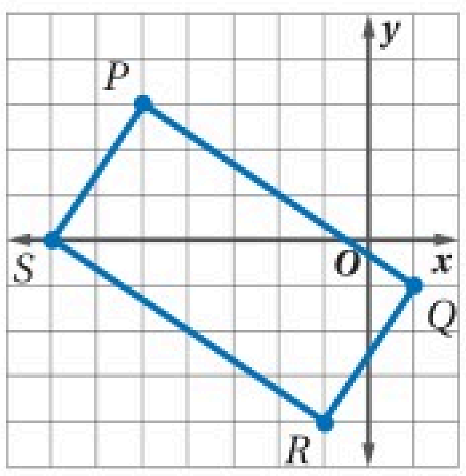
الربط مع الحياة

زاوية النجارين: عبارة عن ضلع خشبي سميك ومسطرة معدنية مثبتة معه بحيث يصنعان زاوية °90، وتُصنع من المعدن أو الخشب، وتستخدم لقياس وتحديد الزوايا القائمة، ورسم خطوط عمودية على الأحرف.

يمكنك أيضًا استعمال خصائص المستطيل لإثبات أنّ شكلًا رباعيًّا مرسومًا في المستوى الإحداثي عُلمت إحداثيات رؤوسه هو مستطيل.

مثال 4 المستطيل والهندسة الإحداثيّة

هندسة إحداثيّة: **إذا كانت إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $PQRS$ هي $P(-5, 3), Q(1, -1), R(-1, -4), S(-7, 0)$. فهل $PQRS$ مستطيل؟ استعمل صيغة المسافة بين نقطتين.**



الخطوة 1: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتحدد ما إذا كان $PQRS$ متوازي أضلاع، وذلك بالتحقق من أن أضلاعه المتقابلة متطابقة.

$$PQ = \sqrt{(-5-1)^2 + [3-(-1)]^2} = \sqrt{52}$$

$$RS = \sqrt{[-1-(-7)]^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{52}$$

$$PS = \sqrt{[-5-(-7)]^2 + (3-0)^2} = \sqrt{13}$$

$$QR = \sqrt{[1-(-1)]^2 + [-1-(-4)]^2} = \sqrt{13}$$

بما أن أضلاع $PQRS$ المتقابلة متساوية الطول، فإنّها متطابقة؛ لذا فإن $PQRS$ متوازي أضلاع.

الخطوة 2: هل قطرا $\square PQRS$ متطابقان؟

$$PR = \sqrt{[-5-(-1)]^2 + [3-(-4)]^2} = \sqrt{65}$$

$$QS = \sqrt{[1-(-7)]^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{65}$$

بما أن للقطرين الطول نفسه، فإنّهما متطابقان؛ لذا فإن $\square PQRS$ مستطيل.

إرشادات للدراسة

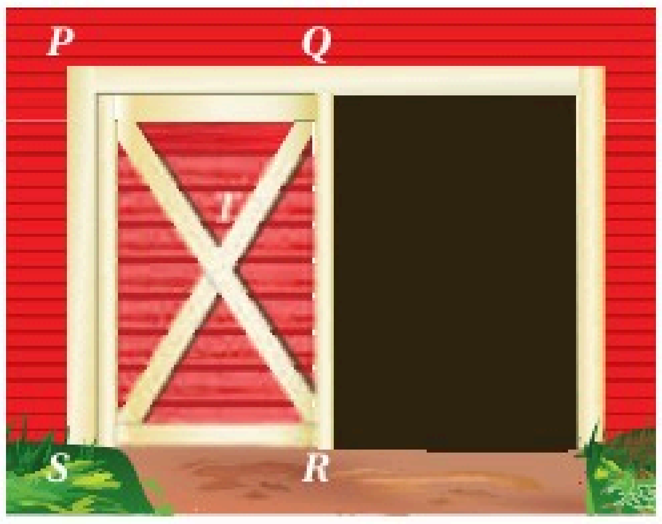
المستطيل ومتوازي الأضلاع: كل مستطيل متوازي أضلاع، ولكن ليس كل متوازي أضلاع مستطيلًا.

تحقق من فهمك

4) إذا كانت إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $JKLM$ هي $J(-10, 2), K(-8, -6), L(5, -3), M(2, 5)$. فهل $JKLM$ مستطيل؟ استعمل صيغة الميل.

تأكــد

المثال 1



زراعة: الشكل المجاور يبيّن بوّابة مخزن حبوب مستطيلة الشكل، فيها الدعامتان المتقاطعتان تقويان دفة البوّابة، وتحفظانها من الالتواء مع مرور الزمن.

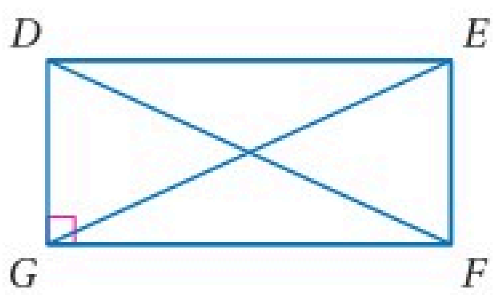
إذا كان $PS = 7\text{ ft}, ST = 3\frac{13}{16}\text{ ft}, m\angle PTQ = 67^\circ$،

فأوجد كلًّا مما يأتي :

1) QR 2) SQ

3) $m\angle TQR$ 4) $m\angle TSR$

المثال 2

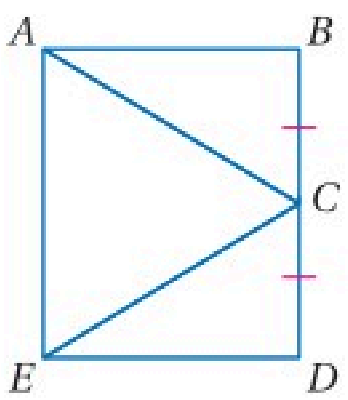


جبر: استعن بالمستطيل $DEFG$ المبيَّن جانبًا.

5) إذا كان $FD = 3x - 7$, $EG = x + 5$، فأوجد EG .

6) إذا كان $m\angle EFD = (2x - 3)^\circ$, $m\angle DFG = (x + 12)^\circ$، فأوجد $m\angle EFD$.

المثال 3



7) **برهان:** إذا كان $ABDE$ مستطيلًا، و $\overline{BC} \cong \overline{DC}$، فأثبت أنّ $\overline{AC} \cong \overline{EC}$.

المثال 4

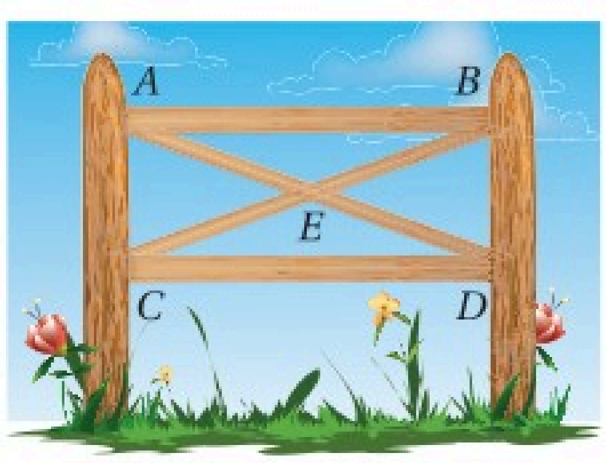
هندسة إحداثيّة: مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل من السؤالين الآتيين، وحدِّد ما إذا كان مستطيلًا أم لا. برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال.

8) $W(-4, 3), X(1, 5), Y(3, 1), Z(-2, -2)$ ، صيغة الميل.

9) $A(4, 3), B(4, -2), C(-4, -2), D(-4, 3)$ ، صيغة المسافة.

تدرب وحل المسائل

المثال 1



سياج: سياج مستطيل الشكل تُستعمل فيه دعائم متقاطعة لتقوية السياج.

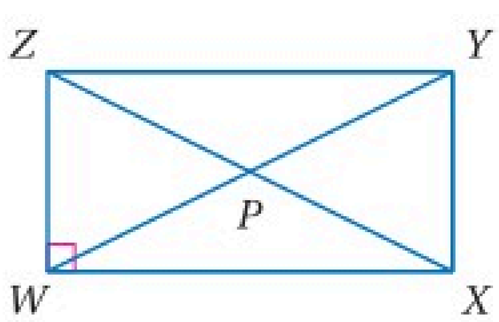
إذا كان $AB = 6\text{ ft}, AC = 2\text{ ft}, m\angle CAE = 65^\circ$،

فأوجد كلًّا مما يأتي :

10) BD 11) CB

12) $m\angle DEB$ 13) $m\angle ECD$

المثال 2



جبر: استعن بالمستطيل $WXYZ$ المبيَّن جانبًا.

14) إذا كان $ZY = 2x + 3$, $WX = x + 4$، فأوجد WX.

15) إذا كان $PY = 3x - 5$, $WP = 2x + 11$، فأوجد ZP.

16) إذا كان $m\angle ZYW = (2x - 7)^\circ$, $m\angle WYX = (2x + 5)^\circ$، فأوجد $m\angle ZYW$.

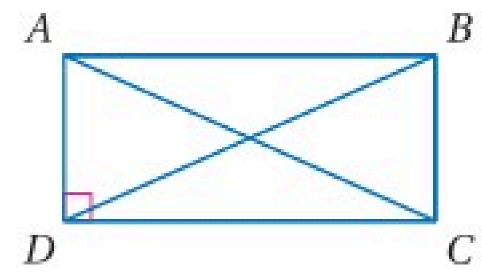
17) إذا كان $ZP = 4x - 9$, $PY = 2x + 5$، فأوجد ZX.

18) إذا كان $m\angle XZY = (3x + 6)^\circ$, $m\angle XZW = (5x - 12)^\circ$، فأوجد $m\angle YXZ$.

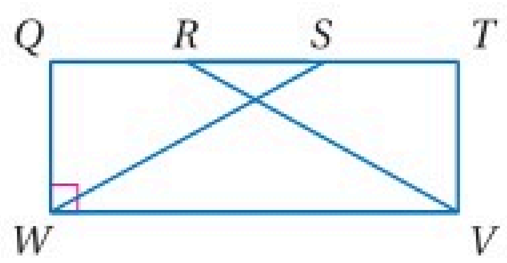
19) إذا كان $m\angle ZXW = (x - 11)^\circ$, $m\angle WZX = (x - 9)^\circ$، فأوجد $m\angle ZXY$.

المثال 3 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين في كل مما يأتي:

20) **المعطيات:** $ABCD$ مستطيل.
المطلوب: $\triangle ADC \cong \triangle BCD$



21) **المعطيات:** $QTVW$ مستطيل.
$\overline{QR} \cong \overline{ST}$
المطلوب: $\triangle SWQ \cong \triangle RVT$



المثال 4 **هندسة إحداثيّة:** مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي، وحدد ما إذا كان مستطيلًا أم لا. برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال.

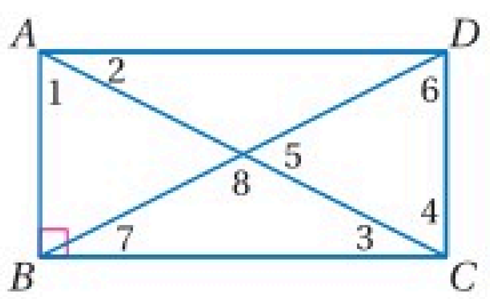
22) $W(-2, 4), X(5, 5), Y(6, -2), Z(-1, -3)$ ، صيغة الميل.

23) $J(3, 3), K(-5, 2), L(-4, -4), M(4, -3)$ ، صيغة المسافة بين نقطتين.

24) $Q(-2, 2), R(0, -2), S(6, 1), T(4, 5)$ ، صيغة المسافة بين نقطتين.

25) $G(1, 8), H(-7, 7), J(-6, 1), K(2, 2)$ ، صيغة الميل.

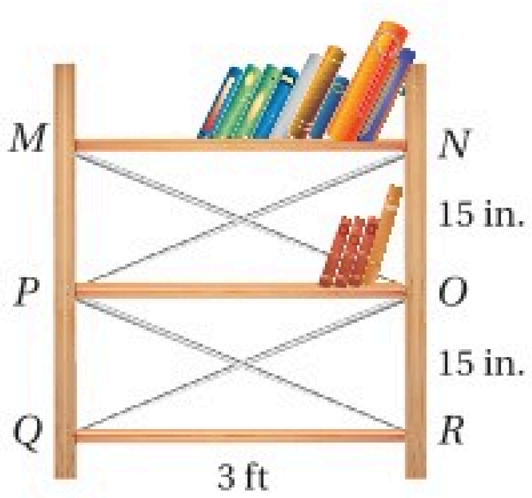
في المستطيل $ABCD$ ، إذا كان $m\angle 2 = 40°$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي :



26) $m\angle 1$ 27) $m\angle 7$ 28) $m\angle 3$

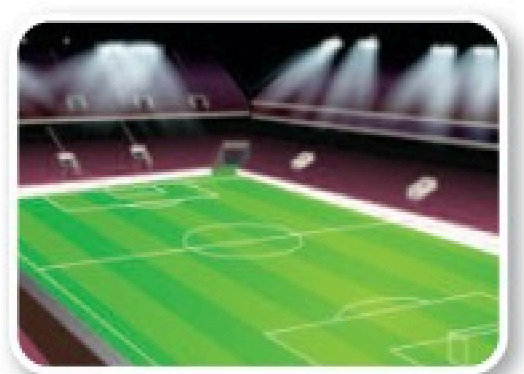
29) $m\angle 5$ 30) $m\angle 6$ 31) $m\angle 8$

32) **مكتبات:** أضاف زيد رفًّا جديدًا لمكتبته ودعائم معدنية متقاطعة كما في الشكل المجاور . كم يجب أن يكون طول كل من الدعائم المعدنية بحيث تكون الرفوف عمودية على الجانبين؟ وضّح إجابتك.
(إرشاد: $12\,in = 1\,ft$)



برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات النظرية في كل من السؤالين الآتيين :

33) النظريّة 5.13 34) النظريّة 5.14



35) **رياضة:** قام سلمان بعمل التخطيط الخارجي لملعب كرة قدم. وضّح كيف يمكنه التحقق من أن الملعب مستطيل الشكل باستعمال شريط القياس فقط.

الربط مع الحياة

حددت رابطة كرة القدم الدولية (IFAP) الأبعاد القياسية لملعب كرة القدم في البطولات الرسمية الدولية فكانت 105m طولا، و 68m عرضًا.

36) **تمثيلات متعدّدة:** سوف تستقصي في هذه المسألة خصائص متوازيات أضلاع خاصّة.

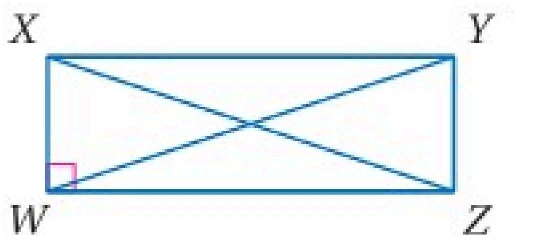
a) **هندسيًّا:** ارسم ثلاثة متوازيات أضلاع كل منها أضلاعه الأربعة متطابقة وسمِّها $ABCD, MNOP, WXYZ$. ثم ارسم قطري كل منها وسمِّ نقطة تقاطعهما R.

b) **جدوليًّا:** استعمل المنقلة لقياس الزوايا وأكمل الجدول الآتي .

متوازي الأضلاع	ABCD		MNOP		WXYZ	
الزاوية	$\angle ARB$	$\angle BRC$	$\angle MRN$	$\angle NRO$	$\angle WRX$	$\angle XRY$
قياس الزاوية						

c) **لفظيًّا:** اكتب تخمينًا حول قطري متوازي الأضلاع المتطابق الأضلاع.

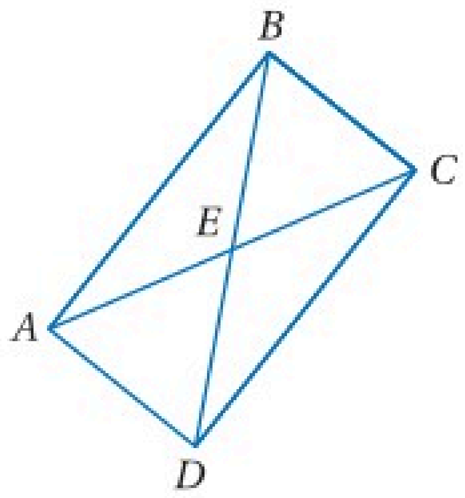
جبر: استعن بالمستطيل $WXYZ$ المبيَّن جانبًا.



37) إذا كان $XW = 3,\ WZ = 4$ ، فأوجد YW.

38) إذا كان $ZY = 6,\ XY = 8$ ، فأوجد WY.

مسائل مهارات التفكير العليا



39) **تحدٍّ:** في المستطيل $ABCD$، إذا كان $m\angle EAB = (4x + 6)^\circ$، $m\angle DEC = (10 - 11y)^\circ,\ m\angle EBC = 60^\circ$، فأوجد قيمة كل من x , y.

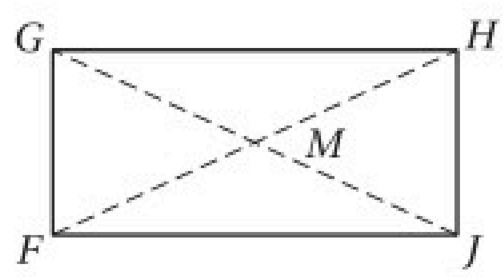
40) **اكتشف الخطأ:** قالت بسمة: إنّ أيّ مثلثين حادّي الزوايا ومتطابقين يمكن ترتيبهما ليشكّلا مستطيلًا. وقالت شيماء: إنّ المثلثين القائمي الزاوية المتطابقين هما فقط اللذان يمكن ترتيبهما ليشكّلا مستطيلًا. هل أي منهما على صواب؟ وضّح تبريرك.

41) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلات أربعة مستقيمات بحيث تكون نقاط تقاطعها رؤوس مستطيل. تحقق من إجابتك باستعمال الهندسة الإحداثيّة.

42) **اكتب:** وضّح لِمَ تُعدّ جميع المستطيلات متوازيات أضلاع، بينما لا تُعد جميع متوازيات الأضلاع مستطيلات.

تدريب على اختبار

43) في الشكل الرباعي $FGHJ$ ، إذا كان $FJ = -3x + 5y$، $FM = 3x + y,\ GH = 11,\ GM = 13$، فما قيمة كل من x, y اللتين تجعلان $FGHJ$ مستطيلًا؟



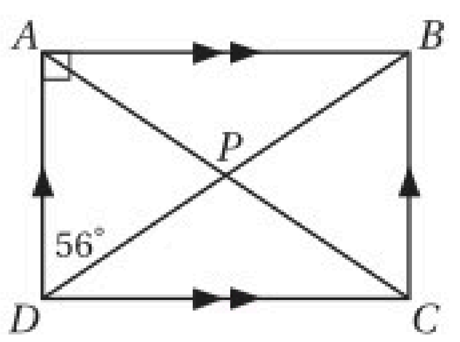
A $x = 3, y = 4$

B $x = 4, y = 3$

C $x = 7, y = 8$

D $x = 8, y = 7$

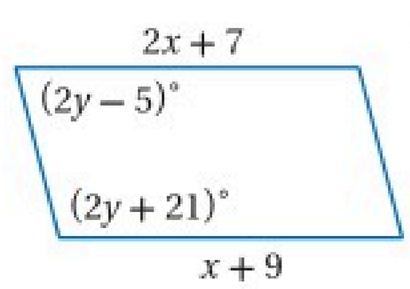
44) **إجابة قصيرة:** ما قياس $\angle APB$؟



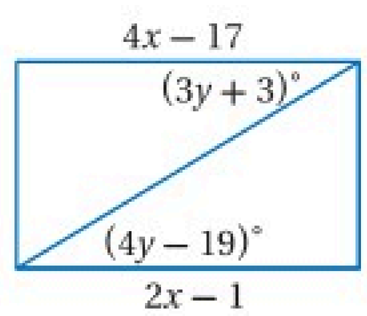
مراجعة تراكمية

جبر: أوجد قيمتي x , y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع : (الدرس 3-5)

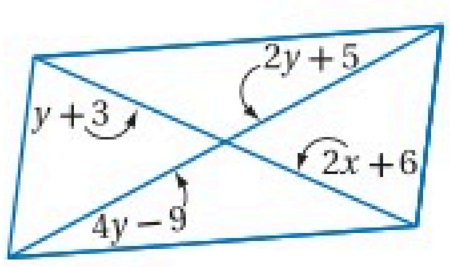
45)



46)



47)



48) **هندسة إحداثية:** أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $A(1, 3), B(6, 2), C(4, -2), D(-1, -1)$ (الدرس 2-5)

استعد للدرس اللاحق

أوجد المسافة بين النقطتين في كلٍّ مما يأتي:

49) $(4, 2), (2, -5)$

50) $(0, 6), (-1, -4)$

51) $(-4, 3), (3, -4)$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

5-5 المعيّن والمربع
Rhombus and Square

فيما سبق:

درستُ تحديد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع أو مستطيلًا.

(الدرس 5-4)

والآن:

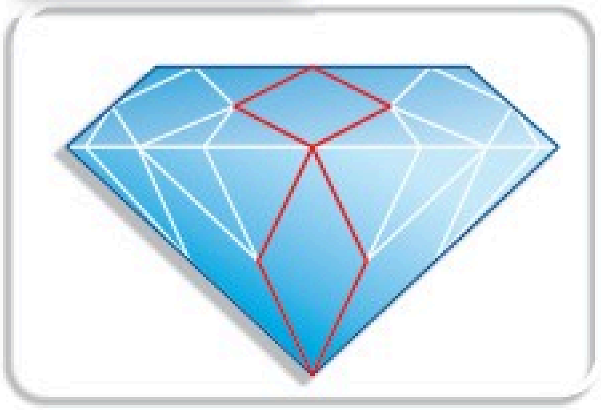
- أتعرّف خصائص المعيّن والمربّع وأطبّقها.
- أحدّد ما إذا كان الشكل الرباعي مستطيلًا أو معيّنًا أو مربعًا.

المفردات:

المعيّن
rhombus

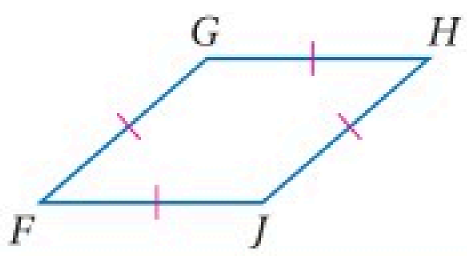
المربّع
square

لماذا؟



تصمم الألماسات باستعمال أنماط متكررة من الأشكال الهندسية. إذا صمم فنان الألماسة المجاورة، بحيث تكوّنت من أنماط متكررة من مثلثات وأشكال رباعية، كيف يمكن تحديد نوع الأشكال الرباعية المحددة باللون الأحمر في الألماسة؟

خصائص المعيّن والمربّع:



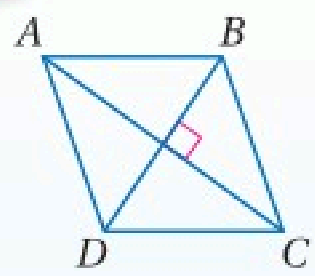
المعيّن هو متوازي أضلاع جميع أضلاعه متطابقة. وللمعيّن جميع خصائص متوازي الأضلاع علاوة على الخاصيتين الواردتين في النظريتين الآتيتين :

نظريات

أضف إلى مطويتك

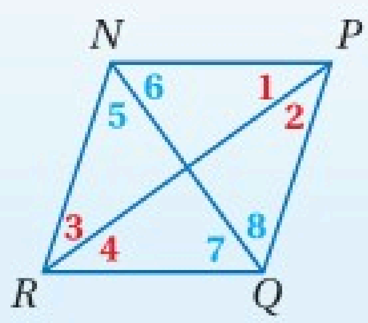
قطرا المعيّن

5.15 **إذا كان متوازي أضلاع معيّنًا، فإنّ قطريه متعامدان.**



مثال: إذا كان $\square ABCD$ معيّنًا، فإنّ $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

5.16 **إذا كان متوازي أضلاع معيّنًا فإنّ كل قطر فيه ينصّف كلًّا من الزاويتين اللتين يصل بين رأسيهما.**



مثال: إذا كان $\square NPQR$ معيّنًا، فإنّ

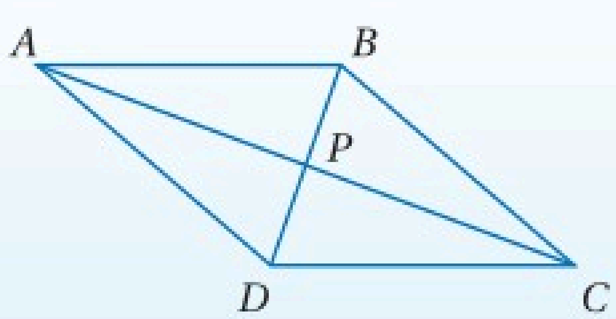
$\angle 1 \cong \angle 2$, $\angle 3 \cong \angle 4$, $\angle 5 \cong \angle 6$, $\angle 7 \cong \angle 8$

سوف تبرهن النظرية 5.16 في السؤال 28

برهان

نظريّة 5.15

أكتب برهانًا حرًّا للنظرية 5.15



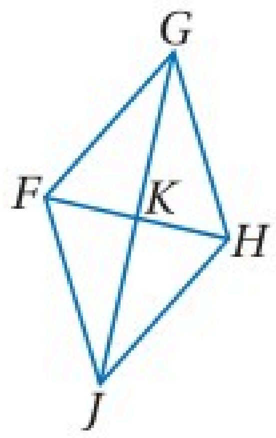
المعطيات: $ABCD$ معيّن.

المطلوب: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

البرهان:

بما أنّ $ABCD$ معيّن، فإنّ $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ بحسب التعريف.
وبما أن المعيّن متوازي أضلاع، وقطري متوازي الأضلاع ينصّف كل منهما الآخر، فإنّ $\overline{BD}$ ينصّف $\overline{AC}$ عند P؛ لذا فإن $\overline{AP} \cong \overline{PC}$. وكذلك $\overline{BP} \cong \overline{BP}$ بحسب خاصية الانعكاس؛ إذن $\triangle APB \cong \triangle CPB$ بحسب SSS.
وبما أن العناصر المتناظرة في المثلثات المتطابقة تكون متطابقة، فإنّ $\angle APB \cong \angle CPB$.
وكذلك $\angle APB$, $\angle CPB$ متجاورتان على مستقيم، والزاويتان المتطابقتان المتجاورتان على مستقيم تكونان قائمتين. وبما أن $\angle APB$ قائمة، فإن $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ بحسب تعريف المستقيمين المتعامدين.

مثال 1 استعمال خصائص المعيّن



استعن بالمعيّن $FGHJ$ المبيَّن جانبًا.

a) إذا كان $m\angle FJH = 82°$، فأوجد $m\angle KHJ$.

بما أن $FGHJ$ معيّن، فإنّ القطر $\overline{JG}$ ينصِّف $\angle FJH$.

لذا فإن $m\angle KJH = \frac{1}{2}\, m\angle FJH$. إذن $m\angle KJH = \frac{1}{2}(82°) = 41°$

وبما أن قطري المعيّن متعامدان، فإنّ $m\angle JKH = 90°$ بحسب تعريف المستقيمين المتعامدين.

$m\angle KJH + m\angle JKH + m\angle KHJ = 180°$	نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث
$41° + 90° + m\angle KHJ = 180°$	بالتعويض
$131° + m\angle KHJ = 180°$	بالتبسيط
$m\angle KHJ = 49°$	بطرح $131°$ من كلا الطرفين

b) جبر: إذا كان $GH = x + 9$, $JH = 5x - 2$ ، فأوجد قيمة x.

$\overline{GH} \cong \overline{JH}$	تعريف المعين
$GH = JH$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$x + 9 = 5x - 2$	بالتعويض
$9 = 4x - 2$	بطرح x من كلا الطرفين
$11 = 4x$	بجمع 2 لكلا الطرفين
$2.75 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 4

تحقق من فهمك

استعن بالمعيّن $FGHJ$ أعلاه.

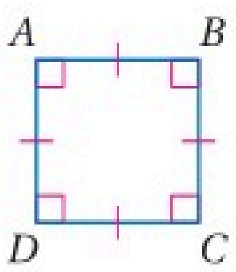
1A) إذا كان $FK = 5, FG = 13$، فأوجد KJ.

1B) جبر: إذا كان $m\angle JFK = (6y + 7)°$, $m\angle KFG = (9y - 5)°$، فأوجد قيمة y.

إرشادات للدراسة

المربّع والمعيّن: كل مربّع معيّن، ولكن ليس كل معيّن مربعًا، وكل مربع مستطيل وليس كل مستطيل مربعًا.

المربّع هو متوازي أضلاع جميع أضلاعه متطابقة وجميع زواياه قوائم. تذكّر أن متوازي الأضلاع الذي زواياه الأربع قوائم يكون مستطيلًا، ومتوازي الأضلاع الذي أضلاعه الأربعة متطابقة يكون معيّنًا؛ لذا فعندما يكون متوازي الأضلاع معيّنًا وإحدى زواياه قائمة فإنّه يكون مربّعًا أيضًا، وعليه فإن المربع هو متوازي أضلاع ومستطيل ومعيّن.



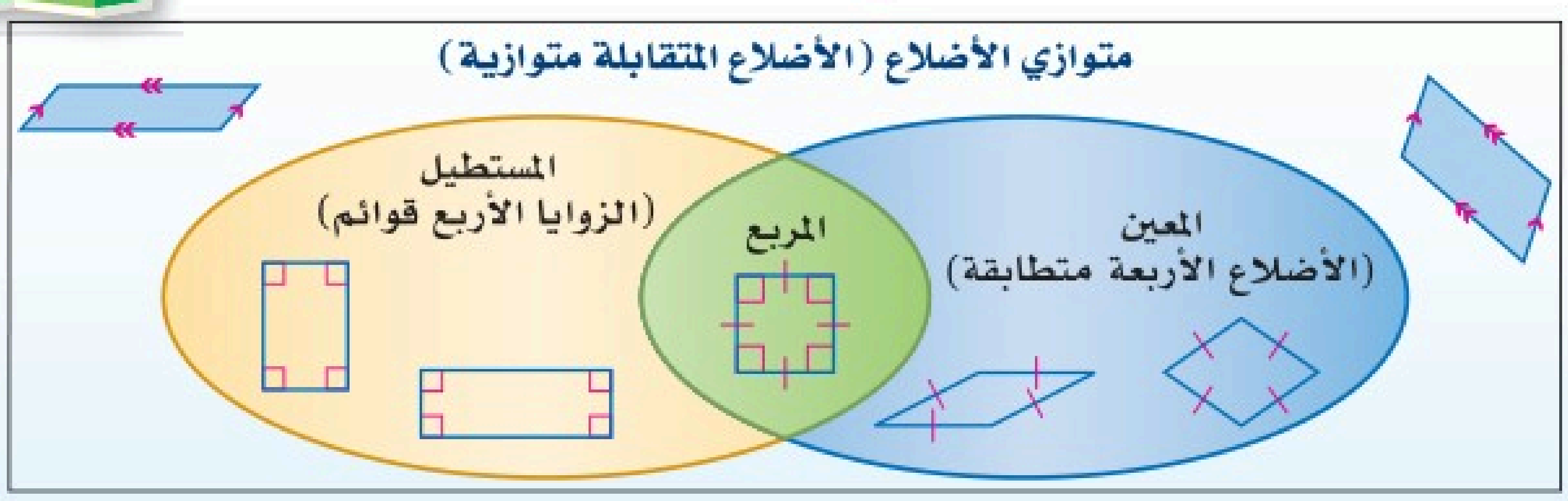
المربع $ABCD$

ويلخص شكل ڤن الآتي العلاقة بين متوازي الأضلاع والمعيّن والمربّع والمستطيل.

ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

متوازي الأضلاع



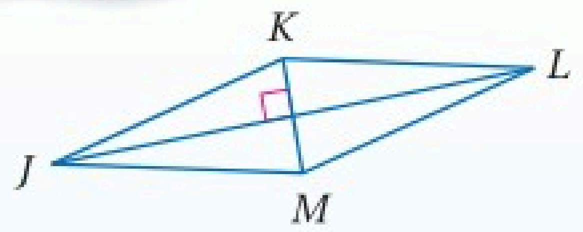
جميع خصائص متوازي الأضلاع والمستطيل والمعيّن تنطبق على المربّع. فمثلًا قطرا المربع ينصّف كل منهما الآخر (متوازي أضلاع)، وهما متطابقان (مستطيل)، ومتعامدان (معيّن).

إثبات أنّ الشكل الرباعي معيّن أو مربع: تُحدِّد النظريات الآتية الشروط الكافية للمعيّن والمربّع.

نظريات
الشروط الكافية للمعيّن والمربّع

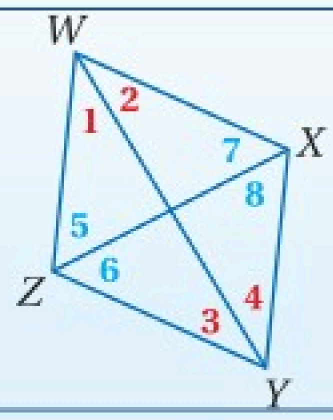
أضف إلى مطويتك

5.17 **إذا كان قطرا متوازي أضلاع متعامدين فإنّه معيّن.** (عكس النظرية 5.15)



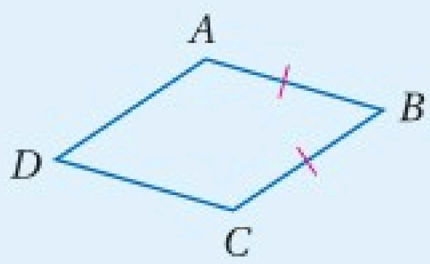
مثال: إذا كان $JKLM$ متوازي أضلاع، وكان $\overline{JL} \perp \overline{KM}$ ،
فإنّ $\square JKLM$ معيّن.

5.18 **إذا نصَّف قطر متوازي أضلاع كلًّا من الزاويتين اللتين يصل بين رأسيهما، فإن متوازي الأضلاع يكون معيّنًا.** (عكس النظرية 5.16)



مثال: إذا كان $WXYZ$ متوازي أضلاع، وكانت $\angle 1 \cong \angle 2$ ، $\angle 3 \cong \angle 4$ ، أو $\angle 5 \cong \angle 6$ ، $\angle 7 \cong \angle 8$ ،
فإنّ $\square WXYZ$ معيّن.

5.19 **إذا كان ضلعان متتاليان في متوازي الأضلاع متطابقين فإنّه معيّن.**



مثال: إذا كان $ABCD$ متوازي أضلاع، وكان $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ ،
فإنّ $\square ABCD$ معيّن.

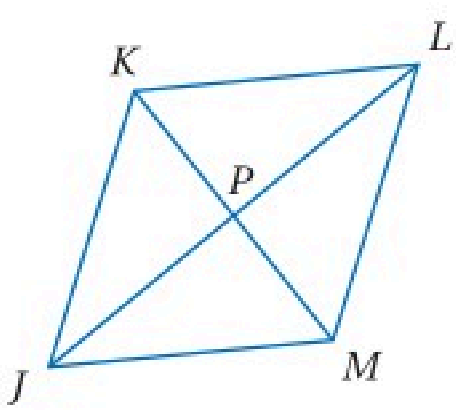
5.20 **إذا كان الشكل الرباعي مستطيلًا ومعيّنًا فإنه مربّع.**

سوف تبرهن النظريات 5.17 إلى 5.20 في الأسئلة 32-29 على الترتيب.

يمكنك استعمال خصائص المعيّن والمربع في البراهين.

مثال 2 استعمال خصائص المعيّن والمربّع في البراهين

اكتب برهانًا حرًّا.



المعطيات: $JKLM$ متوازي أضلاع.
$\triangle JKL$ متطابق الضلعين.

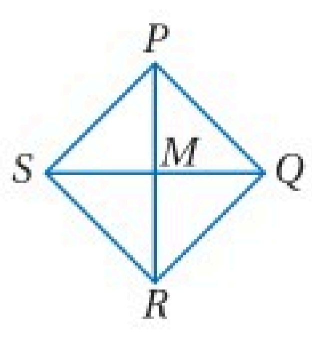
المطلوب: $\square JKLM$ معيّن.

برهان حرّ:

بما أنّ $\triangle JKL$ متطابق الضلعين، فإنّ $\overline{KL} \cong \overline{JK}$ بحسب التعريف، وهذان الضلعان متتاليان في متوازي الأضلاع $JKLM$ ، لذا وبحسب النظرية 1.19، يكون $\square JKLM$ معيّنًا.

تحقق من فهمك

2) اكتب برهانًا حرًّا.



المعطيات: $\overline{SQ}$ عمود منصّف لـ $\overline{PR}$.
$\overline{PR}$ عمود منصّف لـ $\overline{SQ}$.
$\triangle RMS$ متطابق الضلعين.

المطلوب: $PQRS$ مربّع.

تنبيه !

أخطاء شائعة

يخطئ البعض فيستعمل النظريات 5.17, 5.18, 5.19 مع أي شكل رباعي، وهذا غير صحيح؛ لأن هذه النظريات تكون صحيحة فقط إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

إرشادات للدراسة

المثلثات المتطابقة

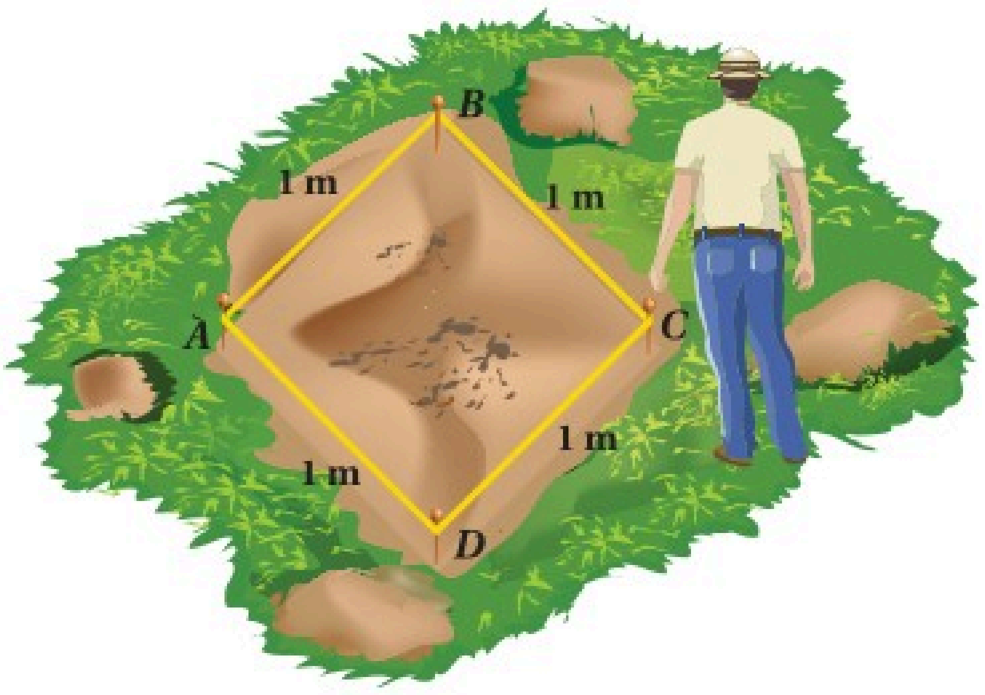
بما أن للمعيّن أربعة أضلاع متطابقة، فإن كلًّا من قطريه يقسمه إلى مثلثين متطابقي الضلعين ومتطابقين. وإذا رُسم القطران فإنهما يقسمان المعيّن إلى أربعة مثلثات قائمة ومتطابقة.

الربط مع الحياة

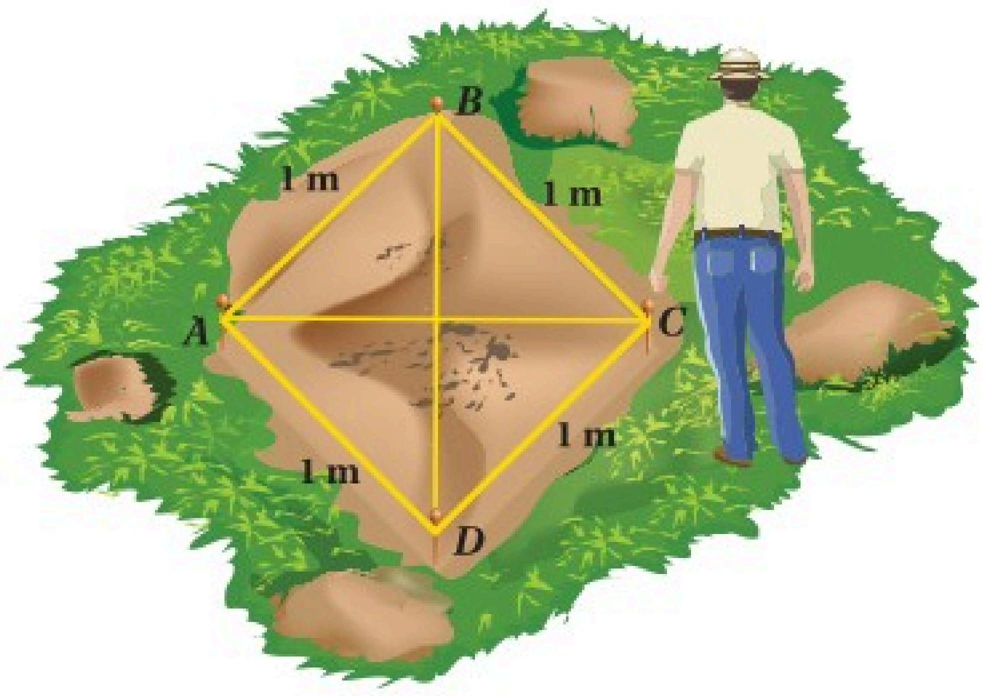
علم الآثار هو دراسة أعمال الإنسان في العصور القديمة كي يزودنا بمعلومات حول حياته ونشاطاته. وساعد اكتشاف الإنسان للكتابة منذ 5000 عام تقريبًا على فهم أسرار أزمنة ما بعد هذا التاريخ.

مثال 3 من واقع الحياة — استعمال المعيّن والمربع

علم الآثار: مفتاح الكشف الناجح عن الآثار هو وضع خريطة دقيقة لموقع البحث. كيف يمكن لعالم الآثار في الصورة أدناه أن يتحقق من أن منطقة بحثه هي مربع طول ضلعه $1\ m$ مستعملًا الحبل وشريط القياس فقط؟



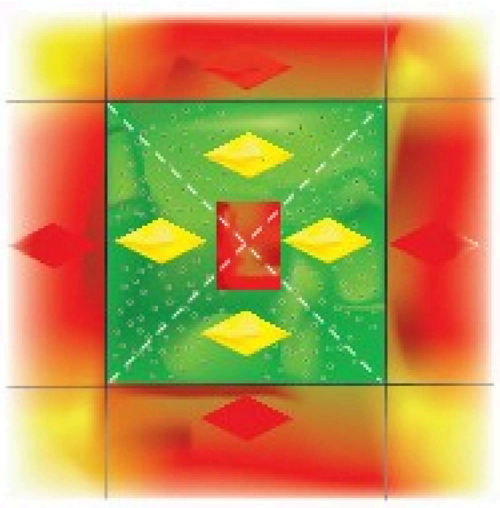
طول كل من أضلاع الشكل الرباعي $ABCD$ يساوي $1\ m$. وبما أن كل ضلعين متقابلين متطابقان، فإنّ $ABCD$ متوازي أضلاع. وبما أن أضلاع $ABCD$ المتتالية متطابقة فإنّه معيّن. وإذا استطاع عالم الآثار بيان أنّ $\square ABCD$ مستطيل أيضًا فإنّه بحسب النظرية 5.20، يكون مربعًا.



إذا كان قطرا متوازي الأضلاع متطابقين فإنّه مستطيل؛ لذا يمكن لعالم الآثار استعمال الحبل لقياس طولي القطرين، فإذا وجدهما متساويين، فإن $\square ABCD$ يكون مربّعًا.

تحقق من فهمك

3) **خياطة:** خاطت كوثر غطاء طاولة باستعمال قطع ملونة من القماش كما في الرسم المجاور.



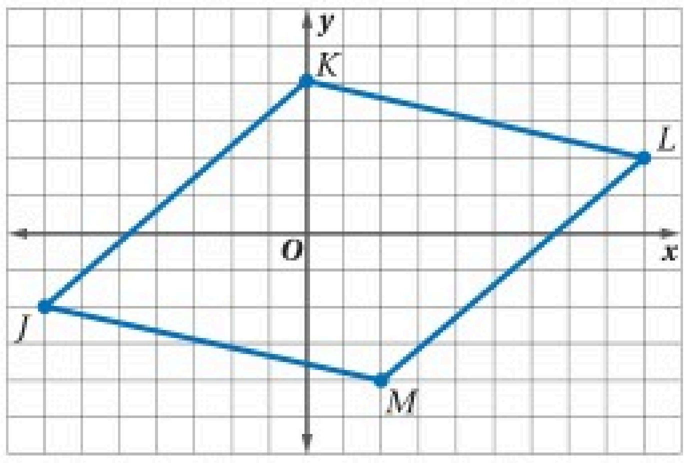
A) رسمت كوثر قطري كل من القطع الصفراء فوجدت أنهما متعامدان، هل يمكنها استنتاج أن كل قطعة صفراء معيّن؟ وضِّح إجابتك.

B) إذا كانت الزوايا الأربع للقطعة الخضراء متساوية القياس، والضلعان الأيسر والسفلي متساويي الطول، فهل يمكنها استنتاج أن القطعة الخضراء مربّع؟ وضِّح إجابتك.

استعملت الهندسة الإحداثيّة سابقًا لتصنيف المثلثات. ويمكن استعمال الهندسة الإحداثية لتصنيف الأشكال الرباعية أيضًا.

مثال 4 تصنيف الأشكال الرباعيّة باستعمال الهندسة الإحداثيّة

هندسة إحداثيّة : حدد ما إذا كان $\square JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه $J(-7, -2)$، $K(0, 4)$، $L(9, 2)$، $M(2, -4)$ معيّنًا أو مستطيلًا أو مربعًا. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. وضِّح إجابتك.



افهم: **المعطيات:** $\square JKLM$ إحداثيات رؤوسه: $J(-7, -2)$ ، $K(0, 4)$ ، $L(9, 2)$ ، $M(2, -4)$.

المطلوب: إثبات أن $\square JKLM$ هو معين أو مستطيل أو مربع.

خطط : عيّن الرؤوس على المستوى الإحداثي وصل بينها.

يظهر من الرسم أن أضلاع $\square JKLM$ متطابقة. ولكنّ زواياه ليست قوائم؛ لذا يبدو أنّه معيّن وليس مربّعًا أو مستطيلًا.

إذا كان قطرا متوازي الأضلاع متطابقين فإنّه مستطيل. وإذا كانا متعامدين فإنّه معيّن. وإذا كانا متطابقين ومتعامدين فإنه مستطيل ومعيّن؛ أيّ أنّه مربّع.

حل: أولًا: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين للمقارنة بين طولي القطرين.

$$KM = \sqrt{(2-0)^2 + (-4-4)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

$$JL = \sqrt{[9-(-7)]^2 + [2-(-2)]^2} = \sqrt{272} = 4\sqrt{17}$$

بما أن $4\sqrt{17} \neq 2\sqrt{17}$، فإن القطرين ليسا متطابقين؛ لذا $\square JKLM$ ليس مستطيلًا. وبما أنه ليس مستطيلًا فإنّه ليس مربّعًا أيضًا.

ثانيًا: استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كان القطران متعامدين.

ميل $\overline{KM}$: $\frac{-4-4}{2-0} = \frac{-8}{2} = -4$

ميل $\overline{JL}$: $\frac{2-(-2)}{9-(-7)} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

وبما أن حاصل ضرب الميلين يساوي -1، فإن القطرين متعامدان؛ لذا فإن $\square JKLM$ معيّن.

تحقق: $JK = \sqrt{[4-(-2)]^2 + [0-(-7)]^2} = \sqrt{85}$

$KL = \sqrt{(9-0)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{85}$

لذا فإن $\square JKLM$ معيّن بحسب النظرية 1.20 .

ميل $\overline{JK}$: $\frac{4-(-2)}{0-(-7)} = \frac{6}{7}$ ، وميل $\overline{KL}$: $\frac{2-4}{9-0} = -\frac{2}{9}$

وبما أن حاصل ضرب هذين الميلين لا يساوي -1، فإن الضلعين المتتاليين $\overline{JK}$ و $\overline{KL}$ غير متعامدين؛ لذا فإن $\angle JKL$ ليست قائمة؛ إذن $\square JKLM$ ليس مستطيلًا ولا مربّعًا. ✔

إرشادات للدراسة

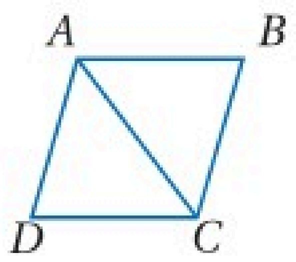
تمثيل الشكل بيانيًا : عند تحليل شكل رباعي باستعمال الهندسة الإحداثيّة، مثّله بيانيًا لمساعدتك على وضع تخمين، ثم تحقق من تخمينك جبريًا.

✔ تحقق من فهمك

4) حدِّد ما إذا كان $\square JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه $J(5, 0), K(8, -11), L(-3, -14), M(-6, -3)$ ، معيّنًا أو مستطيلًا أو مربّعًا ؟ اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. وضِّح إجابتك.

تأكد

المثال 1 **جبر:** استعن بالمعين $ABCD$ المبيَّن جانبًا.

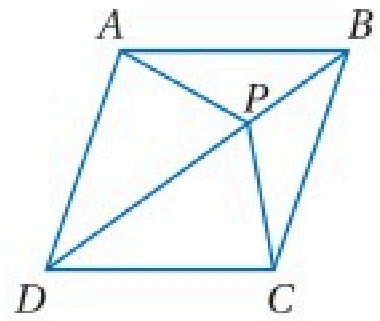


1) إذا كان $m\angle BCD = 114°$، فأوجد $m\angle BAC$.

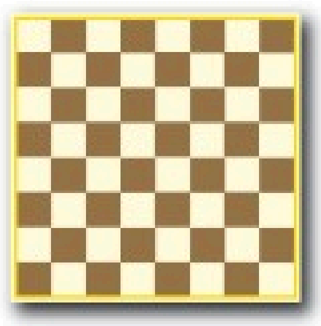
2) إذا كان $AB = 2x + 3$, $BC = x + 7$، فأوجد CD.

المثالان 2, 3

3) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أنّه إذا كان $ABCD$ معيّنًا وكان $\overline{DB}$ قطرًا فيه، فإنّ $\overline{AP} \cong \overline{CP}$.



4) **بلاط:** تتكون الأرضية أدناه من 64 بلاطة مربعة متطابقة. استعمل هذه المعطيات لإثبات أن الأرضية نفسها مربّعة.



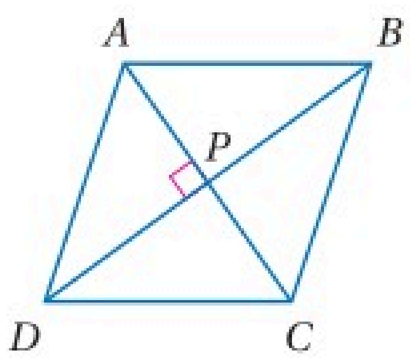
المثال 4 **هندسة إحداثية:** حدِّد ما إذا كان $\square QRST$ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي معينًا أو مستطيلًا أو مربعًا. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. وضِّح إجابتك.

5) $Q(1, 2), R(-2, -1), S(1, -4), T(4, -1)$

6) $Q(-2, -1), R(-1, 2), S(4, 1), T(3, -2)$

تدرب وحل المسائل

المثال 1 **جبر:** استعن بالمعين $ABCD$ المبيَّن جانبًا.



7) إذا كان $AB = 14$، فأوجد BC.

8) إذا كان $m\angle BCD = 118°$، فأوجد $m\angle BAC$.

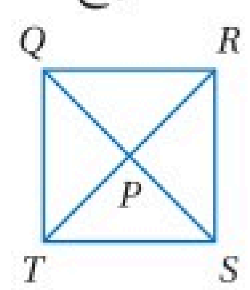
9) إذا كان $AP = 3x - 1$ و $PC = x + 9$، فأوجد AC.

10) إذا كان $m\angle ABC = (2x - 7)°$ و $m\angle BCD = (2x + 3)°$، فأوجد $m\angle DAB$.

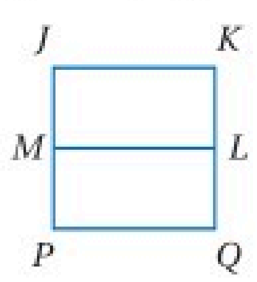
11) إذا كان $m\angle DPC = (3x - 15)°$، فأوجد قيمة x.

المثال 2 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين في كل مما يأتي :

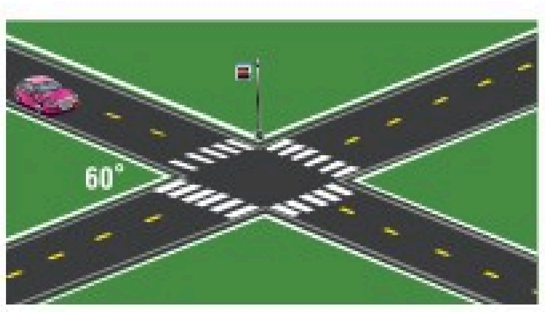
12) **المعطيات:** $QRST$ متوازي أضلاع.
$\overline{TR} \cong \overline{QS}, m\angle QPR = 90°$
المطلوب: $QRST$ مربّع.



13) **المعطيات:** $JKQP$ مربّع.
$\overline{ML}$ تنصِّف كلًّا من $\overline{JP}$ و $\overline{KQ}$.
المطلوب: $JKLM$ متوازي أضلاع.

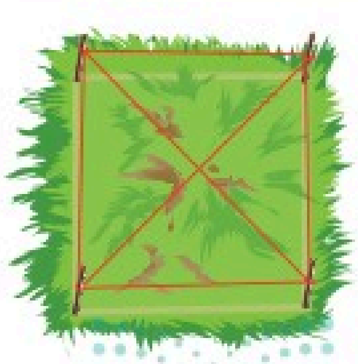


14) **طرق:** يتقاطع طريقان كما في الشكل. إذا كانت ممرّات المشاة لها الطول نفسه، فصنّف الشكل الرباعيّ المكوّن من هذه الممرات. ووضّح تبريرك.



المثال 3

15) **زراعة:** حدّد مزارع حقلًا بأوتاد وحبال كما في الشكل المجاور . إذا كانت أضلاع الشكل الرباعي المتشكل متساوية الطول، وقطراه متعامدين، فهل هذه المعلومات كافية كي تتحقق من أنّ الحقل مربع؟ وضِّح تبريرك.



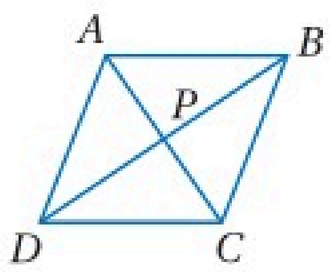
المثال 4 **هندسة إحداثيّة:** حدِّد ما إذا كان $\square JKLM$ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي معينًا أو مستطيلًا أو مربعًا. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. ووضِّح إجابتك.

16) $J(-4, -1), K(1, -1), L(4, 3), M(-1, 3)$

17) $J(-3, -2), K(2, -2), L(5, 2), M(0, 2)$

18) $J(-2, -1), K(-4, 3), L(1, 5), M(3, 1)$

19) $J(-1, 1), K(4, 1), L(4, 6), M(-1, 6)$



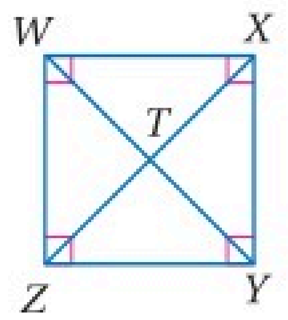
في المعين $ABCD$ ، إذا كان $PB = 12, AB = 15, m\angle ABD = 24°$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي:

20) AP

21) CP

22) $m\angle BDA$

23) $m\angle ACB$



في المربع $WXYZ$، إذا كان $WT = 3$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

24) ZX

25) XY

26) $m\angle WTZ$

27) $m\angle WYX$

برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكل مما يأتي:

28) النظريّة 5.16

29) النظريّة 5.17

30) النظريّة 5.18

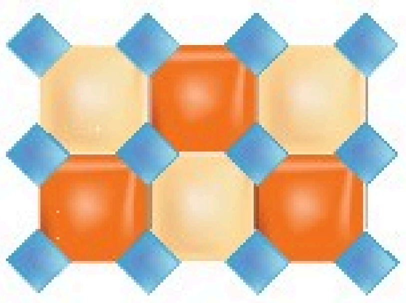
31) النظريّة 5.19

32) النظريّة 5.20

برهان: اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة في كل من السؤالين الآتيين:

33) قطرا المربّع متعامدان.

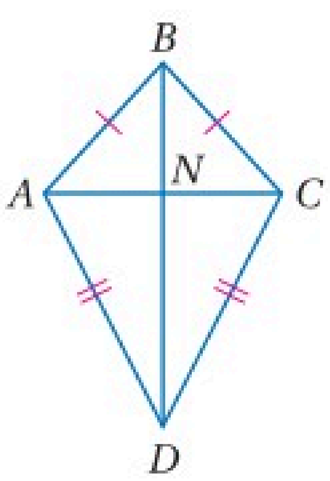
34) تشكِّل القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفات أضلاع مستطيل معيّنًا.



35) **تصميم:** يتكون نمط الفسيفساء المبين جانبًا من قطع ثمانيّة منتظمة وأخرى رباعيّة. صنِّف الأشكال الرباعيّة في النمط، ووضِّح تبريرك.

الربط مع الحياة

الفسيفساء صور تُشكَل باستعمال أنماط من أحجار أو زجاج أو قرميد أو أي مواد أخرى. والفسيفساء في الصورة أعلاه فسيفساء إغريقيّة قديمة من الصخر البلوري (الكوارتز). استعمل الإغريق قطعًا صغيرة أو أشكالًا منتظمة من المواد منذ 200 سنة قبل الميلاد بدلًا من الصخر البلوري في أعمال الفسيفساء.



36) **تمثيلات متعدِّدة:** سوف تستقصي في هذه المسألة إحدى خصائص شكل الطائرة الورقيّة، وهو شكل رباعي يتكون من زوجين متمايزين من الأضلاع المتجاورة والمتطابقة.

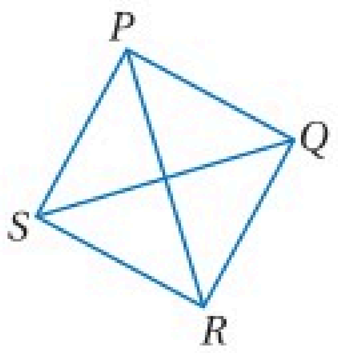
a) **هندسيًّا:** ارسم قطعةً مستقيمةً، ثم افتح الفرجار وثبته عند أحد طرفيها وارسم قوسًا فوقها، ومن دون تغيير فتحة الفرجار، ثبِّت رأس الفرجار عند الطرف الآخر للقطعة المستقيمة، وارسم قوسًا يقطع القوس السابق. غيِّر فتحة الفرجار وارسم قوسين أسفل القطعة المستقيمة كما فعلت سابقًا.
استعمل المسطرة وصل بين طرفَي القطعة والأقواس، وسينتج لك شكل طائرة ورقية سمِّها $ABCD$. ثم كرِّر ذلك مرتين، وسمِّ شكلي الطائرتين الورقيتين، $PQRS$، $WXYZ$، ثم ارسم قطري كل منهما، ولتكن نقطة تقاطع قطري كل منها N.

b) **جدوليًّا:** استعمل مسطرة لقياس المسافة من N إلى كل رأس. وسجِّل النتائج في جدول على النحو الآتي.

الشكل	المسافة من N إلى كل رأس على القطر الأقصر		المسافة من N إلى كل رأس على القطر الأطول	
$ABCD$				
$PQRS$				
$WXYZ$				

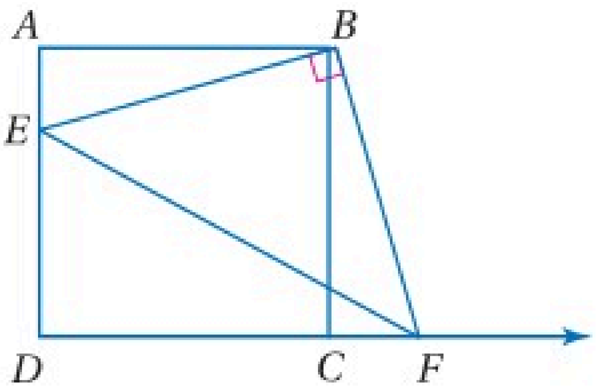
c) **لفظيًّا:** اكتب تخمينًا حول قطري شكل الطائرة الورقيّة.

مسائل مهارات التفكير العليا



37) اكتشف الخطأ: في الشكل الرباعي $SRQP$ المبيَّن جانبًا، $\overline{PR} \cong \overline{QS}$.
قال محمد: إن الشكل مربّع. بينما قال إبراهيم: إنه معيّن.
هل أي منهما على صواب؟ وضّح تبريرك.

38) تبرير: حدِّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خطأً؟ ثم اكتب عكسها ومعكوسها ومعاكسها الإيجابي، وحدِّد قيمة الصواب لكل منها. وضّح تبريرك.
إذا كان الشكل الرباعي مربّعًا، فإنّه مستطيل.



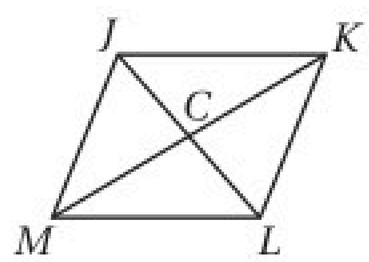
39) تحدٍّ: مساحة المربّع $ABCD$ المجاور تساوي 36 وحدة مربّعة. ومساحة $\triangle EBF$ تساوي 20 وحدة مربّعة. إذا كانت $\overline{EB} \perp \overline{BF}$، وطول $\overline{AE}$ يساوي وحدتين، فأوجد طول $\overline{CF}$.

40) مسألة مفتوحة: أوجد إحداثيات رؤوس مربّع قطراه محتويان في المستقيمين $y = x$, $y = -x + 6$. وضّح تبريرك.

41) اكتب: قارن بين جميع خصائص الأشكال الرباعيّة الآتية:
متوازي الأضلاع، المستطيل، المعيّن، المربّع.

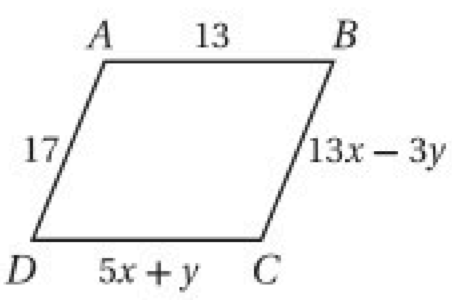
تدريب على اختبار

42) في المعين $JKLM$، إذا كان $CK = 8$ ، $JK = 10$ ، فأوجد JC.



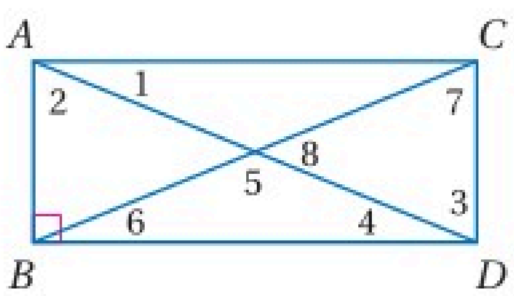
A 4
B 6
C 8
D 10

43) جبر: ما قيمة كل من x , y بحيث يكون $ABCD$ متوازي أضلاع؟



A $x = 3, y = 2$
B $x = \frac{3}{2}, y = -1$
C $x = 2 , y = 3$
D $x = 3 , y = -1$

مراجعة تراكمية



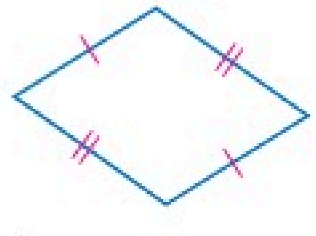
في المستطيل $ABDC$ ، إذا كان $m\angle 1 = 38°$. فأوجد كلًّا من القياسات الآتية: (الدرس 4-5)

44) $m\angle 2$ **45)** $m\angle 5$ **46)** $m\angle 6$

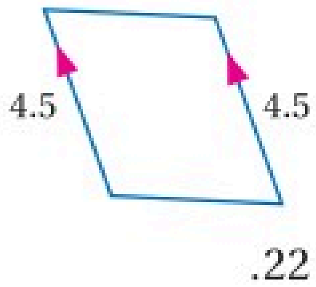
حدِّد ما إذا كان الشكل الرباعي في كل مما يأتي متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك. (الدرس 3-5)

47)

48)



49)



50) قياسات: قال مروان: إنّ الحديقة الخلفيّة لمنزله على شكل مثلث أطوال أضلاعه 22 ft, 23 ft, 45 ft.
فهل ترى أنّ هذه القياسات صحيحة؟ وضّح تبريرك. (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

حل كل معادلة مما يأتي:

51) $\frac{1}{2}(5x + 7x - 1) = 11.5$ **52)** $\frac{1}{2}(10x + 6x + 2) = 7$ **53)** $\frac{1}{2}(12x + 6 - 8x + 7) = 9$

5-6 شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقيّة
Trapezoid and Kite

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ استعمال خصائص أنواع خاصة من متوازي الأضلاع.

(الدرس 5-5)

والآن:

- أتعرّف خصائص شبه المنحرف وأطبّقها.
- أتعرّف خصائص شكل الطائرة الورقيّة وأطبّقها.

المفردات:

شبه المنحرف
trapezoid

قاعدتا شبه المنحرف
bases

ساقا شبه المنحرف
legs of a trapezoid

زاويتا القاعدة
base angles

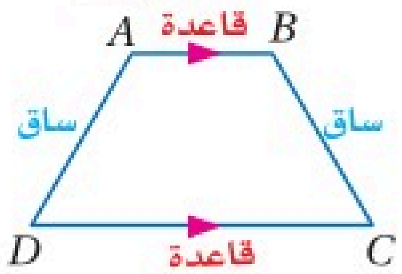
شبه المنحرف المتطابق الساقين
isosceles trapezoid

القطعة المتوسطة لشبه المنحرف
midsegment of a trapezoid

شكل الطائرة الورقيّة
kite

لماذا؟

تستعمل في رياضات القفز، صناديق ذات أجزاء متداخلة مصنوعة من الإسفنج ذي الضغط العالي، وتتخذ منصّات وثب ودرجات صعود، وتمثّل جوانب كل من الأجزاء شبه منحرف.

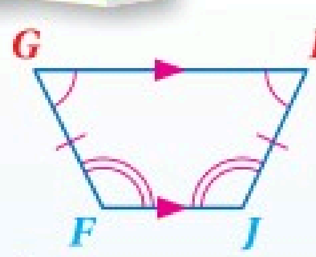


خصائص شبه المنحرف: **شبه المنحرف** هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متوازيان يُسميان **قاعدتي شبه المنحرف**. ويُسمّى الضلعان غير المتوازيين **ساقي شبه المنحرف**. و **زاويتا القاعدة** مكوّن كل منهما من قاعدة وأحد ضلعي الساقين. ففي شبه المنحرف $ABCD$ المبيَّن جانبًا، $\angle A, \angle B$ زاويتا القاعدة $\overline{AB}$، وكذلك $\angle C, \angle D$ زاويتا القاعدة $\overline{DC}$.

إذا كان ساقا شبه المنحرف متطابقين فإنه يسمى **شبه منحرف متطابق الساقين**.

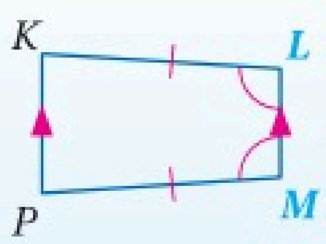
نظريات — شبه المنحرف المتطابق الساقين

أضف إلى مطويتك



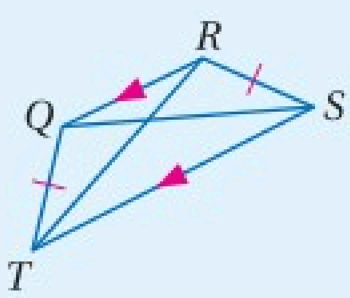
5.21 إذا كان شبه المنحرف متطابق الساقين، فإنّ زاويتي كل قاعدة متطابقتان.

مثال: إذا كان شبه المنحرف $FGHJ$ متطابق الساقين،
فإنّ $\angle J \cong \angle F$, $\angle H \cong \angle G$.



5.22 إذا كانت زاويتا قاعدة في شبه المنحرف متطابقتين، فإنّه متطابق الساقين.

مثال: إذا كان $KLMP$ شبه منحرف، فيه $\angle L \cong \angle M$
فإنه متطابق الساقين.

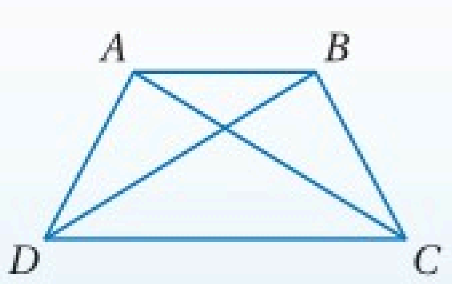


5.23 يكون شبه المنحرف متطابق الساقين، إذا وفقط إذا كان قطراه متطابقين.

مثال: إذا كان شبه المنحرف $QRST$ متطابق الساقين،
فإنّ $\overline{QS} \cong \overline{RT}$. وكذلك إذا كان $QRST$ شبه منحرف،
فيه $\overline{QS} \cong \overline{RT}$ فإنّه متطابق الساقين.

سوف تبرهن النظريات 5.23 , 5.22 , 5.21 في الأسئلة 21 ,20 ,19 على الترتيب.

برهان — الحالة الأولى من النظريّة 5.23



المعطيات: $ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين.

المطلوب: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

$ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين.
معطى

$\angle ADC \cong \angle BCD$
زاويتا قاعدة شبه المنحرف المتطابق الساقين متطابقتان.

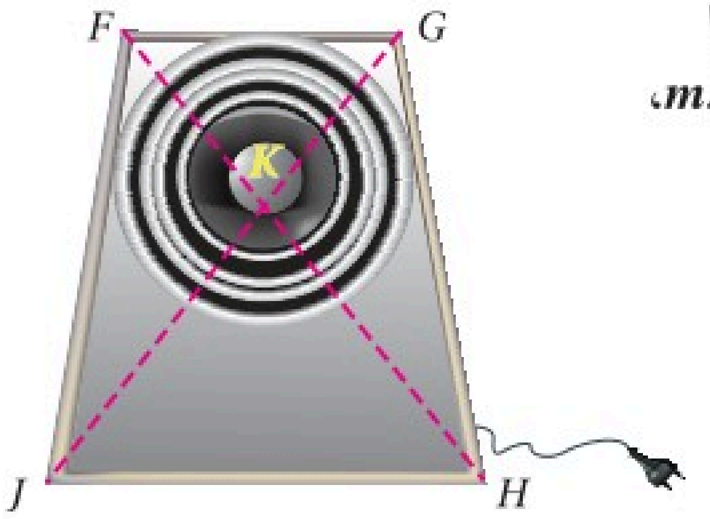
$\overline{AD} \cong \overline{BC}$
تعريف شبه المنحرف المتطابق الساقين

$\overline{DC} \cong \overline{CD}$
خاصية الانعكاس للتطابق

$\triangle ADC \cong \triangle BCD$
SAS

$\overline{AC} \cong \overline{BD}$
ضلعان متناظران في مثلثين متطابقين

مثال 1 من واقع الحياة — استعمال خصائص شبه المنحرف المتطابق الساقين



مكبرات الصوت: المنظر الأمامي لمكبِّر الصوت المبيّن جانبًا على شكل شبه منحرف متطابق الساقين. إذا كان $m\angle FJH = 85°$، $FK = 8\,in, JG = 19\,in$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي :

a) $m\angle FGH$

بما أنّ $FGHJ$ شبه منحرف متطابق الساقين، فإنّ $\angle FJH$ و $\angle GHJ$ زاويتا قاعدة متطابقتان؛ لذا فإن $m\angle GHJ = m\angle FJH = 85°$.

وبما أنّ $FGHJ$ شبه منحرف، فإنّ $\overline{FG} \parallel \overline{JH}$.

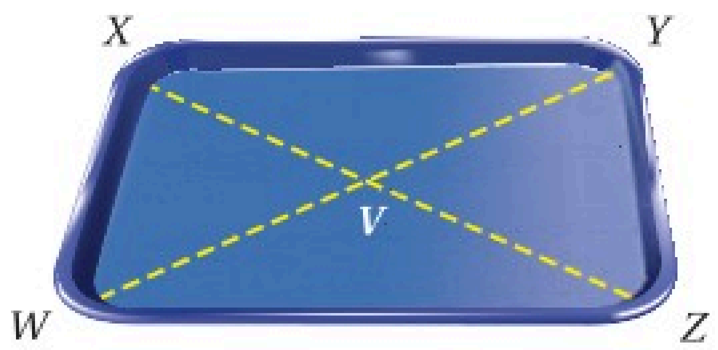
$m\angle FGH + m\angle GHJ = 180°$	نظرية الزاويتين المتحالفتين
$m\angle FGH + 85° = 180°$	بالتعويض
$m\angle FGH = 95°$	بطرح 85 من كلا الطرفين

b) KH

بما أنّ $FGHJ$ شبه منحرف متطابق الساقين، فإنّ القطرين $\overline{FH}$ و $\overline{JG}$ متطابقان.

$FH = JG$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$FK + KH = JG$	مسلمة جمع القطع المستقيمة
$8 + KH = 19$	بالتعويض
$KH = 11\text{ in}$	بطرح 8 من كلا الطرفين

تحقق من فهمك



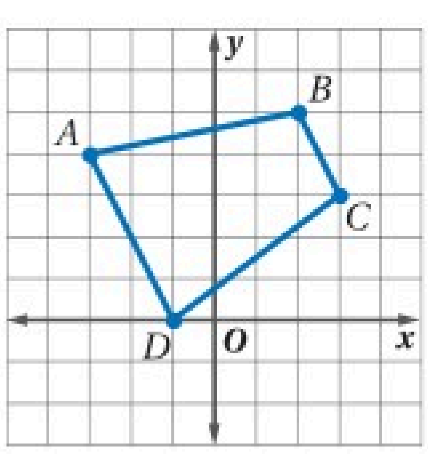
1) مطاعم: لاستغلال مساحة الطاولات المربعة، تستعمل في مطعمٍ أطباقٌ على شكل شبه منحرف كما في الشكل المجاور. إذا كان $WXYZ$ شبه منحرف متطابق الساقين، وكان $m\angle YZW = 85°$, $WV = 15\text{ cm}$، $VY = 10\text{ cm}$، فأوجد كلًّا مما يأتي :

A) $m\angle XWZ$ **B)** $m\angle WXY$ **C)** XZ

يمكنك استعمال الهندسة الإحداثيّة لتحديد ما إذا كان شبه المنحرف متطابق الساقين أم لا.

مثال 2 شبه المنحرف المتطابق الساقين والهندسة الإحداثيّة

هندسة إحداثيّة: رؤوس الشكل الرباعي $ABCD$ هي $A(-3, 4), B(2, 5), C(3, 3), D(-1, 0)$. بيّن أن $ABCD$ شبه منحرف، وحدّد ما إذا كان متطابق الساقين. ووضِّح إجابتك.



ارسم الشكل الرباعي $ABCD$ في مستوى إحداثي.

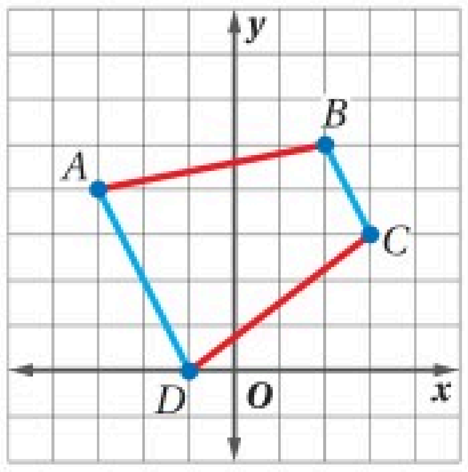
الخطوة 1: استعمل صيغة الميل لمقارنة ميلي الضلعين المتقابلين $\overline{BC}, \overline{AD}$ وكذلك الضلعين المتقابلين $\overline{AB}, \overline{DC}$. فالشكل الرباعي يكون شبه منحرف إذا كان فيه ضلعان فقط متقابلان متوازيين.

إرشادات للدراسة

شبه المنحرف المتطابق الساقين: تكون زاويتا كل قاعدة في شبه المنحرف متطابقتين فقط إذا كان شبه المنحرف متطابق الساقين.

الربط مع الحياة

مكبّرات الصوت هي مضخّمات تُكثّف الأمواج الصوتية حتى تصبح مسموعة بدرجة أكبر. ويحتوي كل من المذياع والتلفاز والحاسوب مضخمات صوتية.



الضلعان المتقابلان $\overline{BC}$, $\overline{AD}$:

ميل $\overline{BC}$: $\frac{3-5}{3-2} = \frac{-2}{1} = -2$

ميل $\overline{AD}$: $\frac{0-4}{-1-(-3)} = \frac{-4}{2} = -2$

بما أن ميلي $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ متساويان، فإنّ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

الضلعان المتقابلان $\overline{AB}$, $\overline{DC}$:

ميل $\overline{AB}$: $\frac{5-4}{2-(-3)} = \frac{1}{5}$

ميل $\overline{DC}$: $\frac{0-3}{-1-3} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

بما أنّ ميلي $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$ ليسا متساويين، فإنّ $\overline{DC} \nparallel \overline{AB}$. وبما أن $ABCD$ فيه ضلعان فقط متوازيان، فإنّه شبه منحرف.

الخطوة 2: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين للمقارنة بين طولي الساقين $\overline{DC}$, $\overline{AB}$ وتحديد ما إذا كان شبه المنحرف $ABCD$ متطابق الساقين.

$$AB = \sqrt{(-3-2)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{26}$$

$$DC = \sqrt{(-1-3)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

بما أنّ $AB \neq DC$ ، فإنّ شبه المنحرف $ABCD$ ليس متطابق الساقين.

قراءة الرياضيات

رمز التوازي: تذكّر أنّ الرمز $\parallel$ يعني يوازي، والرمز $\nparallel$ يعني لا يوازي.

تحقق من فهمك

2) رؤوس الشكل الرباعي $QRST$ هي $Q(-8, -4), R(0, 8), S(6, 8), T(-6, -10)$.
بيّن أن $QRST$ شبه منحرف، وحدِّد ما إذا كان متطابق الساقين. ووضِّح إجابتك.

القطعة المتوسطة لشبه المنحرف هي قطعة مستقيمة تصل بين منتصفي ساقيه. وتبين النظرية الآتية العلاقة بين القطعة المتوسطة وقاعدتي شبه المنحرف.

قراءة الرياضيات

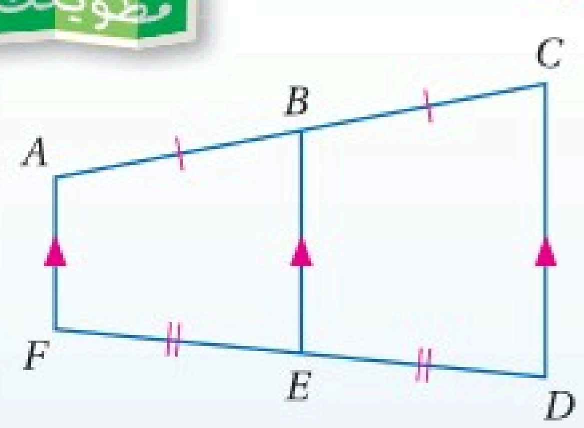
القطعة المتوسطة: تسمى القطعة المتوسطة لشبه المنحرف أيضًا القطعة المنصّفة.

نظرية 5.24 نظريَة القطعة المتوسطة لشبه المنحرف

أضف إلى مطويتك

القطعة المتوسطة لشبه المنحرف توازي كلًا من القاعدتين، وطولها يساوي نصف مجموع طولي القاعدتين.

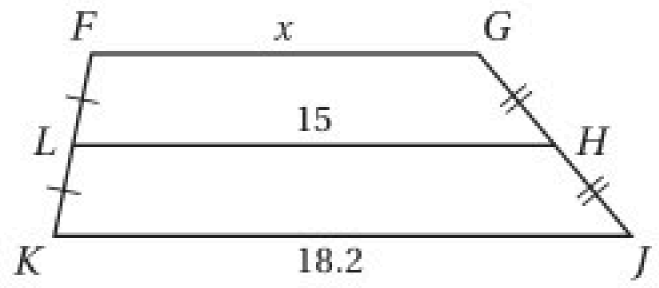
مثال: **إذا كانت** $\overline{BE}$ **قطعة متوسطة لشبه المنحرف** $ACDF$ ،
فإنَ $\overline{AF} \parallel \overline{BE}$, $\overline{CD} \parallel \overline{BE}$ ،
$BE = \frac{1}{2}(AF + CD)$.



سوف تبرهن النظريّة 5.24 في السؤال 25 .

مثال 3 من اختبار

في الشكل المجاور، $\overline{LH}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $FGJK$. ما قيمة x؟



اقرأ سؤال الاختبار

أُعطيت في السؤال طول القطعة المتوسطة لشبه المنحرف وطول إحدى قاعدتيه. ويطلب إليك إيجاد طول القاعدة الأخرى.

حل سؤال الاختبار

$LH = \frac{1}{2}(FG + KJ)$ نظرية القطعة المتوسطة لشبه المنحرف

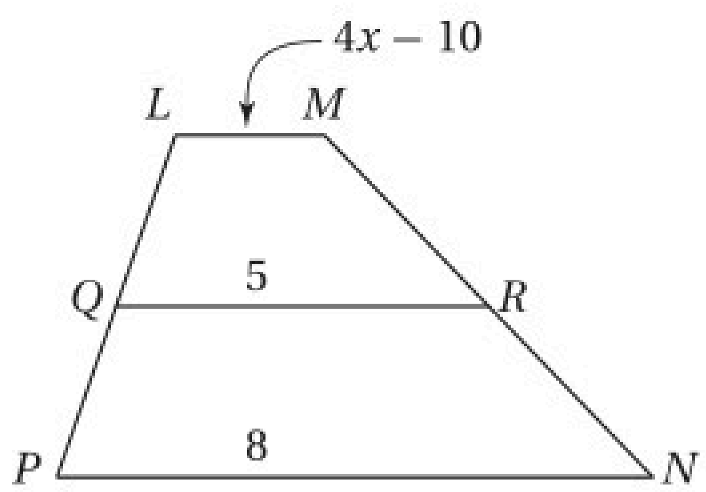
$15 = \frac{1}{2}(x + 18.2)$ بالتعويض

$30 = x + 18.2$ بضرب كلا الطرفين في 2

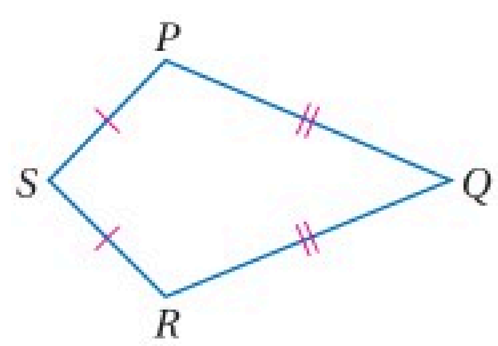
$11.8 = x$ بطرح 18.2 من كلا الطرفين

تحقق من فهمك

3) في الشكل أدناه، $\overline{QR}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $LMNP$. ما قيمة x؟



خصائص شكل الطائرة الورقيّة: **شكل الطائرة الورقيّة** هو شكل رباعي يتكون من زوجين متمايزين من الأضلاع المتجاورة المتطابقة. وعلى عكس متوازي الأضلاع، كل ضلعين متقابلين في شكل الطائرة الورقيّة ليسا متطابقين ولا متوازيين.



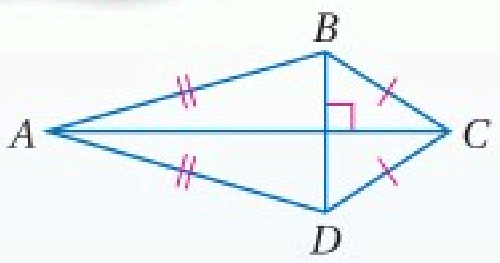
نظريات

أضف إلى مطويتك

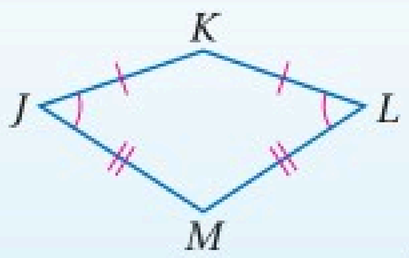
شكل الطائرة الورقيّة

5.25 **قطرا شكل الطائرة الورقية متعامدان.**

مثال: **بما أن** $ABCD$ **شكل طائرة ورقيّة ،**
فإنّ $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.



5.26 **يوجد في شكل الطائرة الورقية زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة المتطابقة، هما الزاويتان المحصورتان بين كل ضلعين متجاورين غير متطابقين.**



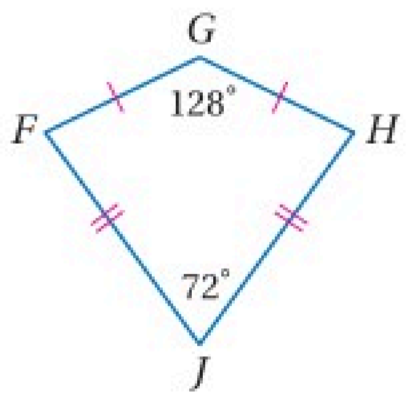
مثال: **بما أن** $JKLM$ **شكل طائرة ورقيّة، فإنّ** $\angle J \cong \angle L$, $\angle K \not\cong \angle M$.

سوف تبرهن النظريتين 5.26 , 5.25 في السؤالين 23 ,22 على الترتيب.

يمكنك استعمال النظريتين أعلاه ونظرية فيثاغورس ونظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع لإيجاد القياسات المجهولة في شكل الطائرة الورقيّة.

مثال 4 استعمال خصائص شكل الطائرة الورقيّة

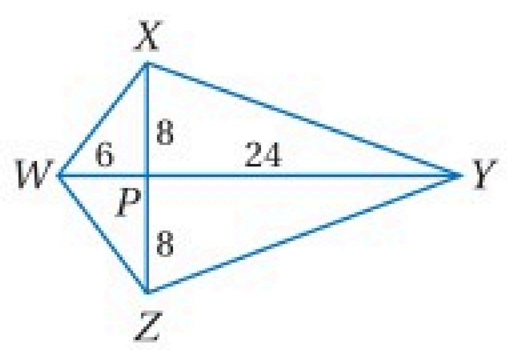
a) **إذا كان** $FGHJ$ **شكل طائرة ورقيّة، فأوجد** $m\angle F$.



في شكل الطائرة الورقيّة زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة المتطابقة،
وبما أن $\angle G \not\cong \angle J$ ، فإنّ $\angle F \cong \angle H$؛ لذلك $m\angle F = m\angle H$.
اكتب معادلة وحلّها لإيجاد $m\angle F$.

$m\angle F + m\angle G + m\angle H + m\angle J = 360°$	نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع
$m\angle F + 128° + m\angle F + 72° = 360°$	بالتعويض
$2m\angle F + 200° = 360°$	بالتبسيط
$2m\angle F = 160°$	بطرح 200 من كلا الطرفين
$m\angle F = 80°$	بقسمة كلا الطرفين على 2

b) **إذا كان** $WXYZ$ **شكل طائرة ورقيّة، فأوجد** ZY .



بما أن قطري شكل الطائرة الورقيّة متعامدان فإنهما يقسمانه إلى أربعة مثلثات قائمة الزاوية. استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد ZY ، وهو طول وتر المثلث القائم الزاوية $\triangle YPZ$.

$PZ^2 + PY^2 = ZY^2$	نظرية فيثاغورس
$8^2 + 24^2 = ZY^2$	بالتعويض
$640 = ZY^2$	بالتبسيط
$\sqrt{640} = ZY$	بأخذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين
$8\sqrt{10} = ZY$	بالتبسيط

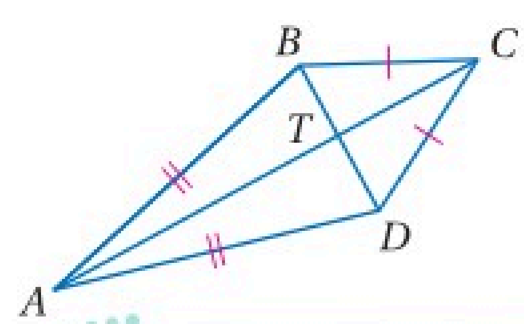
الربط مع الحياة

أقصى سرعة مسجّلة لطائرة ورقيّة 120 mi/h. وأقصى ارتفاع مسجّل لطائرة ورقيّة 12471 ft.

تحقق من فهمك

4A) إذا كان $ABCD$ شكل طائرة ورقية، فيه:
$m\angle BAD = 38°$, $m\angle BCD = 50°$ ، فأوجد $m\angle ADC$.

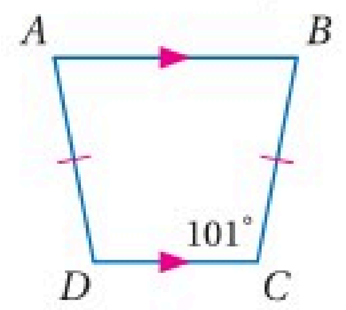
4B) إذا كان $BT = 5$, $TC = 8$ ، فأوجد CD.



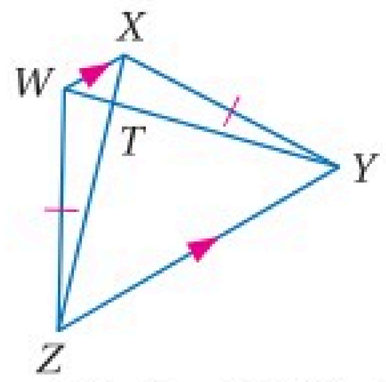
تأكـد

المثال 1 **أوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:**

1) $m\angle D$



2) WT، إذا كان:
$ZX = 20,\ TY = 15$

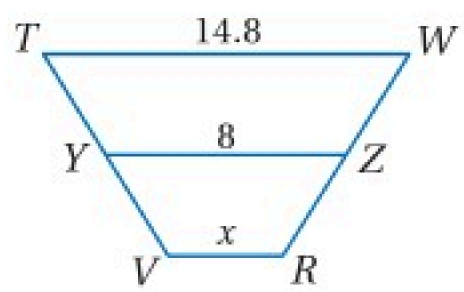


المثال 2 **هندسة إحداثيّة:** **رؤوس الشكل الرباعي $ABCD$ هي $A(-4, -1), B(-2, 3), C(3, 3), D(5, -1)$.**

3) بيّن أنّ $ABCD$ شبه منحرف.

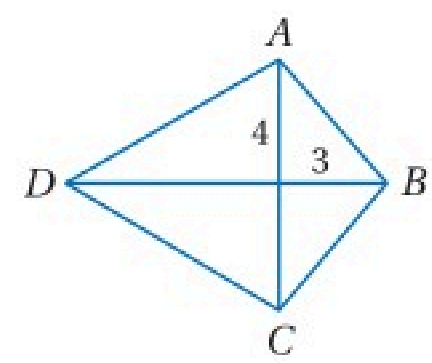
4) حدّد ما إذا كان $ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين ؟ وضّح إجابتك.

المثال 3 5) **إجابة قصيرة:** في الشكل المجاور: $\overline{YZ}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $TWRV$. أوجد قيمة x.

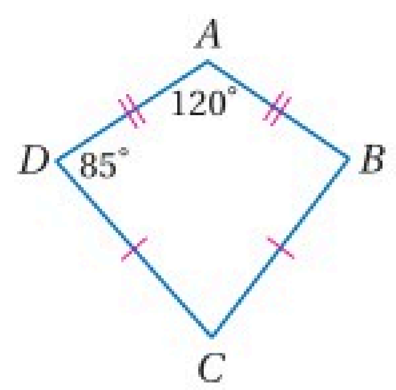


المثال 4 **إذا كان $ABCD$ على شكل طائرة ورقيّة، فأوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:**

6) AB



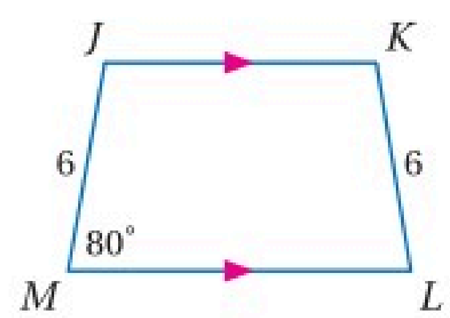
7) $m\angle C$



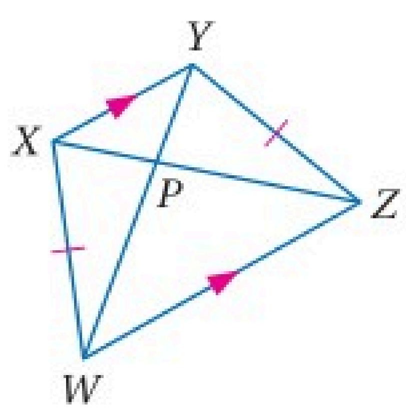
تدرب وحل المسائل

المثال 1 **أوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:**

8) $m\angle K$



9) PW، إذا كان:
$XZ = 18,\ PY = 3$



المثال 2 **هندسة إحداثيّة:** **بيّن أن الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي شبه منحرف، وحدِّد ما إذا كان متطابق الساقين؟**

10) $A(-2, 5), B(-3, 1), C(6, 1), D(3, 5)$

11) $J(-4, -6), K(6, 2), L(1, 3), M(-4, -1)$

12) $Q(2, 5), R(-2, 1), S(-1, -6), T(9, 4)$

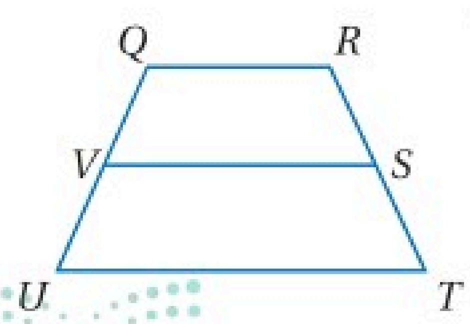
13) $W(-5, -1), X(-2, 2), Y(3, 1), Z(5, -3)$

المثال 3 **في الشكل المجاور، S, V نقطتا منتصفي الساقين لشبه المنحرف $QRTU$.**

14) إذا كان $QR = 12\ ,\ UT = 22$ ، فأوجد VS.

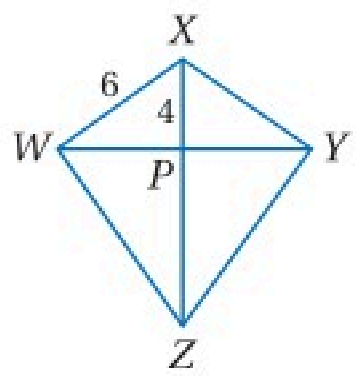
15) إذا كان $VS = 9\ ,\ UT = 12$ ، فأوجد QR.

16) إذا كان $RQ = 5\ ,\ VS = 11$ ، فأوجد UT.

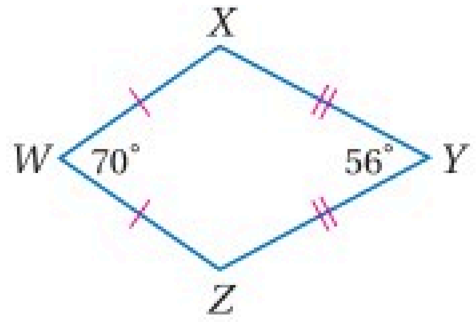


المثال 4 إذا كان $WXYZ$ شكل طائرة ورقيّة، فأوجد القياس المطلوب في كل مما يأتي :

17) WP

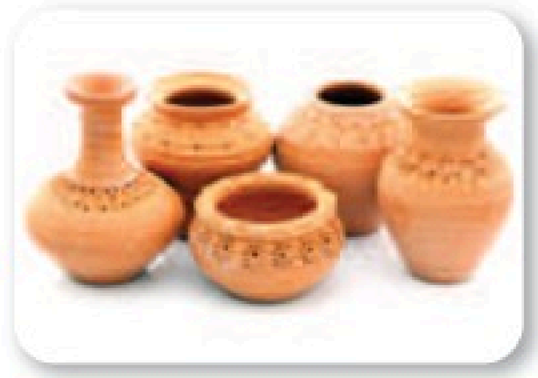


18) $m\angle X$



برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكلٍّ من النظريات الآتية :

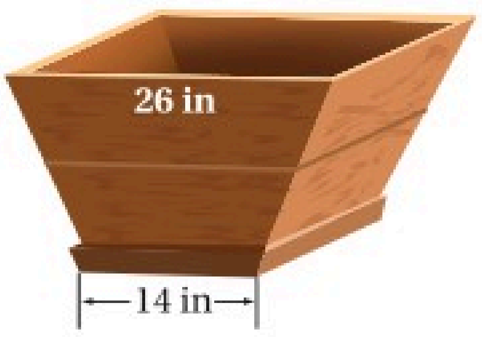
19) النظريّة 5.21
20) النظريّة 5.22
21) النظريّة 5.23
22) النظريّة 5.25
23) النظريّة 5.26



الربط مع الحياة

تمتاز الأصص الفخارية بالمسامية والتهوية وصرف المياه الزائدة، ما يسمح بنمو جيد للجذور، وهي من أفضل الأصص الزراعية.

24) **نباتات:** اشترى مشاري أصيصًا زراعيًّا أوجهه الأربعة على شكل شبه منحرف أبعاده كما في الشكل المجاور. إذا أراد مشاري وضع رف أفقي عند منتصف الأصيص؛ لتستند إليه النبتة، فكم يكون عرض هذا الرفّ؟



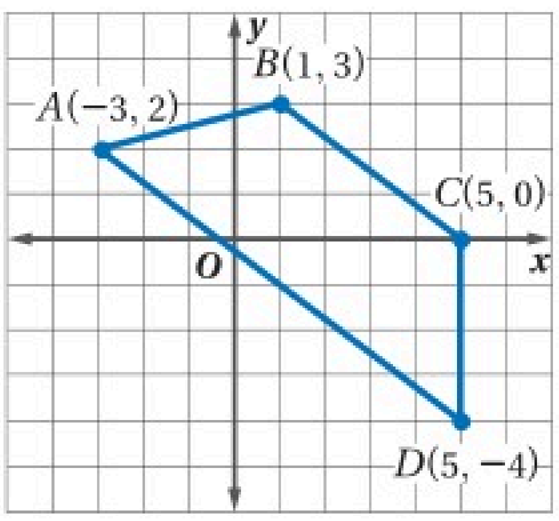
25) **برهان:** اكتب برهانًا إحداثيًّا للنظريّة 5.24.

26) **هندسة إحداثيّة:** استعن بالشكل الرباعي $ABCD$ المجاور.

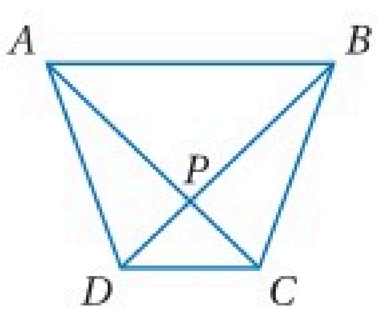
a) بيِّن أن $ABCD$ شبه منحرف. وحدِّد ما إذا كان متطابق الساقين. وضّح إجابتك.

b) هل القطعة المتوسطة محتواة في المستقيم الذي معادلته $y = -x + 1$؟ برّر إجابتك.

c) أوجد طول القطعة المتوسطة.



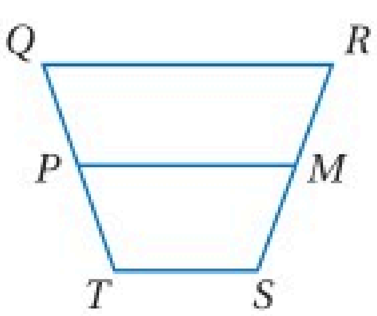
جبر: في الشكل المجاور، $ABCD$ شبه منحرف. أوجد قيمة x بحيث يكون متطابق الساقين في كلٍّ ممَّا يأتي:



27) إذا كان $AC = 3x - 7$, $BD = 2x + 8$

28) إذا كان $m\angle ABC = (4x + 11)^\circ$, $m\angle DAB = (2x + 33)^\circ$

جبر: في الشكل المجاور، M , P نقطتا منتصفي الساقين لشبه المنحرف $QRST$.



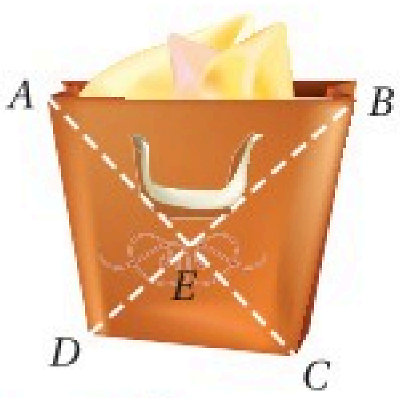
29) إذا كان $QR = 16, PM = 12, TS = 4x$ ، فأوجد قيمة x.

30) إذا كان $TS = 2x, PM = 20, QR = 6x$ ، فأوجد قيمة x.

31) إذا كان $PM = 2x, QR = 3x, TS = 10$ ، فأوجد PM.

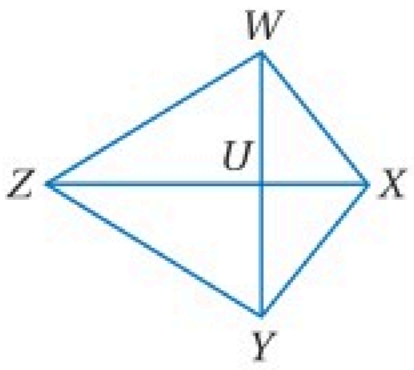
32) إذا كان $TS = 2x + 2, QR = 5x + 3, PM = 13$ ، فأوجد TS.

تسوّق: الوجه الجانبي لحقيبة التسوّق المبيّنة جانبًا على شكل شبه منحرف متطابق الساقين. إذا كان $EC = 9$ in, $DB = 19$ in ، $m\angle ABE = 40^\circ$, $m\angle EBC = 35^\circ$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي :



33) AE
34) AC
35) $m\angle BCD$
36) $m\angle EDC$

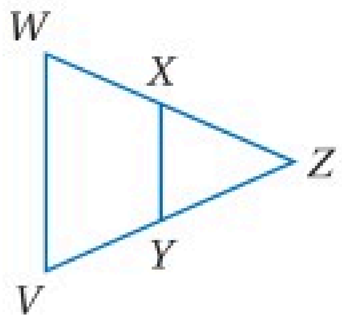
جبر: في الشكل المجاور، **WXYZ** شكل طائرة ورقيّة.



37) إذا كان $m\angle WXY = 120°$, $m\angle WZY = (4x)°$ ، $m\angle ZWX = (10x)°$ ، فأوجد $m\angle ZYX$.

38) إذا كان $m\angle WXY = (13x + 24)°$, $m\angle WZY = 35°$ ، $m\angle ZWX = (13x + 14)°$، فأوجد $m\angle ZYX$.

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين.



39) **المعطيات:** $\angle W \cong \angle ZXY$, $\overline{WZ} \cong \overline{ZV}$ ، $\overline{XY}$ تنصِّف كلًّا من $\overline{WZ}$ و $\overline{ZV}$.

المطلوب: $WXYV$ شبه منحرف متطابق الساقين.

40) **طائرة ورقيّة:** استعن بالطائرة الورقيّة في الشكل المجاور .
اكتب باستعمال خصائص شكل الطائرة الورقية برهانًا ذا عمودين لبيان أنّ $\triangle MNR$ يطابق $\triangle PNR$.

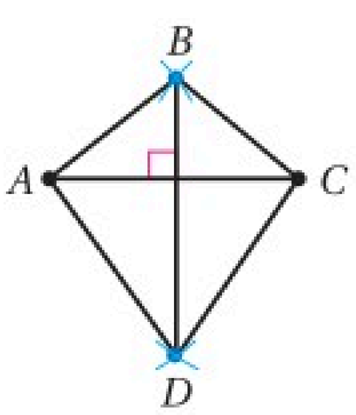
41) **أشكال ڤن:** ارسم شكل ڤن يوضح جميع الأشكال الرباعيّة متضمنًا شبه المنحرف المتطابق الساقين، وشكل الطائرة الورقيّة وعموم الأشكال الرباعيّة التي لا أسماء خاصة لها.

هندسة إحداثيّة: **حدد ما إذا كان الشكل المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي شبه منحرف، أم متوازي أضلاع، أم مستطيلًا، أم مربعًا، أم معينًا، أم هو شكل رباعي فحسب؟ اختر أكثر المسمّيات تحديدًا، ووضِّح إجابتك.**

42) $A(-1, 4), B(2, 6), C(3, 3), D(0, 1)$

43) $W(-3, 4), X(3, 4), Y(5, 3), Z(-5, 1)$

44) **تمثيلات متعدِّدة:** سوف تستقصي في هذه المسألة إحدى خصائص شكل الطائرة الورقيّة.



a) **هندسيًّا:** ارسم قطعة مستقيمة. وأنشئ عمودًا منصفًا لها لا تنصفه القطعة المستقيمة ولا تساويه طولًا. ثم صِلْ أطراف القطعتين المستقيمتين لتكوِّن الشكل الرباعي $ABCD$ كما في الشكل المجاور. كرّر هذه العملية مرتين، وسمِّ الشكلين الرباعيين الجديدين $WXYZ$, $PQRS$.

b) **جدوليًّا:** انقل الجدول الآتي وأكمله.

الشكل	الضلع	الطول	الضلع	الطول	الضلع	الطول	الضلع	الطول
$ABCD$	$\overline{AB}$		$\overline{BC}$		$\overline{CD}$		$\overline{DA}$	
$PQRS$	$\overline{PQ}$		$\overline{QR}$		$\overline{RS}$		$\overline{SP}$	
$WXYZ$	$\overline{WX}$		$\overline{XY}$		$\overline{YZ}$		$\overline{ZW}$	

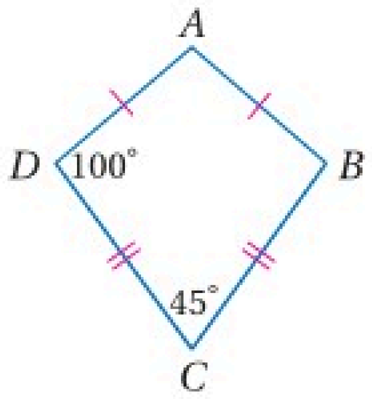
c) **لفظيًّا:** اكتب تخمينًا حول الشكل الرباعي الذي قطراه متعامدان وغير متطابقين، وأحدهما فقط ينصِّف الآخر.

برهان: اكتب برهانًا إحداثيًّا لكل من العبارتين الآتيتين :

45) قطرا شبه المنحرف المتطابق الساقين متطابقان.

46) القطعة المتوسطة لشبه المنحرف المتطابق الساقين توازي كلًّا من القاعدتين.

مسائل مهارات التفكير العليا



47) اكتشف الخطأ: أوجد كل من عادل وسعيد $m\angle A$ في شكل الطائرة الورقيّة $ABCD$ المجاور . هل إجابة أي منهما صحيحة؟ وضِّح إجابتك.

سعيد	عادل
$m\angle A = 45°$	$m\angle A = 115°$

48) تحدٍّ: إذا كان الضلعان المتوازيان في شبه منحرف محتويين في المستقيمين $y = x + 4, y = x - 8$ ، فما معادلة المستقيم الذي يحتوي القطعة المتوسطة لشبه المنحرف؟

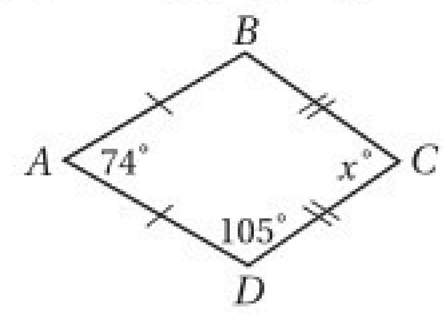
49) تبرير: هل العبارة " *المربع هو أيضًا شكل طائرة ورقيّة* " صحيحة أحيانًا أم دائمًا أم غير صحيحة أبدًا ؟ وضّح إجابتك.

50) مسألة مفتوحة: ارسم شبه المنحرف $ABCD$ ، وشبه المنحرف $FGHJ$ غير المتطابقين وفيهما $\overline{AC} \cong \overline{FH}$ و $\overline{BD} \cong \overline{GJ}$.

51) اكتب: قارن بين خصائص كلٍّ من: شبه المنحرف وشبه المنحرف المتطابق الساقين وشكل الطائرة الورقيّة.

تدريب على اختبار

52) إذا كان $ABCD$ شكل طائرة ورقيّة، فما قياس $\angle C$؟

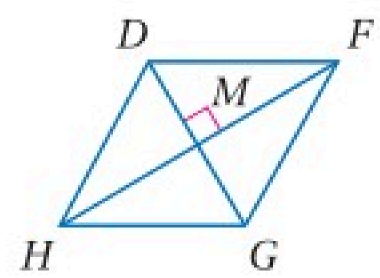


53) ما الشكل الذي يمكن أن يكون مثالًا مضادًّا للتخمين الآتي؟
إذا كان قطرا شكل رباعي متطابقين فإنه مستطيل .

A المربّع
B المعين
C متوازي الأضلاع
D شبه المنحرف المتطابق الساقين

مراجعة تراكمية

جبر: استعن بالمعين $DFGH$ فيما يأتي: (الدرس 5-5)

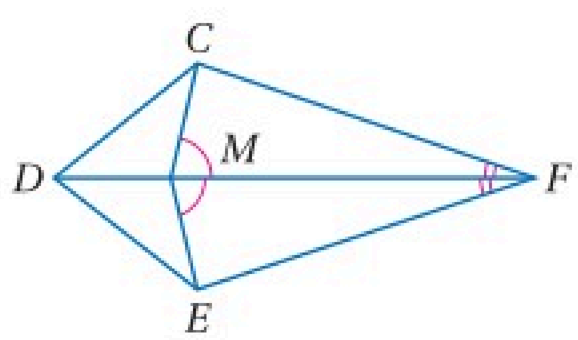


54) إذا كان $m\angle FGH = 118°$ ، فأوجد $m\angle MHG$.

55) إذا كان $DM = 4x - 3 , MG = x + 6$ ، فأوجد DG.

56) إذا كان $HM = 12 , HD = 15$ ، فأوجد MG.

57) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 5-5)



المعطيات: $\angle CMF \cong \angle EMF$ ، $\angle CFM \cong \angle EFM$

المطلوب: $\triangle DMC \cong \triangle DME$

استعد للدرس اللاحق

أوجد ميل القطعة المستقيمة المعطاة إحداثيات طرفيها في كل مما يأتي:

58) $(x, 4y), (-x, 4y)$

59) $(-x, 5x), (0, 6x)$

60) $(y, x), (y, y)$

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

زوايا المضلع (الدرس 5-1)

- يعطى مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع محدب بالصيغة $S = (n - 2) \cdot 180°$، حيث n عدد الأضلاع .
- مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة لمضلع محدّب بأخذ زاوية واحدة عند كل رأس يساوي $360°$.

خصائص متوازي الأضلاع : (الدرسان 5-2 و 5-3)

- كل ضلعين متقابلين متطابقان.
- كل زاويتين متقابلتين متطابقتان.
- كل زاويتين متحالفتين متكاملتان.
- إذا كانت إحدى الزوايا قائمة، فإنّ الزوايا الأخرى قوائم.
- القطران ينصّف كل منهما الآخر.
- قطره يقسمه إلى مثلثين متطابقين.

خصائص المستطيل والمعين والمربع وشبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية (الدروس 5-4 إلى 5-6)

- للمستطيل جميع خصائص متوازي الأضلاع. وقطراه متطابقان. وزواياه الأربع قوائم.
- للمعين جميع خصائص متوازي الأضلاع. وجميع أضلاعه متطابقة، وقطراه متعامدان، وينصفان زواياه.
- للمربع جميع خصائص متوازي الأضلاع والمستطيل والمعين.
- زاويتا كل قاعدة في شبه المنحرف المتطابق الساقين متطابقتان، والقطران متطابقان أيضًا.
- قطرا شكل الطائرة الورقية متعامدان، ويوجد فيه زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة المتطابقة هما الزاويتان المحصورتان بين كل ضلعين متجاورين غير متطابقين.

المطويات منظم أفكار

تأكد من أن **المفاهيم الأساسية** مدونة في مطويتك.

المفردات الأساسيّة

- **القطر** (ص. 140)
- **متوازي الأضلاع** (ص. 149)
- **المستطيل** (ص. 166)
- **المعين** (ص. 172)
- **المربّع** (ص. 173)
- **شبه المنحرف** (ص. 180)
- **قاعدتا شبه المنحرف** (ص. 180)
- **ساقا شبه المنحرف** (ص. 180)
- **زاويتا القاعدة** (ص. 180)
- **شبه المنحرف المتطابق الساقين** (ص. 180)
- **القطعة المتوسطة لشبه المنحرف** (ص. 182)
- **شكل الطائرة الورقيّة** (ص. 183)

اختبار المفردات

بيّن ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحةٍ أو غير صحيحةٍ ، وإذا كانت غير صحيحةٍ فاستبدل بالكلمة التي تحتها خط كلمة من القائمة أعلاه؛ لتجعل الجملة صحيحة:

1) زاويتا قاعدة شبه المنحرف متطابقتان.

2) إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلًا، فإنّ قطريه متطابقان.

3) القطعة المتوسطة لشبه المنحرف تصل بين رأسين غير متتالين فيه.

4) قاعدة شبه المنحرف هي إحدى ضلعيه المتوازيين.

5) قطرا المعين متعامدان.

6) قطر شبه المنحرف قطعة مستقيمة تصل بين نقطتي منتصفي ساقيه.

7) المستطيل يكون دائمًا متوازي أضلاع.

8) الشكل الرباعي الذي فيه زوجٌ واحدٌ من الأضلاع المتوازية هو متوازي أضلاع.

9) المعين الذي إحدى زواياه قائمة مستطيل.

10) ساق شبه المنحرف هو أحد ضلعيه غير المتوازيين.

دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

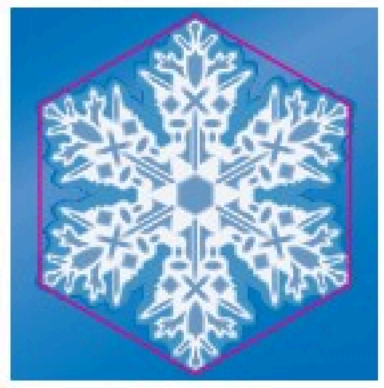
5-1 زوايا المضلع (ص 140–148)

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة في كل من المضلعين المحدّبين الآتيين :

11) العشاري.

12) ذو 15 ضلعًا.

13) **زخرفة :** يمثّل نموذج الزخرفة المجاور شكلًا سداسيًّا منتظمًا. أوجد مجموع قياسات زواياه الداخليّة.



أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى قياس إحدى زواياه الداخلية في كل مما يأتي:

14) 135°

15) 168°

مثال 1

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع محدّب عدد أضلاعه 22 ضلعًا.

$S = (n-2)\cdot180^\circ$	بكتابة معادلة
$= (22-2)\cdot180^\circ$	بالتعويض
$= 20\cdot180^\circ$	بالطرح
$= 3600^\circ$	بالضرب

مثال 2

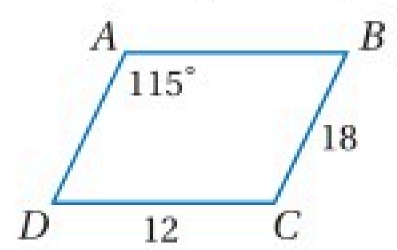
قياس زاوية داخليّة لمضلع منتظم 157.5. أوجد عدد أضلاعه.

$157.5n = (n-2)\cdot180^\circ$	بكتابة المعادلة
$157.5^\circ n = 180^\circ n - 360^\circ$	خاصيّة التوزيع
$-22.5^\circ n = -360^\circ$	بالطرح
$n = 16$	بالقسمة

إذن عدد أضلاع المضلع 16 ضلعًا.

5-2 متوازي الأضلاع (ص 149–156)

استعمل $\square ABCD$ المبيَّن جانبًا لإيجاد كل مما يأتي :



16) $m\angle ADC$

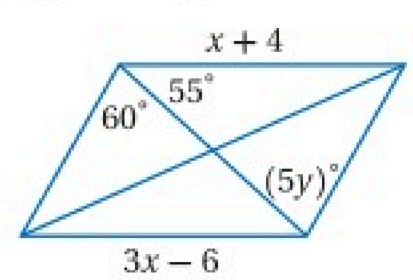
17) AD

18) AB

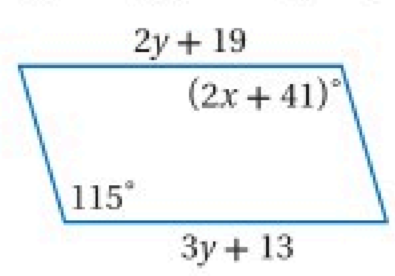
19) $m\angle BCD$

جبر: أوجد قيمتي y , x في كل من متوازيي الأضلاع الآتيين:

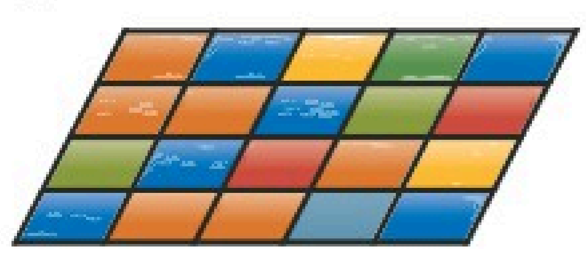
20)



21)

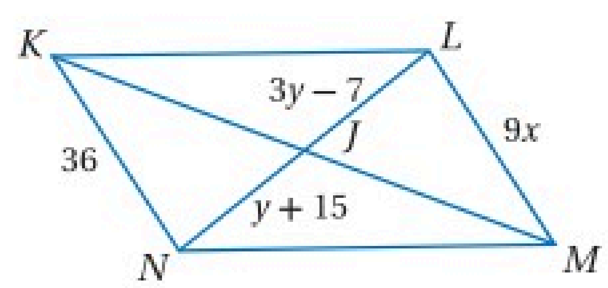


22) **تصميم:** ما المعطيات الضرورية لتحديد ما إذا كانت الأجزاء المكونة للنمط أدناه متوازيات أضلاع؟



مثال 3

جبر: إذا كان $KLMN$ متوازي أضلاع، فأوجد قيمة المتغير في كل مما يأتي :



a) x

$\overline{KN} \cong \overline{LM}$	الأضلاع المتقابلة في $\square$ متطابقة
$KN = LM$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$36 = 9x$	بالتعويض
$4 = x$	بالقسمة

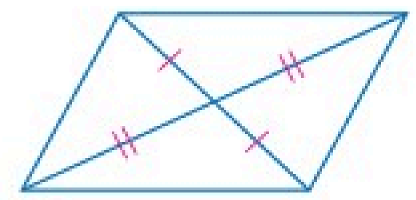
b) y

$\overline{NJ} \cong \overline{JL}$	قطرا $\square$ ينصّف كل منهما الآخر
$NJ = JL$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$y + 15 = 3y - 7$	بالتعويض
$-2y = -22$	بالطرح
$y = 11$	بالقسمة

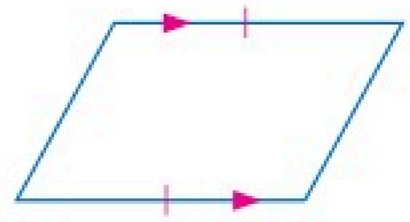
5-3 تمييز متوازي الأضلاع (ص 157–164)

حدِّد ما إذا كان الشكل الرباعي في كل مما يأتي متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك.

23)



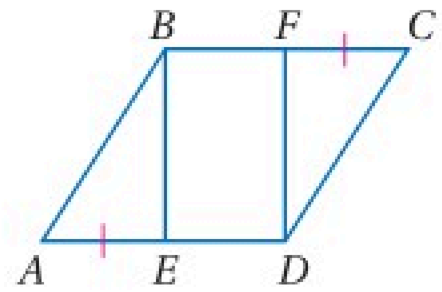
24)



25) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

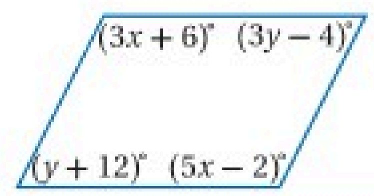
المعطيات: $\square ABCD$, $\overline{AE} \cong \overline{CF}$

المطلوب: $EBFD$ متوازي أضلاع.

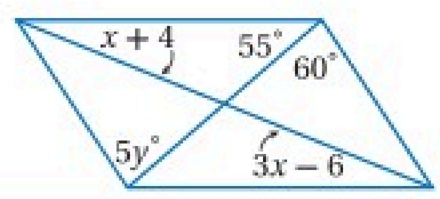


جبر: أوجد قيمتي x , y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

26)

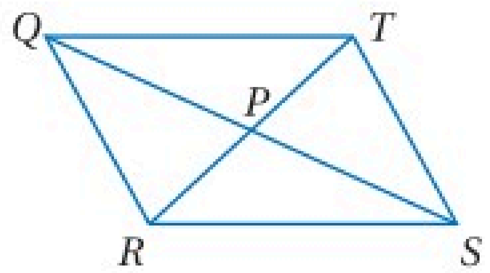


27)



مثال 4

إذا كان $TP = 4x + 2$, $QP = 6 - 2y$, $PS = 12 - 5y$، $PR = 6x - 4$، فأوجد قيمتي x, y بحيث يكون $QRST$ متوازي أضلاع.

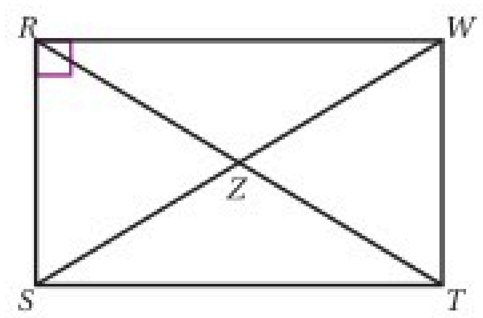


أوجد قيمة x بحيث تكون $\overline{TP} \cong \overline{PR}$ وقيمة y بحيث تكون $\overline{QP} \cong \overline{PS}$.

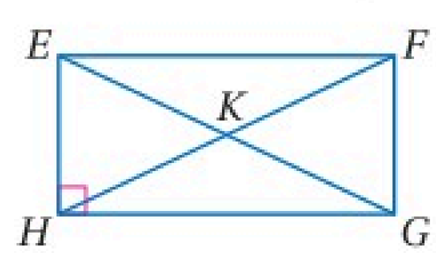
$TP = PR$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$4x + 2 = 6x - 4$	بالتعويض
$-2x = -6$	بالطرح
$x = 3$	بالقسمة
$QP = PS$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$6 - 2y = 12 - 5y$	بالتعويض
$3y = 6$	بالطرح
$y = 2$	بالقسمة

5-4 المستطيل (ص 166–171)

28) **جبر:** الشكل الرباعي $RSTW$ مستطيل، إذا كان $RZ = (2x+5)$in ،$SW = (5x-20)$in، فأوجد x؟



جبر: استعن بالمستطيل $EFGH$ أدناه.



29) إذا كان $m\angle FEG = 57°$، فأوجد $m\angle GEH$.

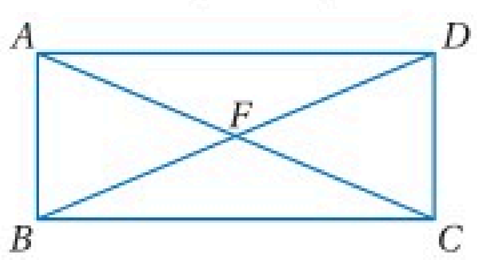
30) إذا كان $m\angle HGE = 13°$، فأوجد $m\angle FGE$.

31) إذا كان $FK = 32$ ft، فأوجد EG.

32) أوجد $m\angle HEF + m\angle EFG$.

مثال 5

جبر: في المستطيل $ABCD$ أدناه ، إذا كان $m\angle ADB = (4x+8)°$, $m\angle DBA = (6x+12)°$، فأوجد قيمة x .



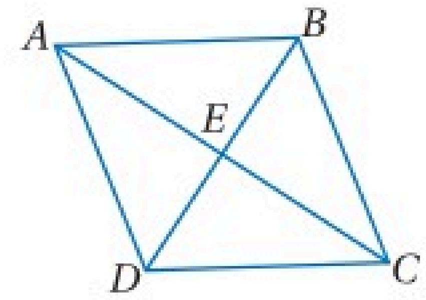
بما أنّ $ABCD$ مستطيل، فإنّ $m\angle ABC = 90°$. وبما أن الأضلاع المتقابلة في المستطيل متوازية، والزوايا المتبادلة داخليًّا بالنسبة للقطرين متطابقة، فإنّ $\angle DBC \cong \angle ADB$ ، ومن تعريف التطابق $m\angle DBC = m\angle ADB$.

$m\angle DBC + m\angle DBA = 90°$	مسلمة جمع الزوايا
$m\angle ADB + m\angle DBA = 90°$	بالتعويض
$(4x + 8)° + (6x + 12)° = 90°$	بالتعويض
$10x° + 20° = 90°$	بالجمع
$10x° = 70°$	بالطرح
$x = 7$	بالقسمة

دليل الدراسة والمراجعة

5-5 المعين والمربع (ص 172–179)

جبر: في المعين $ABCD$ ، إذا كان $EB = 9, AB = 12$ ، $m\angle ABD = 55°$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي :



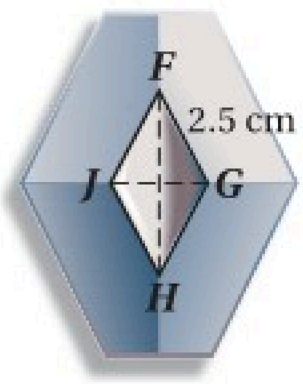
33) AE

34) $m\angle BDA$

35) CE

36) $m\angle ACB$

37) **شعار:** تتخذ شركة سيارات الشكل المجاور علامة تجارية لها. إذا كان شكل العلامة التجارية معينًا، فما طول $\overline{FJ}$؟



هندسة إحداثيّة: حدِّد ما إذا كان $\square QRST$ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي معينًا أو مستطيلًا أو مربعًا. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. ووضِّح إجابتك.

38) $Q(12, 0), R(6, -6), S(0, 0), T(6, 6)$

39) $Q(-2, 4), R(5, 6), S(12, 4), T(5, 2)$

مثال 6

يتقاطع قطرا المعين $QRST$ عند النقطة P. استعمل المعطيات لإيجاد المطلوب في كل مما يأتي:

a) **جبر:** إذا كان $QT = x + 7$, $TS = 2x - 9$ ، فأوجد قيمة x .

$\overline{QT} \cong \overline{TS}$	تعريف المعين
$QT = TS$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$x + 7 = 2x - 9$	بالتعويض
$-x = -16$	بالطرح
$x = 16$	بالقسمة

b) إذا كان $m\angle QTS = 76°$ ، فأوجد $m\angle TSP$.

بما أنّ $\overline{TR}$ تنصّف $\angle QTS$، فإنّ $m\angle PTS = \frac{1}{2} m\angle QTS$.

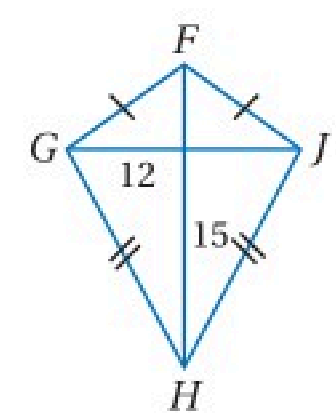
لذلك $m\angle PTS = \frac{1}{2}(76) = 38°$، وبما أنّ قطري المعين متعامدان، فإنّ $m\angle TPS = 90°$.

$m\angle PTS + m\angle TPS + m\angle TSP = 180°$	نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث
$38° + 90° + m\angle TSP = 180°$	بالتعويض
$128° + m\angle TSP = 180°$	بالجمع
$m\angle TSP = 52°$	بالطرح

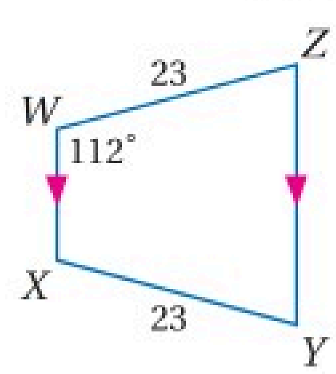
5-6 شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقيّة (ص 180–188)

أوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

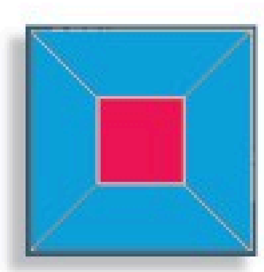
40) GH



41) $m\angle Z$



42) **تصميم:** استعن بقطعة البلاط المربعة الشكل المبينة جانبًا في السؤالين الآتيين:

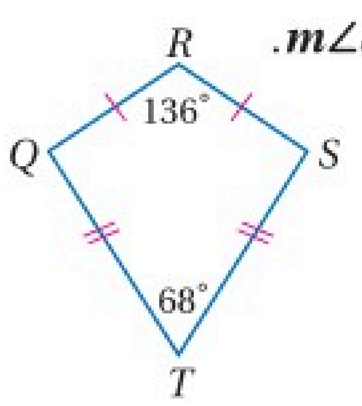


a) صف طريقة لتحديد ما إذا كانت أشكال شبه المنحرف الظاهرة في البلاطة متطابقة الساقين؟

b) إذا كان محيط البلاطة 48 in، ومحيط المربّع الأحمر 16 in، فما محيط أحد أشكال شبه المنحرف ؟

مثال 7

إذا كان $QRST$ شكل طائرة ورقيّة، فأوجد $m\angle S$.



بما أنّ $\angle Q \cong \angle S$، فإنّ $m\angle Q = m\angle S$.
اكتب معادلة وحلّها لإيجاد $m\angle S$.

$m\angle Q + m\angle R + m\angle S + m\angle T = 360°$	نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع
$m\angle S + 136° + m\angle S + 68° = 360°$	بالتعويض
$2m\angle S + 204° = 360°$	بالتبسيط
$2m\angle S = 156°$	بالطرح
$m\angle S = 78°$	بالقسمة

الفصل 5 اختبار الفصل

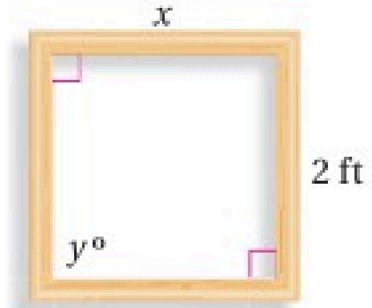
أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة في كل من المضلعين المحدبين الآتيين:

1) السداسي **2)** ذو 16 ضلعًا

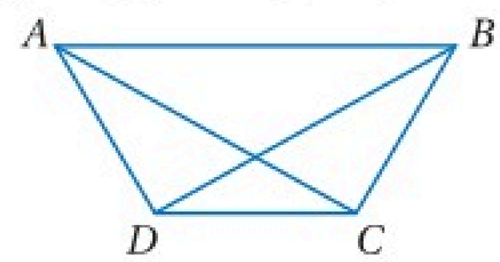
3) فن: تصنع جُمانة إطارًا لتبسط عليه قطعة قماش وترسم عليها بألوان زيتية. ثبتت جمانة أربع قطع من الخشب بعضها ببعض واعتقدت أنّها ستمثّل مربّـعًا.

a) كيف يمكنها التحقق من أنّ الإطار مربع؟

b) إذا كانت أبعاد الإطار كما في الشكل، فأوجد القياسات المجهولة.



الشكل الرباعي $ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين.



4) ما الزاوية التي تطابق $\angle C$؟

5) ما الضلع الذي يوازي $\overline{AB}$؟

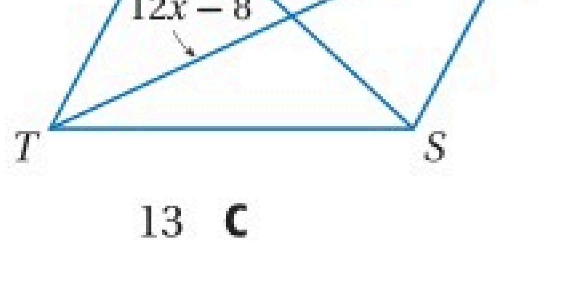
6) ما القطعة المستقيمة التي تطابق $\overline{AC}$؟

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى مجموع قياسات زواياه في كل مما يأتي:

7) $900°$ **8)** $1980°$

9) $2880°$ **10)** $5400°$

11) اختيار من متعدِّد: إذا كان $QRST$ متوازي أضلاع، فما قيمة x؟

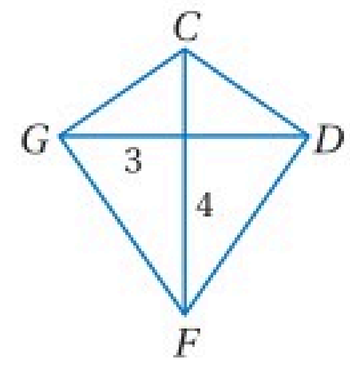


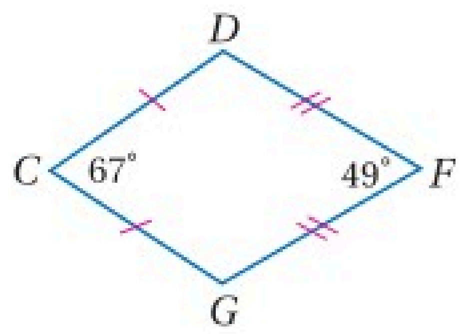
A 11 **C** 13

B 12 **D** 14

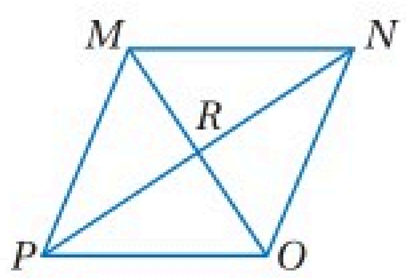
إذا كان $CDFG$ على شكل طائرة ورقيّة، فأوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

12) GF **13)** $m\angle D$





جبر: استعن بالمعين $MNOP$ ، للإجابة عن الأسئلة الآتية:



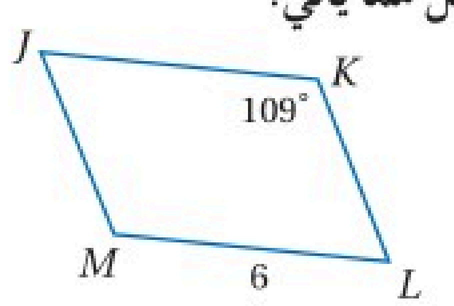
14) $m\angle MRN$

15) إذا كان $PR = 12$، فأوجد RN.

16) إذا كان $m\angle PON = 124°$، فأوجد $m\angle POM$.

17) إنشاءات: تبني عائلة صالح ملحقًا للمنزل، وتركت فتحة لنافذة جديدة. فإذا قاس صالح الأضلاع المتقابلة فوجدها متطابقة. وقاس القطرين فوجدهما متطابقين، فهل يمكنه القول: إن فتحة النافذة تمثّل مستطيلًا؟ وضّح إجابتك.

استعمل $\square JKLM$ المبيَّن جانبًا لإيجاد كل مما يأتي:

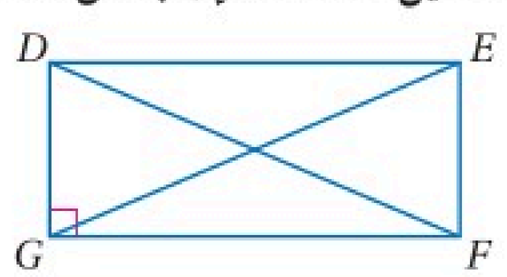


18) $m\angle JML$

19) JK

20) $m\angle KLM$

جبر: استعن بالمستطيل $DEFG$ للإجابة عن الأسئلة الآتية:



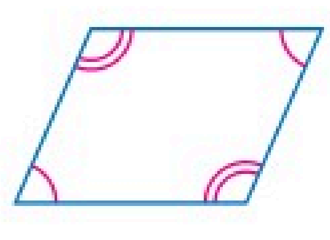
21) إذا كان $DF = 2(x + 5) - 7$, $EG = 3(x - 2)$، فأوجد EG.

22) إذا كان $m\angle EDF = (5x - 3)°$, $m\angle DFG = (3x + 7)°$، فأوجد $m\angle EDF$.

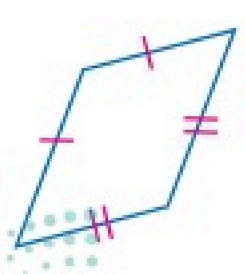
23) إذا كان $DE = 14 + 2x$, $GF = 4(x - 3) + 6$، فأوجد GF.

حدِّد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع أم لا في كل مما يأتي. برّر إجابتك.

24)



25)



الفصل 5

الإعداد للاختبارات

تطبيق التعريفات والخصائص

يتطلب حل كثير من المسائل الهندسيّة في الاختبارات تطبيق التعريفات والخصائص. استعمل هذه الصفحة والتي تليها للتدرّب على تطبيق التعريفات والخصائص عند حل أسئلة الهندسة ذات الإجابات المطولة.

استراتيجيات تطبيق التعريفات والخصائص

الخطوة 1

اقرأ نص السؤال بعناية.

- حدّد المطلوب في المسألة.
- ادرس الأشكال المعطاة في المسألة.
- **اسأل نفسك:** ما خصائص هذا الشكل التي يمكنني تطبيقها لحل المسألة؟

الخطوة 2

حل المسألة.

- حدّد التعريفات أو المفاهيم الهندسيّة التي يمكنك استعمالها لمساعدتك على إيجاد القيم المجهولة في المسألة.
- استعمل التعريفات وخصائص الأشكال لكتابة معادلة وحلها.

الخطوة 3

- تحقق من إجابتك.

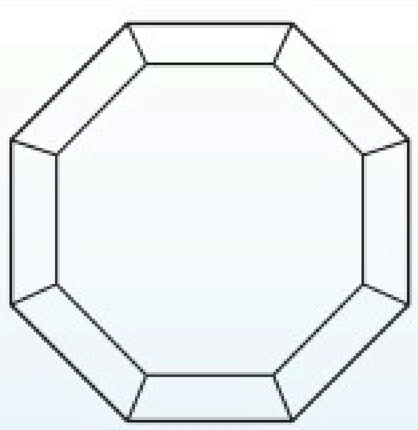
مثال

اقرأ المسألة جيدًا، وحدِّد المطلوب فيها. ثم استعمل المعطيات لحلها.

يصنع خالد إطارًا خشبيًّا على شكل ثماني منتظم محيطه 288 cm.

a) ما طول كل لوح خشبي يشكّل ضلعًا للإطار؟

b) ما الزاوية التي سيُقطع بها كل لوح عند طرفيه الخارجيين حتى تتلاءم الألواح بعضها مع بعض وتشكل الإطار؟ وضِّح إجابتك.



a) **طول كل ضلع من أضلاع الإطار أو طول كل لوح خشبي.**

الخطوة 1: اقرأ المسألة بعناية، علمت أن الألواح ستشكل ثمانيًّا منتظمًا محيطه 288 cm. والمطلوب إيجاد طول كل لوح خشبي.

الخطوة 2: حل المسألة، لإيجاد طول كل لوح، اقسم المحيط على عدد الألواح.

$$288 \div 8 = 36$$

إذن طول كل لوح يجب أن يكون 36 cm.

الخطوة 3: تحقق من حلك بإيجاد محيط المضلع: محيط المضلع المنتظم = عدد الأضلاع × طول الضلع الواحد

$$8 \times 36\,cm = 288\,cm ✓$$

b) **قياس الزاوية التي سيقطع بها كل لوح عند طرفيه الخارجيين حتى تتلاءم الألواح وتشكل الإطار.**

الخطوة 1: المطلوب إيجاد قياس الزاوية التي ستقطع بها الألواح عند أطرافها حتى يتلاءم بعضها مع بعض تمامًا.

الخطوة 2: حل المسألة، استعمل خاصيّة مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع المحدَّب لإيجاد قياس زاوية داخليّة للثماني المنتظم.

أوجد أولًا المجموع S لقياسات الزوايا الداخليّة.

$$\begin{aligned} S &= (n-2) \cdot 180^\circ \\ &= (8-2) \cdot 180^\circ \\ &= 1080^\circ \end{aligned}$$

إذن قياس الزاوية الداخليّة للثُّماني المنتظم يساوي $1080^\circ \div 8 = 135^\circ$. وبما أنّه سيُستعمل لوحان لتشكيل كل رأس للإطار، فإن كل طرف للألواح سيُقطع بزاوية قياسها $135^\circ \div 2 = 67.5^\circ$.

الخطوة 3: تحقق من حلك بالحل عكسيًّا

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم (n) الذي قياس زاويته الداخلية 135°.

$$135^\circ = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$$

$$135^\circ n = 180^\circ n - 360^\circ$$

$$-45^\circ n = -360^\circ$$

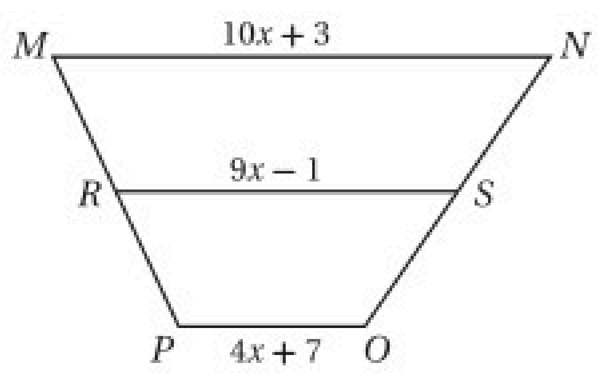
$$n = 8 ✓$$

تمارين ومسائل

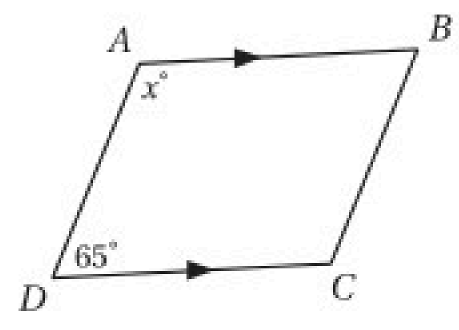
اقرأ كل مسألة مما يأتي، وحدِّد المطلوب. ثم استعمل المعطيات لحلها، وبيِّن خطوات حلك:

1) $\overline{RS}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $MNOP$.

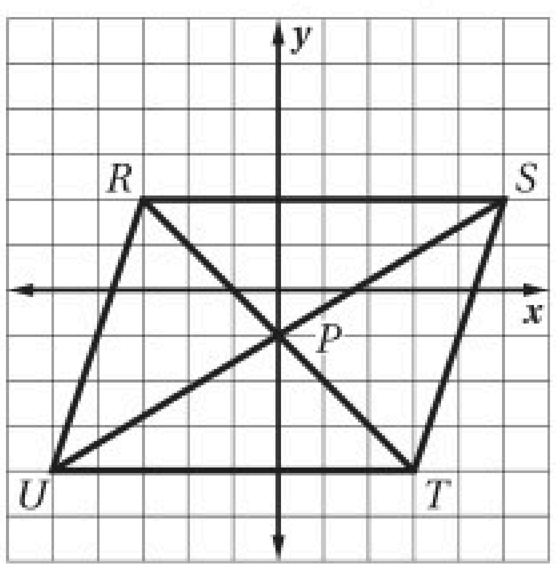
ما طول $\overline{RS}$ ؟



2) إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$، فأوجد قيمة x.



3) استعن بالتمثيل البياني أدناه في كل من السؤالين الآتيين:



a) هل ينصّف قطرا الشكل الرباعي $RSTU$ كل منهما الآخر؟ استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتتحقق من إجابتك.

b) ما نوع الشكل الرباعي $RSTU$؟ وضّح إجابتك باستعمال خصائص هذا النوع من الأشكال الرباعيّة أو تعريفه.

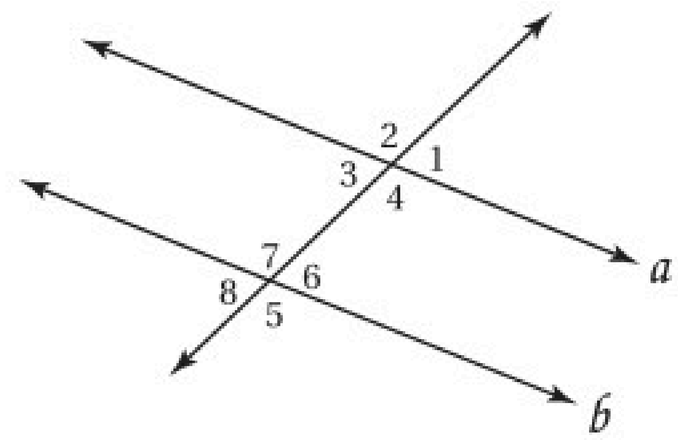
4) ما مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للثُّماني المنتظم؟

الفصل 5 اختبار تراكمي

أسئلة الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال مما يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة.

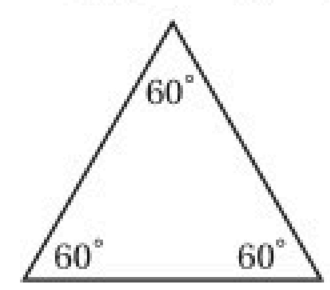
1) إذا كان $a \parallel b$ ، فأيّ العبارات الآتية ليست صحيحة؟



A $\angle 1 \cong \angle 3$ **C** $\angle 2 \cong \angle 5$

B $\angle 4 \cong \angle 7$ **D** $\angle 8 \cong \angle 2$

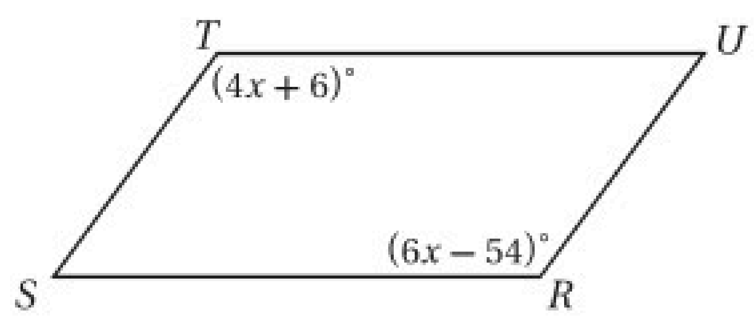
2) صنّف المثلث أدناه تبعًا لقياسات زواياه. اختر المصطلح الأنسب.



A حادّ الزوايا **C** منفرج الزاوية

B متطابق الزوايا **D** قائم الزاوية

3) أوجد قيمة x في متوازي الأضلاع $RSTU$.



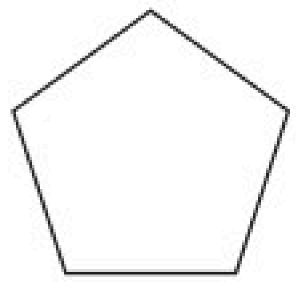
A 12 **C** 25

B 18 **D** 30

إرشادات للاختبار

السؤال 3: استعمل خصائص متوازي الأضلاع لحل المسألة. كل زاويتين متقابلتين متطابقتان.

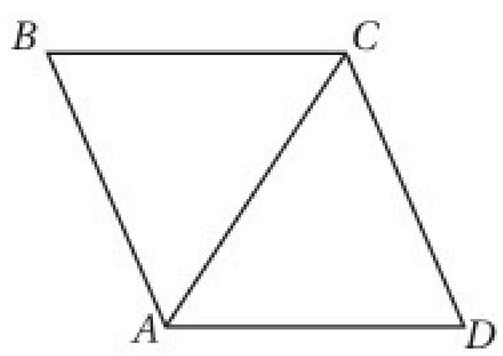
4) ما قياس كل زاوية داخلية في الخُماسي المنتظم؟



A $96°$ **C** $120°$

B $108°$ **D** $135°$

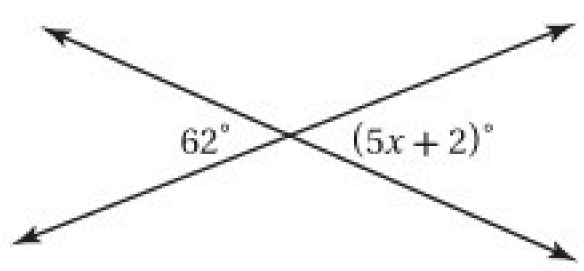
5) الشكل الرباعي $ABCD$ معين، فيه $m\angle BCD = 120°$، أوجد $m\angle DAC$.



A $30°$ **C** $90°$

B $60°$ **D** $120°$

6) ما قيمة x في الشكل أدناه؟



A 10 **C** 14

B 12 **D** 15

7) $\overline{DT}, \overline{AE}$ قطران للمستطيل $DATE$ يتقاطعان في S. إذا كان $AE = 40, ST = x + 5$ ، فما قيمة x؟

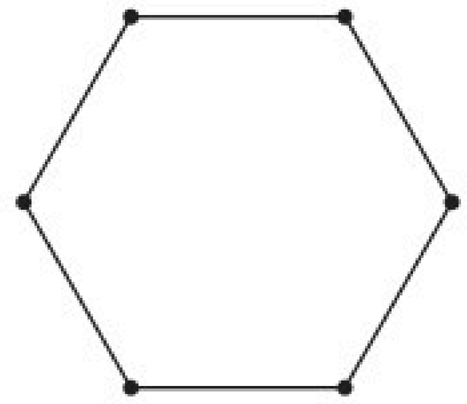
A 35 **C** 15

B 25 **D** 10

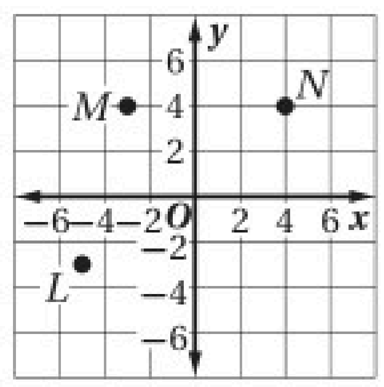
أسئلة ذات إجابات قصيرة

اكتب إجابتك في ورقة الإجابة.

8) تشكِّل أعمدة خيمة رؤوس سداسي منتظم، ما قياس الزاوية المتكوّنة عند أيّ من أركان الخيمة؟



9) ما إحداثيات الرأس الرابع لشبه المنحرف المتطابق الساقين $LMNJ$؟ بيّن خطوات الحل.



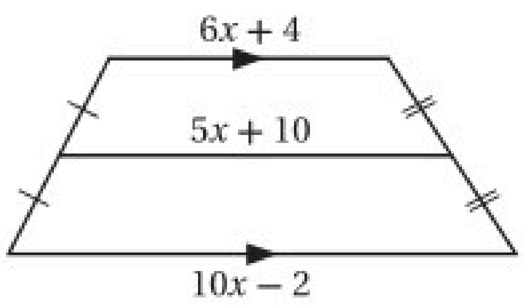
10) ماذا نسمي متوازي الأضلاع إذا كان قطراه متعامدين؟ وضّح إجابتك.

11) حدِّد ما إذا كانت النتيجة صحيحة أم لا فيما يأتي اعتمادًا على المعطيات. فسِّر تبريرك.

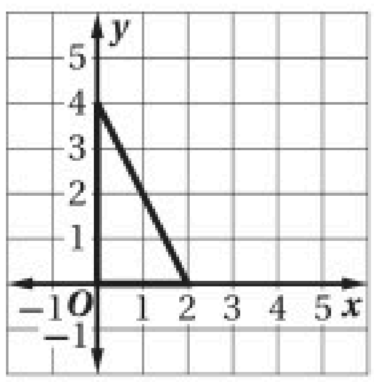
المعطيات: إذا كان العدد يقبل القسمة على 9، فإنّه يقبل القسمة على 3.
العدد 144 يقبل القسمة على 9.

النتيجة: العدد 144 يقبل القسمة على 3.

12) أوجد قيمة x في الشكل أدناه. وقرّب الإجابة إلى أقرب عُشر إن كان ذلك ضروريًّا.



13) ما إحداثيات مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث أدناه؟

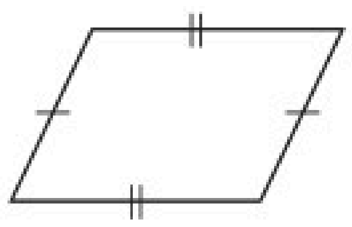


أسئلة ذات إجابات مطولة

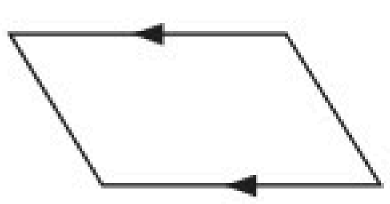
اكتب إجابتك في ورقة الإجابة مبينًا خطوات الحل.

14) هل يمكنك إثبات أنّ كل شكل مما يأتي متوازي أضلاع؟ إذا لم تستطع ذلك، فاذكر المعطيات الإضافية التي ستحتاج إليها لإثبات أنه متوازي أضلاع. ووضّح تبريرك.

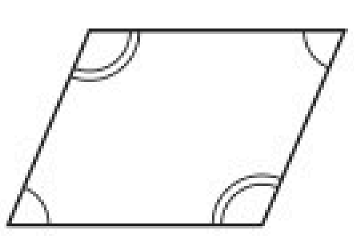
a)



b)



c)



هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟														
إذا لم تستطع الإجابة عن السؤال..	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
فعد إلى الدرس..	مهارة سابقة	مهارة سابقة	5-2	5-1	5-5	مهارة سابقة	5-4	5-1	5-6	5-5	مهارة سابقة	5-6	مهارة سابقة	5-3

مراجعة بعض المصطلحات والرموز

المصطلح باللغة العربية	الرمز في المرحلة المتوسطة	الرمز في المرحلة الثانوية
الإحداثي السيني	س	x
الإحداثي الصادي	ص	y
ارتفاع	ل	h
الجذر التربيعي	$\sqrt{\quad}$	$\sqrt{\quad}$
قياس زاوية	ق ∡ أ ب جـ	$m\angle ABC$
زاوية	∡	$\angle$
زوج مرتب	(أ ، ب)	(a, b)
قاعدة	ق	b
قطر دائرة	٢ نق	d
قطعة مستقيمة	$\overline{\text{أ ب}}$ قطعة مستقيمة طرفاها أ ، ب	$\overline{AB}$ قطعة مستقيمة طرفاها A, B
محيط الدائرة	مح	C
مركز الدائرة	م	C
مساحة	م	A
مستقيم	$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مستقيم يمر بالنقطتين أ وَ ب	$\overleftrightarrow{AB}$ مستقيم يمر بالنقطتين A, B
المسافة بين نقطتين	ف	d
نصف قطر الدائرة	نق	r
نصف مستقيم	$\overleftarrow{\text{أ ب}}$	$\overrightarrow{AB}$ نصف مستقيم يمر بالنقطة B وطرفه A
نقطة الأصل	م	o

الصيغ

الهندسة الإحداثية

نقطة المنتصف	على خط الأعداد: $M = \frac{a+b}{2}$ في المستوى الإحداثي: $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ في الفراغ: $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$	المسافة بين نقطتين	على خط الأعداد: $d = \lvert a-b \rvert$ في المستوى الإحداثي: $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$ في الفراغ: $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$
		الميل	$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, x_2 \neq x_1$

المحيط

المربع	$P = 4s$	الدائرة	$C = \pi d$ أو $C = 2\pi r$
المستطيل	$P = 2\ell + 2w$		

المساحة

المربع	$A = s^2$	المُعيَّن	$A = bh$ أو $A = \frac{1}{2}d_1 d_2$
المستطيل	$A = bh$ أو $A = \ell w$	المثلث	$A = \frac{1}{2}bh$
متوازي الأضلاع	$A = bh$	الدائرة	$A = \pi r^2$
شبه المنحرف	$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$	القطاع الدائري	$A = \frac{N}{360} \cdot \pi r^2$

المساحة الجانبية

المنشور	$L = Ph$	الهرم	$L = \frac{1}{2}P\ell$
الأسطوانة	$L = 2\pi rh$	المخروط	$L = \pi r\ell$

المساحة الكلية للسطح

المنشور	$T = Ph + 2B$	المخروط	$T = \pi r\ell + \pi r^2$
الأسطوانة	$T = 2\pi rh + 2\pi r^2$	الكرة	$T = 4\pi r^2$
الهرم	$T = \frac{1}{2}P\ell + B$		

الحجم

المكعب	$V = s^3$	الهرم	$V = \frac{1}{3}Bh$
متوازي المستطيلات	$V = \ell wh$	المخروط	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
المنشور	$V = Bh$	الكرة	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
الأسطوانة	$V = \pi r^2 h$		

الصيغ

المعادلات في المستوى الإحداثي

معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع	$y = mx + b$	معادلة الدائرة	$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$
معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة	$y - y_1 = m(x - x_1)$	الصيغة التربيعية	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

حساب المثلثات

قانون الجيب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$	نظرية فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$
قانون جيب التمام	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$		

الرموز

a	العامِد
$\approx$	مساوٍ تقريبًا لـِ
$\widehat{AB}$	القوس الأصغر الذي طرفاه A وَ B
$\widehat{ABC}$	القوس الأكبر الذي طرفاه A وَ C
A	مساحة المضلع أو الدائرة أو القطاع الدائري
B	مساحة قاعدة المنشور أو الأسطوانة أو الهرم أو المخروط
$p \leftrightarrow q$	العبارة الشرطية الثنائية: p إذا وفقط إذا q
$\odot P$	دائرة مركزها P
C	محيط الدائرة
$p \rightarrow q$	العبارة الشرطية: إذا كان p فإن q
$\cong$	مطابق لـِ
$p \wedge q$	p وَ q
cos	جيب التمام
$^\circ$	درجة
$p \vee q$	p أو q
AB	المسافة بين النقطتين A وَ B
$=$	يساوي
$\neq$	لا يساوي
$>$	أكبر من
$\geq$	أكبر من أو يساوي
A'	صورة A
$<$	أقل من
$\leq$	أقل من أو يساوي
L	المساحة الجانبية
$m\widehat{AB}$	قياس القوس AB بالدرجات
M	نقطة المنتصف
$\sim p$	نفي العبارة p
(x, y, z)	الثلاثي المرتب
$\parallel$	موازٍ لـِ
$\nparallel$	ليس موازيًا لـِ
$\square$	متوازي أضلاع
P	المحيط
$\perp$	عمودي على
π	باي (ط) النسبة التقريبية
s	طول ضلع من مضلع
$\sim$	مشابه
sin	الجيب
ℓ	المستقيم ℓ ، طول المستطيل، طول القوس، الارتفاع الجانبي
m	الميل
tan	الظل
T	مساحة السطح الكلية
$\triangle$	المثلث
V	الحجم
w	عرض المستطيل